بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی‌ارشد ریاضی (محض)

عنوان :

حلقه‌های با گراف مقسوم‌علیه‌صفر از گونای یک

نگارش :

معصومه قاسمی

استاد راهنما :

دکتر سید احمد موسوی

استاد مشاور:

دکتر عباس حیدری

مهر ۱۳۸۹

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم معصومه قاسمی** رشته **ریاضی محض** تحت عنوان:«**حلقه های با گراف مقسوم علیه صفر از گونای یک**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر عبدالجواد طاهری زاده	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض (جبر)** است که در سال **۱۳۸۹** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **سید احمد موسوی** ، مشاوره جناب آقای دکتر **عباس حیدری** و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **معصومه قاسمی** دانشجوی رشته **ریاضی محض (جبر)** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **معصومه قاسمی**

تاریخ و امضا:

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **معصومه قاسمی** دانشجوی رشته **ریاضی محض (جبر)** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۷** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلِیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ:

تقدیم به قطب دایره امکان حضرت بقیه الله، این اثر ناچیز را همانند موری خرد به پیشگاه سلیمان وجود تقدیم می‌نمایم؛

او که تمام صاحبان فضل گدای انعام اویند،

و انبیا و اولیا محتاج عنایتش،

قطب دایره امکان است و تمامی آفرینش طفیل هستی او،

او که رب وجود است و مظهر پروردگار صاحب وجود،

سررشته هستی به‌دست اوست و هر چیز جز بر طریق وجه اوست محکوم به فنا و نیستی،

هرچه آمیخته با او گردد،باقی‌ماند و رنگ جلالت و کرامت پذیرد،

او که بهار مردمان است و طراوت‌بخش ایام.

و تقدیم به:

دو عشق پاک زندگی‌ام؛ پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر.

تقدیر و تشکر

"گویند سپاس خدای را که ما را به این راه رهنمود شد. اگر خدا نبود هرگز راه نمی‌یافتیم."

(اعراف ۴۳)

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی شمارش بر لحظه لحظه زندگی ام آشکار است. حمد وثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت.

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاش ها، زحمات وراهنمایی های ظریف، ارزشمند و بی شائبه استاد فرزانه و گران مایه‌ام، **جناب آقای دکتر سید احمد موسوی** که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق واداشتند. همچنین تشکر و سپاسگذاری قلبی‌ام را به استاد مشاور اینجانب، **جناب آقای دکتر عباس حیدری** ابراز می‌نمایم.

از اساتید محترم، **جناب آقای پروفسور علی ایرانمنش** و **جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده** که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر وقدردانی را دارم. از خدای متعال برای همه این عزیزان، سلامتی و موفقیت روزافزون آرزومندم.

درپایان بی نهایت ترین سپاس را

به پر بهاترین گنج‌های گیتی، پدر و مادرعزیزم

ابراز می‌نمایم هر چند این سپاس‌گزاری در مقایسه با انبوه

مهربانی ها وفداکاری هایشان بسیار ناچیز است.

چکیده

دراین پایان‌نامه، ویژگی‌های گراف مقسوم‌علیه‌صفر یک حلقه جابجایی و گونای آن‌را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بویژه، تمام حلقه‌های جابجایی متناهی و یکدار که گراف مقسوم‌علیه صفر آنها دارای گونای یک است را مشخص کرده و رده‌بندی می‌نماییم. همچنین نشان می‌دهیم که برای یک عدد صحیح مثبت ثابت g، تعداد متناهی کلاس هم‌ارزی از حلقه‌هایی که گراف مقسوم‌علیه‌صفر آنها دارای گونای g است، وجود دارد.

برای این منظور مقالات زیر را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم:

(1) C. Wickham, Classification of rings with genus one zero-divisor graphs. Comm. Algebra 36 (2) (2008) 1-21.
(2) C. Wickham, Rings whose zero-divisor graphs have positive genus, Journal of Algebra 321 (2009) 377-383.

از مطالعه مقالات فوق نتایج زیر حاصل می شود:

۱- اگر $R \cong R_1 \times \ldots \times R_n$ که $n \geq 5$ و R_iها حلقه‌های موضعی جابجایی باشند، آنگاه $\gamma\big(\Gamma(R)\big) \geq 2$؛ یعنی R،چنبره‌ای نیست.

