دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

مطالعه روشهای عددی در حل مسائل کنترل بهینه تصادفی و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر علی دلاور خلفی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا هوشمند اصل

پژوهش‌گر:

محمد رضا خانی مزرعه آخوند

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

ارواح مطهر پدر و مادر و برادرم و تقدیم همسرم و یگانه فرزندم محمدطاها

و همه کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.

سپاس‌گزاری

حمد و سپاس خداوندی را سزاست که اولین کلام وحی را با امر به خواندن مزین فرمود تا بدانیم که علم سرامد همه فضائل است و سلام و صلوات خدا بر محمد (ص) و اهل بیت مکرمشان که ریشه‌ی همه فلاکتهای ملل را در جهل و بی‌سوادی آنها می‌دانستند و تمام هم و غمشان بر طرف کردن این عذاب عظمی بود و سلام بر اسلام ، دینی که هنوز بعد از هزار و اندی سال فلسفه دستورات و واجبات و محرماتش کشف می‌شود و سلام بر قران ، کتابی که رموز آن بدست غیر مسلمانان در حال کشف می‌باشدو سلام بر تمام انسانهای آزاده‌ای که با به زحمت انداختن خود و با بذل جان خویش مایه‌ی آسایش و پیشرفت دیگران را فراهم نمودند.

سپاس از تمام کسانی که در راه کسب علم و معرفت مرا کمک و یاری نمودند از معلمان ابتدائی تا اساتید عزیزم در دانشگاه ، و گرامی می‌دارم یاد تمام معلمان و اساتیدم را، خصوصا دکتر محمد حسن فاروقی که استاد علم و اخلاق این حقیر بودند و گرامی می‌دارم یاد عزیزان از دست رفته‌ام، خصوصا پدر و مادر، و برادرم که در راه آرمانهای والایش جام شهادت را سرکشید. یادشان گرامی

چکیده

یکی ازانواع مسائل بهینه‌سازی، مسائل کنترل می‌باشد که به دو دسته‌ی قطعی و تصادفی تقسیم می‌شود. دربررسی مسایل کنترل بهینه‌ی تصادفی شرایط بصورت معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌باشد که هدف اصلی یافتن کنترلی است که امیدریاضی یک عبارت انتگرالی را کمینه کند. به دلیل دشوار بودن روشهای تحلیلی برای حل مسائل کنترل، معمولا راه‌حل‌های عددی به کار بسته می‌شود و راه‌حل‌های عددی محبوبیت خاصی دارد. در زمینه راه‌حل‌های عددی معمولا مهمترین بحث، کدنویسی آن می‌باشد که نتایج آن فقط در حد جدول اعداد یا نمودار مطرح شده و معمولا کدها بصورت یک سری اطلاعات محرمانه تلقی شده و ارائه نمی‌شوند، به همین دلیل در این پایان‌نامه سعی بر آن شده تا یک روش عددی مطرح، بررسی، و کدنویسی شود.

