بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

گروه ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

گراف مقسوم علیه‌های صفر در یک حلقه جابجایی

نگارش:

مهدی رفیعی

استاد راهنما: دکتر سیامک یاسمی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

ریاضی محض

مهر ۱۳۸۲

بنام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

گروه آموزشی ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

گواهی دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

هیات داوران پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **مهدی رفیعی**

در رشته **ریاضی** گرایش **محض**

با عنوان **گراف مقسوم علیه‌های صفر یک حلقهٔ جابجایی**

را در تاریخ **۸۲/۸/۶**

	به عدد	به حروف
با نمره نهایی :	۱۸/۵	هجده و نیم

و درجه : عالی ارزیابی نمود.

ردیف	مشخصات هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه یا موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما استادراهنمای دوم (حسب مورد):	دکتر سیامک یاسمی	دانشیار	دانشگاه تهران	
۲	استاد داور	دکتر رحیم زارع نهندی	استاد	دانشگاه تهران	
۳	استاد مدعو	دکتر حمیدرضا میمنی	استادیار	شهید رجایی	
۴	استاد مدعو				
۵	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی گروه آموزشی :	دکتر هایده اهرابیان	استادیار	دانشگاه تهران	اهرابیان

تذکر: این برگه پس از تکمیل توسط هیات داوران در نخستین صفحه پایان نامه درج می گردد.

چکیده

گراف مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه جابجایی، گرافی خاص است که رئوس آن مقسوم علیه‌های صفر غیر صفر یک حلقه جابجایی است و هر رأس این گراف تنها به رئوسی که مقسوم علیه صفر آن رأس می‌باشند، متصل است.

از سال ۱۹۸۸ که استفان بک بسیاری از مسائل جالب در مورد عدد رنگی این گراف را بررسی نمود، بسیاری افراد مانند دن اندرسون و جی شاپیرو، این مسیر را ادامه داده‌اند و مسائل زیادی در زمینه گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌های جابجایی متناهی را حل نموده‌اند.

هدف از معرفی گراف مقسوم علیه‌های صفر، بکارگیری یک شیء ترکیباتی برای درک بهتر موضوع مجرّد حلقه‌های جابجایی است.

در این پایان‌نامه تقریباً تمام نتایجی که در این زمینه بدست آمده است، ارائه شده است.

« فهرست »

عنوان | شماره صفحه

مقدمه

مقدمه

برای نخستین بار در سال ۱۹۸۶ استفان‌بک (*Istvan Beck*) از دانشکده ریاضیات و علوم کامپیوتر دانشگاه حیفا، مفهوم گراف حلقه‌ها را در مقاله‌ای با نام رنگ‌آمیزی حلقه‌های جابجایی معرفی نمود. این گراف خاص، تمام اعضای یک حلقه جابجایی را، رئوس گراف R در نظر می‌گیرد و یالهای آن $\overline{xy}$ (با شرط $xy=0$) می‌باشند. در این مقاله بک قصد داشت که مفاهیمی از نظریه گراف مانند: عدد رنگی و عدد خوشه‌ای (*clique number*) را به خواصی از حلقه‌های جابجایی ارتباط دهد و از این طریق به گسترش نظریه حلقه‌ها کمک کند. مهمترین قضیه اثبات شده در این مقاله تساوی عدد رنگی حلقه جابجایی R با مجموع عدد رنگی زیرگراف شامل تمام عناصر پوچتوان حلقه و عددی که تنها تابعی از خود حلقه است، می‌باشد. خلاصه این مقاله و کارهای بعدی اندرسون (*D.D.Anderson*) و (*D.F.Anderson*) و اکبری، میمنی و یاسمی (*S.Yasemi*) در فصل یک گنجانده شده‌اند.

در حقیقت کار اساسی بک در پیدا کردن شروط لازم برای متناهی بودن عدد رنگی بود. در مقاله حدس فرضیه تساوی عدد رنگی و عدد خوشه‌ای (*clique*) ارائه شده بود، که البته خود اوموفق به اثبات یا رد این حدس نشد و فقط توانست هنگامی که $\chi(R)\leq 5$ است، این حدس را بطور کامل اثبات نماید(که در فصل یک ارائه شده است).