۲- تنها حلقه چنبره‌ای با چهار عامل موضعی عبارت است از: $R \cong \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

۳- ۸ حلقه چنبره‌ای با سه عامل موضعی وجود دارد (توجه داریم که $\mathbb{A}_{p^2} = \mathbb{F}_p\,[x]/(x^2)$) که عبارتنداز:

$$\mathbb{F}_7 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2\ ,\ \ \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2\ ,\ \ \mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_2\ ,\ \ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$$

$$\mathbb{A}_4 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2\ ,\ \ \mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2\ ,\ \ \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3\ ,\ \ \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_2\ .$$

۴- ۲۰ حلقه چنبره‌ای با دو عامل موضعی وجود دارد که عبارتنداز:

$\mathbb{F}_7 \times \mathbb{Z}_4 \quad , \quad \mathbb{F}_7 \times \mathbb{A}_4 \quad , \quad \mathbb{F}_7 \times \mathbb{F}_4 \quad , \quad \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$

$\mathbb{F}_5 \times \mathbb{A}_4 \quad , \quad \mathbb{F}_5 \times \mathbb{Z}_4 \quad , \quad \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_4 \quad , \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

$\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_4 \quad , \quad \mathbb{A}_4 \times \mathbb{A}_4 \quad , \quad \mathbb{F}_4 \times \mathbb{Z}_4 \quad , \quad \mathbb{F}_4 \times \mathbb{A}_4$

$\mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_4 \quad , \quad \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{F}_3 \quad , \quad \mathbb{F}_2\,[x]/(x^3) \times \mathbb{F}_3$

$\mathbb{Z}_4\,[x]/(2x, x^2-2) \times \mathbb{F}_3 \quad , \quad \mathbb{Z}_4\,[x]/(x^2-x-1) \times \mathbb{F}_2$

$.\ \mathbb{F}_4\,[x]/(x^2) \times \mathbb{F}_2\ , \mathbb{Z}_4\,[x]/(2x, x^2) \times \mathbb{F}_2\ , \mathbb{F}_2\,[x,y]/(x,y)^2 \times \mathbb{F}_2$

۵- ۱۷ حلقه موضعی چنبره‌ای وجود دارد که عبارتنداز:

$\mathbb{F}_8\,[\mathrm{x}]/(\mathrm{x}^2), \mathbb{Z}_4\,[x]/(x^3+x+1), \mathbb{Z}_{49}, \mathbb{F}_7\,[x]/(x^2), \mathbb{F}_2\,[\mathrm{x}]/(x^5)$

$\mathbb{Z}_4\,[x]/(2x, x^4-2)\ , \mathbb{Z}_4\,[\mathrm{x}]/(2\mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3-2)\ , \mathbb{Z}_8\,[\mathrm{x}]/(4\mathrm{x}, \mathrm{x}^2-2)$

$\mathbb{Z}_8\,[x]/(4x, x^2-2x-2) \quad , \quad \mathbb{Z}_8\,[\mathrm{x}]/(4\mathrm{x}, \mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+2) \quad , \quad \mathbb{Z}_{32}$

$\mathbb{F}_2\,[\mathrm{x},\mathrm{y}]/(\mathrm{x}^3, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2) \quad , \quad \mathbb{F}_2\,[\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}]/(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})^2 \quad , \quad \mathbb{Z}_4\,[\mathrm{x}]/(2\mathrm{x}, \mathrm{x}^3)$

$.\ \mathbb{Z}_4\,[\mathrm{x},\mathrm{y}]/(\mathrm{x}^2-2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2, 2\mathrm{x}, 2\mathrm{y}), \mathbb{Z}_4\,[\mathrm{x},\mathrm{y}]/(2,\mathrm{x},\mathrm{y})^2, \mathbb{Z}_8\,[\mathrm{x}]/(2\mathrm{x}, \mathrm{x}^2)$

۶- برای هر عدد صحیح مثبت g، تعداد متناهی حلقه جابجایی متناهی از گونای g وجود دارد.

کلمات کلیدی: حلقه‌جابجایی‌متناهی، مقسوم‌علیه‌صفر، گراف مقسوم‌علیه‌صفر، گونا، حلقه چنبره‌ای و گراف چنبره‌ای.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

در سراسر این پایان‌نامه، تمام حلقه‌ها را، حلقه‌های جابجایی و یکدار درنظر می‌گیریم. حلقه‌های از اندازه صحیح n رابا $\mathbb{Z}_n$ و میدان با q عنصر را با F_q نمایش می‌دهیم. اگر S زیرمجموعه‌ای از حلقه R باشد، S^* را مجموعه عناصر غیرصفر S درنظر می‌گیریم. عنصر $a \in R^*$ را مقسوم‌علیه‌صفر R گوییم، هرگاه عنصر bای از R^* موجود باشد که $ab = 0$. مجموعه مقسوم‌علیه‌های‌صفر R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم.

