بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

شرایط زنجیری در مدولهایی با بعد کرول

حمید غریبی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

استاد راهنما: دکتر حمید آقا تولایی

تابستان: ۱۳۷۷

تقدیم به:

همه کسانی که صمیمانه آنها را دوست دارم.

چکیده:

در این پایان نامه ابتدا نشان می‌دهیم که هر حلقه با بعد کرُل در شرط $A\,.\,C\,.\,C$ برای ایده‌آلهای نیمه اولش صدق می‌کند سپس نشان می‌دهیم که این نتیجه در حالت کلی برای مدولهادرست نمی‌باشد.

در حالت خاص فرض می‌کنیم حلقه R اولین جبر وایل روی یک میدان با مشخصه صفر باشد در اینصورت R - مدولی آرتینی می‌سازیم که در شرط $A\,.\,C\,.\,C$ برای زیر مدولهای اولش صدق نمی‌کند.

بنابراین شرایطی برای حلقه R تعیین می‌کنیم تا این نتیجه برای مدولها نیز درست باشد.

کار را در دو قسمت دنبال می‌کنیم در قسمت اول شرایطی را تعیین می‌کنیم که تحت آن شرایط یک R - مدول با بعد کرُل در شرط $A\,.\,C\,.\,C$ برای زیر مدولهااولش صدق کند که در نهایت به قضیه زیر می‌رسیم:

اگر R یک $P\,I$ حلقه باشد در اینصورت هر R - مدول با بعد کرُل در شرط $A\,.\,C\,.\,C$ برای زیر مدولهای اولش صدق می‌کند.

در قسمت دوم به دنبال شرایطی هستیم که تحت آن شرایط یک R - مدول با بعد کرُل در شرط $A\,.\,C\,.\,C$ برای زیر مدولهای نیمه اولش صدق کند که در نهایت به قضیه زیر می‌رسیم:

اگر R یک $P\,I$ حلقه نوتری چپ باشد آنگاه هر R - مدول با بعد کرُل در شرط $\mathbf{A\,.\,C\,.\,C}$ برای زیر مدولهای نیمه اولش صدق می‌کند.

تقدیر و تشکر

برخود لازم می‌دانم که از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر حمیدآقا تولایی که استاد راهنمای اینجانب در ارائه این پایان نامه بوده‌اند صمیمانه تشکر نمایم .

همچنین از حضور سروران ، سرکارخانم دکتر جذبی - جناب آقای دکتر مالک نژاد و جناب آقای دکتر ذکائی که بعنوان هیئت داوران در جلسه دفاعیه اینجانب شرکت کرده‌اند سپاسگزارم

و نیز مراتب قدردانی خود رانثار سرکار خانم بتول یوسفی مسئول تحصیلات تکمیلی و سرکار خانم کردبچه مسئول کتابخانه دانشکده ریاضی می‌نمایم .

فهرست

صفحه

فصل اول

مقـــدمـــه:

یکی از مباحثی که امروزه بسیار مورد توجه قرار گرفته است زیر مدولهای اول و خواص مربوط به آن می‌باشد.

در این پایان نامه بدنبال شرایطی هستیم که تحت آن شرایط یک R - مدول با بعد کرول در شرط A . c . c برای زیر مدولهای اولش صدق کند. سپس همین کار را برای زیر مدولهای نیمه اول تکرار می‌کنیم.

ایده اصلی این پایان نامه، همان ادامه کار مقاله‌ای است که ناگاتا در سال 1951 ارائه کرده است:

هر حلقه با بعد کرول در شرط A . c . c برای ایده‌الهای نیمه اولش صدق می‌کند.

در ادامه باارائه یک قضیه بعنوان مثال نقض، نشان می‌دهیم که قضیه ناگاتادر حالت کلی برای R - مدولها درست نمی‌باشدبنابراین شرایطی برای حلقه R تعیین می‌کنیم که یک R-مدول با بعد کرول در شرط A .c .c برای زیر مدولهای اولش صدق کند.