در سال ۱۹۹۱، اندرسون و همکارش نصیر (*M.Naseer*)، مقاله بسیار جالبی ارائه کردند که در آن روشی قوی برای پیدا کردن حلقه‌های متناهی با عدد رنگی کوچک، مستقل از روش بک مطرح شده است. از این روش بعداً اسمیت (*Neal O.Smith*)، در ساختن تمام حلقه‌های متناهی که گراف آنها با برداشتن عضو صفر از گراف R مسطح (*Planar*) می‌باشد، استفاده کرد (جدول شماره دو فهرست کامل این حلقه‌ها است).

روش اندرسون بر روش بررسی رابطه بین اعضای حلقه که خطوط اصلی آن توسط قضایای ساختاری حلقه‌های موضعی کامل (*Complete Local Rings*) و غیر کامل مشخص می‌شود. اندرسون با ساختن حلقه موضعی با ۳۲ عضو که عدد خوشه‌ای پنج ($cl(R)=5$) و عدد رنگی شش ($\chi(R)=6$) دارد، حدسیه بک را کاملاً رد نمود. در عین حال اندرسون توانست شرط لازم و کافی برای رنگ‌پذیر بودن حلقه R، هنگامی که R حلقه‌ای نوتری است، تعیین نماید (فصل یک).

همانطور که ذکر شده گراف حلقه R شامل تمام عناصر حلقه R می‌باشد. این واقعیت از جهت آنکه ارتباط نظریه گراف، مستقیماً به عملهای جمع و ضرب حلقه مربوط می‌شود، خوب است؛ اما از جنبه‌های گراف وجود رأس غیر بدیهی صفر که به تمام رئوس R متصل است، سؤالهایی مانند ستاره‌ای بودن گراف و هم‌بندی (*Connectivity*) و حتی ساختار دوره‌ها را به سؤالهایی بدیهی مبدل می‌کند. با برداشتن عضو صفر اندرسون مفهوم جدیدی به‌نام گراف مقسوم علیه‌های صفر ($\Gamma(R)$) که زیر گرافی از R است و رئوسش تمامی مقسوم علیه‌های صفر غیر صفراند، را معرفی کرد. مفهوم جدید از گراف حلقه R، قویاً خواص غیر بدیهی دارد. هم‌بندی این گراف و طول حداقل دور یا کمر (*girth*) در این گراف، تقریباً به سادگی اثبات می‌شوند. اما چنانچه در فصل دو دیده می‌شود، قضایایی که برای ساختن حلقه‌هایی که گراف آنها دور ندارند اثبات می‌شود و کامل بودن گراف $\Gamma(R)$ قضایایی کاملاً غیر بدیهی هستند. بدین ترتیب مسیری جدید در راستای هدف اولیه بک گشوده می‌شود. اندرسون خلاصه این دیدگاه جدید را در دو مقاله با نام "گراف مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه جابجایی" مقالات [۱] و [۲] منتشر می‌کند. مسأله جدیدی که در این مقالات معرفی می‌شود، تعیین شرایط لازم و کافی برای یکریخت بودن گراف مقسوم علیه‌های صفر است که خود اندرسون برای حلقه‌های کاهشی (*reduced*) و در حالت متناهی، این سؤال را جواب می‌دهد. بعداً شاپیرو و لوی (*Jay Shapiro & Ron Levy*)، این مسأله را در مورد حلقه‌های صفر بعدی و کاهشی (یعنی حلقه‌های منظم فون نویمان) ادامه

می‌دهند و سرفصل جدید با مطالب عمیق‌تر آغاز می‌شود. بدین ترتیب با معرفی چند مفهوم دیگر که ساده اما کارآمد هستند(مانند رابطه ترتیب و تعامد در گرافها در فصل دوم)، در نظریه گراف برای حلقه‌های فون‌نویمان، شرط لازم و کافی برای یکریختی حلقه‌ها (هنگامی که گرافها یکریخت باشند) بدست می‌آید. این مفاهیم مستقیماً از خواص عناصر خود توان حلقه‌های فون‌نویمان بدست می‌آیند. در فصل سوم و چهارم، آخرین نتایج بدست آمده در نظریه حلقه‌های فون‌نویمان و رده‌بندی حلقه-هایی که گراف تام (*Complemented*) دارند، درج شده است.