یکی از موضوعاتی که نظریه حلقه‌های جابجایی را با نظریه گراف پیوند می‌دهد، مفهوم گراف مقسوم‌علیه‌صفر روی حلقه‌های جابجایی است. ایده اولیه گراف‌های مقسوم‌علیه‌صفر اول بار توسط بک[۱] درسال ۱۹۸۸، زمانی که روی مسئله رنگ‌آمیزی گراف‌ها کار می‌کرد مطرح شد. گراف مقسوم‌علیه‌صفر R که با $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، گرافی (ساده) است که مجموعه رأس‌هایش $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ و مجموعه یال‌هایش $E = \{\{a, b\} \subseteq Z(R)^* | ab = 0\}$ می‌باشد.این تعریف از $\Gamma(R)$ توسط اندرسون[۲] و لیویگستون[۳] در سال ۱۹۹۹ [۳] ارائه شد. واضح است که $\Gamma(R)$ تهی است اگروتنهااگر R دامنه صحیح باشد؛ یعنی R فاقد مقسوم‌علیه‌صفر باشد.

در سال‌های اخیر، مطالعه گراف‌های مقسوم‌علیه‌صفر از جهات مختلف رشد چشمگیری داشته است. در حقیقت فعل و انفعالی بین ویژگی‌های نظریه حلقه R و ویژگی‌های نظریه گراف $\Gamma(R)$ می‌باشد که در سال ۱۹۹۹ توسط اندرسون و لیویگستون [۳] شروع شد و توسط اندرسون[۴](۲۰۰۱) [۴] و اکبری[۵] و محمدیان[۶](۲۰۰۴) [۲] ادامه یافت. ردموند[۷] در سال ۲۰۰۳ [۱۶]، گراف مقسوم‌علیه‌صفر با

---

[۱] Beck
[۲] Anderson
[۳] Livigston
[۴] Anderson
[۵] Akbari
[۶] Mohammadian
[۷] Redmond

فرض پایه ایده‌آل را معرفی کرد که تعمیمی از $\Gamma(R)$ می‌باشد و بعدها این ایده توسط میمنی[۱] در سال ۲۰۰۶ [۱۲]، مورد مطالعه بیشتر قرار گرفت.

اندرسون در سال ۲۰۰۱ [۴]، این سؤال را مطرح کرد: برای کدام حلقه‌های جابجایی متناهی R، $\Gamma(R)$ مسطح است؟ در سال ۲۰۰۳ [۱]، اکبری یک جواب جزئی ارائه نمود، اما سؤال برای حلقه‌های موضعی از مرتبه ۳۲ همچنان باز ماند. اسمیت[۲] در سال ۲۰۰۲ [۱۹] و به طور مستقل وانگ[۳] در سال ۲۰۰۶ [۲۰] و چاپمن[۴] و بلشف[۵] در سال ۲۰۰۷ [۶] نشان دادند که هیچ حلقه موضعی از مرتبه ۳۲ دارای گراف مقسوم‌علیه‌صفر مسطح نیست. بعلاوه،اسمیت [۱۹] یک لیست کامل از حلقه‌های مسطح متناهی ارائه کرده است؛ این لیست شامل دو خانواده نامتناهی $\mathbb{F}_2 \times K$ و $\mathbb{F}_3 \times K$ که K هر میدان متناهی است، می‌باشد. همچنین ۴۲ کلاس هم‌ارزی دیگر از حلقه‌های مسطح متناهی ارائه نموده است.

از اهداف این پایان‌نامه، می‌توان به بررسی نشاندن گراف‌های مقسوم‌علیه‌صفر روی سطوحی از گونای بالاتر، بویژه چنبره، اشاره کرد. گراف های مقسوم‌علیه‌صفر از گونای یک توسط وانگ [۲۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پایان‌نامه یک رده‌بندی کامل از حلقه‌های چنبره‌ای متناهی ارائه می‌شود که شامل ۴۶ کلاس هم‌ارزی است. همچنین روابط بین خاصیت گرنشتاین[۶] حلقه R و گونای حلقه‌های از مرتبه مشخص مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین نشان داده می‌شود که برای عدد صحیح مثبت مفروض g، تعداد متناهی حلقه متناهی از گونای g وجود دارد.