و در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که درصورتی قضیه ارائه شده توسط ناگاتا به مدولها قابل تعمیم است که R یک P I حلقه باشد.

مقـــدمـــه:

هر حلقه با بعد کرُل در شرط $A.c.c$ برای ایدالهای نیمه اولش صدق می‌کند ولی در حالت کلی این نتیجه برای مدولها درست نمی‌باشد.

در حالت خاص اگر $R = A_1(K)$ اولین جبروایل روی میدان K با مشخصه صفر باشد آنگاه R - مدولهای آرتینی وجود دارند که در شرط $A.c.c$ برای زیر مدولهای اول صدق نمی‌کنند.

در حالتی که R یک $P.I$ حلقه باشد یعنی R در یک چند جمله ای همانی (Polynomial identity) صدق کند هر R- مدول با بعد کرُل در شرط $A.c.c$ برای زیر مدولهای اولش صدق می‌کند و اگر R یک PI حلقه نوتری چپ باشد آنگاه هر R- مدول با بعد کرُل در شرط $A.c.c$ برای زیر مدولهای نیمه اولش صدق می‌کند

زیرمدولهای اول: 1 - Prime submodules :

از این به بعد فرض می‌کنیم که تمام حلقه ها یکدار بوده و همه R - مدولها نیز مدولهای چپ یونیتال باشند یعنی: $\forall m \in M \Rightarrow 1 \cdot m = m$

تعریف:

اگر R یک حلقه و M یک R - مدول باشد زیر مدول حقیقی K از M را اول گوئیم.

هرگاه: $r \in R,\ m \in M,\ rRm \subseteq K \Rightarrow (m \in K)$ یا $(rM \subseteq K)$

و زیر مدول S از M رانیمه اول گوئیم هرگاه S به صورت اشتراکی از زیر مدولهای اول M باشد.

[۷, p ۱۰۴۳] بعدا" نشان خواهیم داد که زیر مدولهای اول بیشتر از آنچه کـه فکـر می‌کنیم در دسترس هستند مثلا" اگر R- یک حلقه ساده باشد آنگاه هر زیر مدول حقیقی از R- مدول M اول است . همچنین اگر Z نشاندهنده حلقه اعداد صحیح و Q نشاندهندهٔ حلقه اعداد گویا باشد در این صورت Z مدول Q دارای زیر مدول اول نمی‌باشد .

تعریف:

اگر R یک حلقه و M یک R- مدول باشد برای هر زیر مجموعه غیر تهی X از M نابود ساز X در R را به صورت $ann_R(X)$ یا برای سادگی با $ann(X)$ نشان مـی‌دهیم و آن را بـه صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$ann(X) = \{ r\varepsilon R \mid rx = 0 , \forall x\varepsilon X\}$$

با این تعریف $ann(X)$ ایده‌ال چپی از حلقه R می‌باشد .

به همین ترتیب اگر A زیر مجموعه ای غیر تهی از R باشد تعریف می‌کنیم :

$$ann_M(A) = \{ m\varepsilon M \mid am = 0 , \forall a\varepsilon A\}$$

در حالتی که A ایده ال راستی از حلقه R باشد ثابت می‌کنیم $ann_M(A)$ یک زیر مدول M می‌باشد .

واضح است که :

$$a . 0 = 0 \Rightarrow 0 \varepsilon ann_M (A) \Rightarrow ann_M(A) \neq \phi$$

$$(1) - m_1, m_2 \varepsilon ann_M (A) \Rightarrow \begin{cases} am_1 = 0 \\ am_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a(m_1 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \varepsilon ann_M(A)$$

$$(2) - m\varepsilon ann_M(A), r\varepsilon R \Rightarrow a(rm) = \underbrace{(ar)}_{a'\varepsilon A}m = a'm = 0 \Rightarrow rm\varepsilon ann_M(A)$$

بنابراین شرایط زیرمدول بودن برقرارند

تعریف:

اگر N زیر مدولی از M باشد تعریف می‌کنیم:

$$(N:M)=\{r\varepsilon R \mid rM \subseteq N\}=\{r\varepsilon R \mid rm\varepsilon N, \forall m\varepsilon M\}$$

ادعا می‌کنیم $(N:M)$ ایده الی از R می‌باشد:

$$r_1, r_2\varepsilon (N:M) \Rightarrow \begin{cases} r_1 m\varepsilon N \\ r_2 m\varepsilon N \end{cases} \Rightarrow r_1 m + r_2 m\,\varepsilon N, \forall m\varepsilon M \Rightarrow$$

حالا باید نشان دهیم که

$$(r_1 + r_2)\,M \subseteq N$$

$$r_1\,\varepsilon (N:M), r\varepsilon R \Rightarrow ?\ r_1 r, rr_1\varepsilon (N:M)$$

$$\begin{cases} (r_1 r)m = r_1(rm) = r_1 m'\varepsilon N \Rightarrow r_1 r\varepsilon (N:M) \\ (rr_1)\,m = r\,(r_1 m) = rm'\varepsilon N \Rightarrow r\,r_1\varepsilon (N:M) \end{cases}$$

بنابراین $(N:M)$ ایده‌الی از حلقه R می‌باشد بعلاوه:

$$ann_R(\frac{M}{N})=\left\{r\varepsilon R \mid r(m+N)=\circ_{\frac{M}{N}},\ \forall (m+N)\varepsilon\frac{M}{N}\right\}=$$

$$=\{r\varepsilon R \mid rm+N=N, \forall m\varepsilon M\}=\{r\varepsilon R \mid rm\varepsilon N, \forall m\varepsilon M\}$$

$$=\{r\varepsilon R \mid rM \subseteq N\}=(N:M)$$

و در حالت خاص داریم:

$$ann_R(M)=(\circ : M)$$

اگر I ایده‌الی از حلقه R باشد در این صورت $I\subset(I:R)$ و در حالتی که R حلقه ای یکدار باشد $(I:R) = I$ ؛ اگر I و J و K سه ایده‌ال از حلقه R باشند : $(I:JK)=(I:J):K$

و اگر قرار دهیم $J = R$ با فرض یکدار بودن حلقه R داریم :

$$(I:RK)=(I:R):K=(I:K)$$

حالا می‌خواهیم شبیه این رابطه را برای مدولها ثابت کنیم اگر L زیر مدولی از R- مدول N باشد آنگاه : $(N:L)=(N:RL)$

واضح است که : $(N:RL)\subseteq(N:L)$ برای اثبات عکس آن :

$$\alpha\varepsilon(N:L)\ \ ,x=r_1l_1+r_2\ \ l_2+\ldots+r_nl_n\varepsilon RL$$

$$\Rightarrow \alpha x=\alpha r_1 l_1+\ldots+\alpha r_n l_n\Rightarrow \alpha x\,\varepsilon N\Rightarrow \alpha\varepsilon(N:RL)$$

$$\Rightarrow (N:L)\subseteq(N:RL)\qquad \therefore\qquad (N:L)=(N:RL)$$

گزاره ۱: اگر N و L زیر مدولهایی از M باشند که $N\subseteq L\subseteq M$: آنگاه :

$N \Leftrightarrow (N:M)=(N:L)\quad \forall L$ زیر مدول اولی از M است

اثبات $(\Rightarrow)$ فرض کنیم که :

$$r\varepsilon(N:M)\Rightarrow rm\varepsilon N,\forall m\varepsilon M,L\subseteq M\quad ,\quad rL\varepsilon N.\forall L\varepsilon L'\Rightarrow r\varepsilon(N:L')$$

$$\Rightarrow(N:M)\subseteq(N:L)\ (\ 1)$$

اگر $m\varepsilon L - N$ را ثابت در نظر بگیریم:

$$(N:L)=\{r\varepsilon R \mid rL\subseteq N\}=(N:RL)=\{r\varepsilon R \mid rRL\subseteq N\}=$$

$$\{r\varepsilon R \mid rRe\subseteq N, \forall e\varepsilon L\}\subseteq\{r\varepsilon R \mid rRm\subseteq N\} \xlongequal{N \text{اول}}$$