با توجه به کارهای انجام شده در نظریه نوین گراف حلقه‌های جابجایی، انتظار می‌رود که با استفاده از روشهای کامپیوتری و نیز تعریف‌های جدید از گراف یک حلقه بتوان آنرا به نظریه متعارف گراف، نزدیک نمود. مثلاً اگر بتوان گراف حلقه‌ها را طوری تعریف نمود که قطر بزرگتری داشته باشد یا لزوماً متصل نباشد، این نظریه گسترش بیشتری خواهد یافت. مسأله مهم که هنوز بدان پرداخته نشده، ارتباط گراف مقسوم علیه‌های صفر و گراف R-جبرها یا یک موضعی‌سازی حلقه R است.این مسأله مربوط به قسمتی در جبر جابجایی با نام تغییر حلقه‌ها (*Change of Rings*) است. اگر حلقه R نوتری باشد، مقسوم علیه‌های صفر برابر اجتماع ایده‌آلهای اول متعلق به $Ass\ R$ می‌باشد. قضیه‌ای که در ارتباط با مطلب فوق‌الذکر قابل استفاده خواهد بود، قضیه‌ای از کتاب بورباکی(*N.Bourbaki*) است که بیان می‌کند، اگر $\rho : R \to S$ یک هomomorفیسم و ρ_* تابع تغییر حلقه (تابعی که هر S- مدول را به یک R - مدول تبدیل می‌کند. بصورتی که: $rM = \rho(r)M$) باشد. آنگاه با شرط یکدست بودن (*flat*) حلقه S بعنوان یک R-جبر: $\rho_*^{-1}(P \in AssS) \in AssR$.

از این واقعیت می‌توان در تبدیل برخی خواص گراف مقسوم علیه صفر حلقه R به گراف $\Gamma(S)$ استفاده نمود. کار به همین‌جا نیز ختم نمی‌شود؛ چرا که با تغییر تعریف گراف منسوب به حلقه R می‌توان خواص دیگری از نظریه گراف را به نظریه حلقه‌ها نسبت داد. مثلاً اگر ایده‌آل M از یک حلقه چند جمله‌ای روی یک میدان (یا بطور

کلی روی حلقه R) توسط تک جمله‌ای‌های درجه دو تولید شود، خواصی از حلقه $R[x]_M$ مانند مک‌کولی (*Maccauly*) بودن و تعداد بخش‌های (*Component*) گرافی که رئوس آن مجموعه متغیرهای مستقل‌اند (یالهای این گراف بین متغیرهایی که حاصلضربشان جزو مولدهای M است قرار دارند) مربوط است.

چنانچه در این پایان‌نامه خواهید دید، رهیافت گرافی برای توسیع نظریه حلقه‌ها از نظر شهودی و هندسی بکر و زیباست.

پیش نیاز

پیش نیاز

در این بخش مفاهیم و تعاریفی که از نظریه گراف و نظریه حلقه‌های جابجایی در این پایان‌نامه استفاده شده‌اند، معرفی می‌گردد.

۱- مفاهیم مربوط به نظریه گراف:

گراف G بنابه تعریف برابر زوج (V,E) است که V مجموعه‌ای شامل تعداد دلخواهی عضو و مجموعه E شامل تعداد دلخواهی از زیر مجموعه‌های دو عضوی مجموعه V است. مجموعه V را رئوس گراف G و مجموعه E را یالهای گراف G می‌نامند. بصورت شهودی می‌توان گراف G را با تعدادی نقطه در صفحه که در تناظر یک‌به‌یک با اعضای V (رأسها) هستند، نشان داد. برای ترسیم یالها اگر $\{x,y\} \in E$ که x,y دو رأس گراف G هستند، باشد؛ کافی است پاره خطی بین دو نقطه مربوط به x,y رسم نمود. ضمناً x,y را دو سریال $\{x,y\}$ می‌گویند.

در صورتی که مجموعه یالها (E) از قبل مشخص باشد، گراف G را می‌توان گراف V نیز نامید.

مثال ۱: اگر R حلقه‌ای جابجایی (یعنی $\forall x,y \in R: xy = yx$) باشد، گراف $R = (V,E)$ که گراف R نیز نامیده می‌شود را می‌توان به‌صورت زیر ساخت. مجموعه رئوس گراف G مجموعه R (یعنی تمام اعضای حلقه R) است و درصورتی بین دو رأس متفاوت $x,y \in R$ یالی وجود دارد که $xy = 0$ یا

$$\{x,y\} \in E \Leftrightarrow (xy = 0 \wedge x \neq y)$$

یک زیر گراف از گراف $G = (V,E)$ ، گرافی است به‌صورت $G' = (V',E')$ که $V' \subset V$ و E' زیر مجموعه‌ای از E است که هر یال موجود در E' دو سرش در V' قرار داشته باشد.