مرجع اصلی این پایان‌نامه، مقاله‌های زیر می‌باشد که در فصل‌های دوم و سوم و چهارم بـه تفصـیل بـه آنها پرداخته شده است:

---

[۱] Maimani
[۲] Smith
[۳] Wang
[۴] Chapman
[۵] Belshoff
[۶] Gorenstein

(1) C. Wickham, Classification of rings with genus one zero-divisor graphs. Comm. Algebra 36 (2) (2008) 1-21.
(2) C. Wickham, Rings whose zero-divisor graphs have positive genus, Journal of Algebra 321 (2009) 377-383.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

بخش ۱-۱. مقدمه

در این فصل، ابتدا مفاهیم مورد نیاز پایان‌نامه را بیان می‌کنیم و تقریباً تمامی تعاریف و قضایای مهمی که پیش‌نیاز فصل‌های بعد می‌باشند را ذکر می‌نماییم. در پایان، اهداف و ساختار پایان‌نامه را مشخص می‌کنیم.

در این پایان‌نامه، تمامی حلقه‌ها، جابجایی و یکدار فرض می‌شوند.

بخش ۱-۲. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

حلقه‌های از اندازه صحیح n را با $\mathbb{Z}_n$ و میدان با q عنصر را با $\mathbb{F}_q$ نمایش می‌دهیم. اگر S زیرمجموعه‌ای از حلقه R باشد، S^* را مجموعه عناصر غیرصفر S درنظر می‌گیریم.

تعریف۱-۲-۱. عنصر $a \in R^*$ را مقسوم‌علیه‌صفر R گوییم، هرگاه عنصر bای از R^* موجود باشد که $ab = 0$. مجموعه مقسوم‌علیه‌های‌صفر R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف۱-۲-۲. عنصر a در حلقه R را عنصر منظم نامیم، هرگاه عنصری مانند $b \in R$ موجود باشد که $aba = a$.

توجه. هر عنصر وارون‌پذیر یک عنصر منظم است. درواقع عنصر منظم، یک مقسوم‌علیه‌صفر نیست.

تعریف۱-۲-۳. حلقه R یک حلقه منظم است اگر هر عنصرش منظم باشد. درواقع حلقه منظم، فاقد مقسوم‌علیه‌صفر است.

تعریف۱-۲-۴. گراف G عبارت‌است‌از زوج مرتب مجموعه‌های مجزای (V, E) که $V = V(\mathrm{G})$ مجموعه رئوس G و $E = E(G)$ مجموعه یال‌های G است.

تعریف۱-۲-۵. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف و $\{x, y\} \in E$ ، دراین‌صورت می‌نویسیم $xy \in E$ و می‌گوییم x با y مجاور است یا x و y مجاورند.

تعریف۱-۲-۶. فرض کنیم $v \in V$ ؛ تعداد یال‌های مجاور با v را درجه v نامیده و با $deg_G(v)$ و اگر ابهامی وجود نداشته باشد با $deg\ v$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$deg_G(v) = \left|\left\{b \in V(G) \middle| \{v, b\} \text{یک یال } G \text{است}\right\}\right|.$$

تعریف۱-۲-۷. فرض کنیم $V' \subseteq V(G)$؛ آنگاه $G - V'$ زیرگرافی از G است که از حذف رئوس V' و تمام یال‌های مجاور با V' بدست می‌آید.

به‌طور مشابه، اگر $E' \subseteq E(G)$ ؛ آنگاه $G - E'$ زیرگرافی از G است که از حذف یال‌های E' بدست می‌آید.

تعریف۱-۲-۸. اگر $V' = \{x \in V|\ deg(x) = 1\}$، آنگاه زیرگراف $G - V'$ را با $\tilde{G}$ نمایش داده و تقلیل یافته G می‌نامیم.

تعریف۱-۲-۹. گرافی که هر زوج از رئوس مجزای آن مجاورند، گراف کامل نامیده می‌شود. نماد K_n را برای گراف کامل با n رأس به کار می‌بریم.

تعریف۱-۲-۱۰. گراف G ، گراف دوبخشی کامل با کلاس‌های رأسی V_1 و V_2 است، هرگاه $V(G) = V_1 \cup V_2$ ، $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و هر یال از G هر رأس از V_1 را به تمام رئوس V_2 وصل کند. اگر $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$، آنگاه نماد $K_{m,n}$ را برای گراف دوبخشی کامل به‌کار می‌بریم.

تعریف۱-۲-۱۱. گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس G یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف۱-۲-۱۲. گراف مقسوم‌علیه‌صفر R که با $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود گرافی (ساده) است که مجموعه رأس‌هایش $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ و مجموعه یال‌هایش $E = \{\{a,b\} \subseteq Z(R)^* \big| ab = 0\}$ می‌باشد.

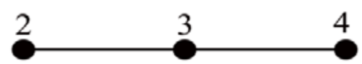
واضح است که $\Gamma(R)$ تهی است اگروتنهااگر R حوزه صحیح باشد، یعنی R فاقد مقسوم‌علیه‌صفر باشد.