$\{r\varepsilon R \mid m\varepsilon M$ یا $rM\subset N\}, m\notin N$ طبق فرض $=\{r\varepsilon R \mid rM\subset N\}=(N:M)(۲)$

$$(۱),(۲)\Rightarrow (N:L)=(N:M)$$

برعکس $(\Leftarrow)$: فرض کنیم برای $m\varepsilon L-N$ و $r\varepsilon(N:L)$ داشته باشیم: $rRm\subseteq N$ ادعا می‌کنیم که $rM\subseteq N$ چون در غیر این صورت اگر $rM\subseteq N$ آنگاه

$r\varepsilon(N:L)=(N:M)\Rightarrow rM\subseteq N$ .x.

پس N زیر مدولی اول از M می‌باشد. ■

نتیجه [۹،۴.۳.۴]: اگر $M\neq 0$ یک R- مدول باشد به طوری که برای هر زیر مدول غیر صفر M' از M داشته باشیم $annM=annM'$ در این صورت M را یک مدول اول گوئیم بعلاوه از آنجا که $annM$ یک ایده‌ال اول می‌باشد بنابراین باید ارتباطی بین ایدالهای اول حلقه R و زیر مدولهای اول R- مدول M وجود داشته باشد.

گزاره ۲: [۹،۴.۳.۵] اگر R در شرط $A.c.c$ برای ایدالهایش صدق کند آنگاه هر - R مدول غیر صفر M شامل یک زیر مدول اول است.

اثبات:

اگر $M\supseteq M_1\supseteq M_2\supseteq M_3\supseteq\ldots$ یک زنجیر نزولی از زیر مدولهای M باشند در این صورت $annM_1\subseteq annM_2\subseteq annM_3\subseteq\ldots$ زنجیری از ایدالهای حلقه R می‌باشند و بنابراین طبق

فرض متوقف می‌شوند یعنی و طبق نتیجه بالا R- مدول M دارای یک زیر مدول اول است.

$Ei > \circ , annM_{i+1} = annM_{i+1}, \forall \geq 1$

اعداد ترتیبی: هر مجموعه مرتب $(A, \leq)$ به یک عدد ترتیبی وابسته است که آن را با $ord(A, \leq)$ نشان می‌دهیم

اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب باشد به طوری که: $A \sim \{۱, ۲, ۳, \ldots, K\}$ و $K \in N$ آنگاه:

$ord(A, \leq) = K$

بعلاوه اگر $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ دو مجموعه مرتب باشند آنگاه:

$ord(A, \leq) = ord(B, \leq')$ اگر و فقط اگر تابعی دو سویی مانند $f : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که:

$a_۱, a_۲ \varepsilon A, a_۱ \leq a_۲ \Rightarrow f(a_۱) \leq' f(a_۲)$

اصل استقرای ترانسیفنی:

اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب و $P(x)$ برای هر $x \varepsilon A$ گزاره‌ای در باره x باشد واگر فرض کنیم که برای هر $x \varepsilon A$، $P(y)$ برای تمام $y < x$ درست باشد و از این فرض بتوانیم ثابت کنیم $P(x)$ نیز درست است در این صورت گزاره $P(x)$ برای تمام $x \varepsilon A$ درست می‌باشد.

تعریف بعد کرُل $[2, P. 223]$:

بعد کرُل R-مدول M را در صورتی که تعریف شده باشد با $K(M)$ نشان می‌دهیم و با استقراء ترانسیفنی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱- اگر $M = 0$ باشد آنگاه $K(M) = -۱$ و برعکس.

۲- اگر $a \geq 0$ یک عدد ترتیبی باشد و فرض کنیم برای تمام مدولهای با بعد کرُل کمتر از α