مثال ۲: گراف R در مثال ۱ را در نظر بگیرید؛ اگر I ایده‌آلی از R باشد، گراف I زیرگرافی از R بصورت $I = (V,E)$ است که $V = I$ و E یالهایی از گراف R است که دو سرش در I قرار داشته باشد.

مثال ۳: گراف R را در مثال فوق در نظر بگیرید؛ گراف $\Gamma(R)$ زیرگرافی از R است که رئوس آن شامل تمام مقسوم علیه‌های صفر حلقه R که مخالف صفر هستند می‌باشد و یالهای آن یالهایی از گراف R است که دو سرش در مجموعه رئوس گراف $\Gamma(R)$ می‌باشد.

تعریف: یک مسیر $(Path)$ در گراف $G=(V,E)$ بین دو رأس $x,y\in V$ دنباله‌ای از رئوس $x_i\in V$ $(i=1,2,\cdots,n)$ به‌صورت $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ است که $x_1=x$ و $x_n=y$ و تمام x_iها با هم متفاوتند. شرط زیر برقرار است:

$$\forall i\ ;\ 1\le i\le n-1\ :\ \{x_i\ ,x_{i+1}\}\in E$$

طول مسیر $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ بنابه تعریف برابر $(n-1)$ می‌باشد.

مثال: اگر در مسیر $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$، شرط $x_1=x_2$ برقرار باشد، این مسیر را یک دور $(Cycle)$ به طول $(n-1)$ می‌نامند.

تعریف: قطر گراف $G=(V,E)$ بنابه تعریف طول، بلندترین مسیر در G است. اگر قطر گراف G متناهی و برابر m باشد، نماد $girth\ (G)=m$ بکار برده می‌شود.

تعریف: کمر گراف $G=(V,E)$ بنابه تعرف طول کوتاهترین دور در G است. اگر کمر گراف G متناهی و برابر n باشد، نماد $girth\ (G)=n$ بکار برده می‌شود.

تعریف: گراف G را مسطح $(Planar)$ گویند. هرگاه بتوان آنرا طوری در صفحه ترسیم نمود که هر دو یال، حداکثر در یکی از نقاط دو سر خود همدیگر را قطع نمایند. گراف K_n گرافی است با n رأس که بین هر دو رأس یالی وجود دارد.

مثال: گراف K_5 مسطح نیست.

گراف $G=(V,E)$ را دو بخشی کامل می‌گویند. اگر $V=X_1\cup X_2$ که X_1 و X_2 اشتراک تهی دارند، باشد و اگر $x\in X_1$ و $y\in X_2$ ، آنگاه $\{x,y\}\in E$ و تنها یالهای G ، یالهایی هستند که به این روش ساخته می‌شود. اگر X_1 شامل m عضو و X_2 ، n عضوی باشد؛ گراف G را به صورت $K_{m,n}$ نشان می‌دهند.

قضیه [مرجع(۲) قضیه ۳.۶.۴ صفحه ۲۱۳]: شرط لازم و کافی برای آنکه گراف G مسطح باشد آن است که هیچ یک از گرافهای $K_{3,3}$ و K_5 ، زیرگراف G نباشند.

تعریف: یک تابع رنگ برای گراف $G=(V,E)$ تابعی مانند f از V به مجموعه اعداد طبیعی است که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\{x,y\}\in E \Rightarrow f(x)\neq f(y)$$

تعریف: عدد رنگی (*Chromatic*) گراف G که با $\chi(G)$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(G)=Min\left\{|f(V)| \;\; f \text{ یک تابع رنگ است}\right\}$$

در تعریف فوق، *Min* علامت حداقل مقدار عناصر یک مجموعه است و $|f(V)|$ تعداد اعداد طبیعی متفاوتی است که تابع f به خود می‌گیرد.

تعریف: عدد خوشه‌ای گراف G که با $cl(G)$ نشان داده می‌شود، حداکثر عدد طبیعی n است که K_n زیرگرافی از گراف G باشد.

قضیه: عدد رنگی گراف G از عدد خوشه‌ای همواره بزرگتر یا مساوی است.