توجه. اگر a یک مقسوم‌علیه‌صفر حلقه R باشد، آنگاه اگر $a^2 \neq 0$، $Ann\ (a)^*$ مجموعه همسایه‌های a در $\Gamma(R)$ است و اگر $a^2 = 0$، آنگاه $Ann\ (a)^* - \{a\}$ مجموعه همسایه‌های a در $\Gamma(R)$ می‌باشد، پس اگر $a^2 \neq 0$، آنگاه $deg_{\Gamma(R)}(a) = |Ann\ (a)| - 1$ و اگر $a^2 = 0$، آنگاه $deg_{\Gamma(R)}(a) = |Ann\ (a)| - 2$ می‌باشد.

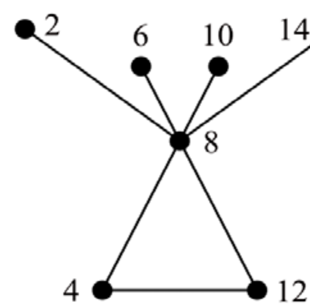
تعریف۱-۲-۱۳. در گراف همبند G رأس v از G را رأس برشی گوییم هرگاه $G - v$ ناهمبند باشد.

تعریف۱-۲-۱۴. زیرگراف همبند ماکسیمال G که فاقد رأس برشی باشد، بلوک گوییم. واضح است که اگر G رأس برشی نداشته باشد، خود G یک بلوک است.

مثال۱-۲-۱۵. مجموعه رئوس $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$، $\{2,3,4\}$ می‌باشد و گراف مقسوم‌علیه‌صفر آن در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. همچنین مجموعه رئوس $\Gamma(\mathbb{Z}_{16})$، $\{2,4,6,8,10,12,14\}$ است که گراف مقسوم‌علیه‌صفر آن را در شکل ۱-۲ مشاهده می‌کنیم.

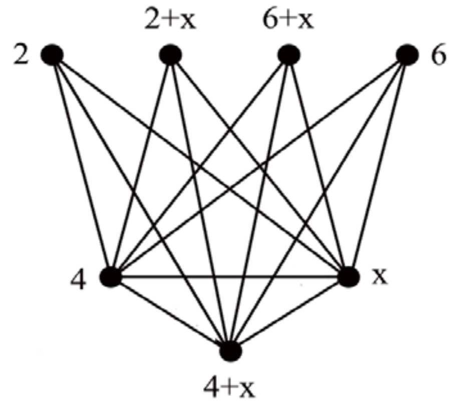


شکل ۱-۱. گراف مقسوم‌علیه‌صفر $\mathbb{Z}_6$.



شکل ۱-۲. گراف مقسوم‌علیه‌صفر $\mathbb{Z}_{16}$.

مثال۱-۲-۱۶. فرض کنیم $R=\mathbb{Z}_8[x]/(2x,x^2)$ و x نماینده تصویر x در R باشد. آنگاه مجموعه رئوس $\Gamma(R)$ ، مجموعه $(2,\mathrm{x})^*=\{2,4,6,\mathrm{x},2+\mathrm{x},4+\mathrm{x},6+\mathrm{x}\}$ از عناصر غیرصفر ایده‌آل ماکسیمال می‌باشد و گراف مقسوم‌علیه‌صفر آن در شکل ۱-۳ نشان داده شده است.



شکل ۱-۳. گراف مقسوم‌علیه‌صفر $\mathbb{Z}_8[x]/(2x,x^2)$.

تعریف۱-۲-۱۷. فرض کنیم $\delta(G)=min\{deg(v)|v\in V(G)\}$؛ که $\delta(G)$ درجه مینـیمم G نامیده می‌شود.

تعریف۱-۲-۱۸. اگر تمام رئوس G از درجه $\delta(G)=k$ باشند، آنگاه G گـراف k- مـنظم نامیـده می‌شود.

تعریف۱-۲-۱۹. یک زیرتقسیم از گراف G ، گرافی است که با اضافه کردن رئوسـی از درجـه دو روی یالهای G بدست می‌آید.

تعریف۱-۲-۲۰. یک رویه کره‌ای است با تعداد متناهی حفره که در آن قرار داده شده اسـت. بـه‌طـور معادل، یک رویه کره‌ای است که تعداد متناهی دسـته بـه آن اضـافه شـده اسـت. تعـداد حفـره‌هـا یـا دسته‌ها، گونای یک رویه نامیده می‌شود.

فرض کنیم S_k نمایش کره با k دسته باشد که k عدد صحیح نامنفی اسـت. یعنـی S_k یـک سـطح جهت‌پذیر از گونای k باشد.