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه‌ی کنترل بهینه و مفاهیم اساسی مربوط به آن زمینه‌ای است که در واقع از سال های ۱۹۵۰ به بعد به خاطر فعالیت‌های آمریکا و شوروی سابق در رابطه با کشفیات در منظومه‌ی شمسی آغاز گردید. مسائل ریاضی سفینه‌های فضایی نیز شامل مسائل بهینه‌سازی است. در واقع، هدف، ایجاد مسیرهایی است که در راستای آن مسیرها، یک فضاپیما که با یک راکت کوچک کنترل و هدایت می‌شود به هدف مورد نظرش در کمترین زمان ممکن یا با مصرف کمترین سوخت مصرف شده برسد. این نوع مسائل جدید با روش‌هایی که تا آن زمان ابداع شده بودند قابل حل نبودند و نظریه‌ی جدید که ریشه‌ی آن به قرن هجدهم باز می‌گشت، باید توسعه می‌یافت تا بتواند با مسائل جدید هماوردی کند. در واقع حل این مسائل از نظر ریاضی چنان چالش برانگیز بود که از آن زمان به بعد تلاش‌های بسیار گسترده‌تری برای حل دسته‌های مختلف این گونه مسائل از طریق ارائه‌ی انواع روش‌های عددی و تحلیلی انجام گردیده است. مسئله کنترل بهینه در بسیاری از کتاب‌ها و مقالات مورد بررسی قرار گرفته است. اصل ماکسیمم پانتریاگین و روش برنامه‌ریزی پویا به عنوان روش‌های تحلیلی برای حل مسائل کنترل بهینه متداول هستند. از آنجا که حل تحلیلی مسائل کنترل بهینه همیشه ساده نیست، مطالعه روی روش‌های عددی یک زمینه فعال مطالعاتی را برای محققان علوم ریاضی فراهم نموده است و باعث ظهور روش‌ها و الگوریتم‌های متعددی برای حل عددی این دسته از مسائل شده است. نظریه کنترل بهینه تصادفی در دهه پنجاه تقریبا همزمان با اصل بیشینه پانتریاگین، برنامه‌ریزی پویای بلمن و کنترل خطی درجه دوم کالمن گسترش یافت ، زمان آغاز تئوری کنترل بهینه کنونی درسال (۱۹۵۸) همزمان با گسترش نظریه‌ی کنترل در روسیه بوسیله‌ی کتاب تئوری ریاضی فرایندهای بهینه نوشته‌ی پانتریاگین و همکاران در سال (۱۹۶۲) بود. اهمیت کتاب پانتریاگین به خاطر اصل ماکزیمم سازی مسائل کنترل بهینه بود. ریچارد بلمن درسال (۱۹۸۵) با ایده‌ی برنامه‌ریزی پویا، حساب تغییرات را به مسائل کنترلی گسترش داد و ریاضیدانان مشهور آمریکایی از جمله والنتین ، شان ، هستنس ، برکوویتز و نوستد به اصل ماکسیمم سازی پرداختند.

در این پایان نامه پس از ارائه‌ی تعاریف اولیه و مباحث پیش‌نیاز، مطالبی در مورد کنترل قطعی مطرح می‌شود، پس از آن با کنترل تصادفی آشنا می‌شویم و با مطالعه‌ی بعضی روشهای عددی در حل مسائل کنترل بهینه به استقبال کدنویسی کنترل بهینه‌ی تصادفی می‌رویم. در واقع هدف اصلی این است که روش یا روشهای حل عددی مسائل کنترل بهینه‌ی تصادفی در قالب کدهای نرم‌افزار ریاضی $MATLAB$ کدنویسی و ارائه شود. چون زمینه‌ی کاری، کدنویسی بوده، از اثبات قضایا و نتایج حاصله صرف‌نظر شده و سعی شده از کنار مطالبی

که اهمیت کمتری دارند، با حل مثال عبور کنیم. لازم به‌ذکر است که کلیه مطالب فصلهای ۲ و ۳ این پایان‌نامه از [۱] است و فصل چهارم از [۳]، که البته برای تکمیل آنها از سایر مراجع نام‌برده نیز استفاده شده است.

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

با توجه به این‌که هدف این پایان‌نامه مطالعه روش‌های عددی حل مسائل کنترل بهینه‌ی تصادفی و شبیه‌سازی آن در نرم افزار $MATLAB$ می‌باشد، در این فصل قصد داریم به معرفی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در فصل‌های آتی در زمینه حسابان تصادفی بپردازیم.

در عمل در بیشتر سیستم‌های دینامیکی و کنترلی، عواملی هستند که به وجود آورنده آشوب یا اغتشاش در سیستم می‌باشند که در مطالعه مدل‌های کنترل قطعی این اغتشاشات نادیده گرفته می‌شوند. در این پایان‌نامه به مطالعه مدل‌هایی می‌پردازیم که عوامل به وجودآورنده اغتشاش در عملکرد سیستم تاثیرگذار می‌باشد و رفتار دینامیکی این سیستم‌ها به وسیله یک معادله دیفرانسیلی تصادفی توصیف می‌شود. در مدل‌های کنترل تصادفی، به دلیل این‌که نمی‌توان رفتار دینامیکی سیستم را به طور دقیق در آینده پیش‌بینی کرد، داشتن یک مجموعه‌ی اطلاعاتی از سابقه‌ی سیستم در کنترل بهینه نقش بسیار مهم و اساسی را ایفا می‌کند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم ریاضی

تعریف ۱.۱.۱ کلاس $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های Ω ،یعنی $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ یک جبر [۱] است اگر:

۱) $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$ (A^c متمم A در Ω است).

۲) $A, B \in \mathcal{F}$ آنگاه . $A \cup B \in \mathcal{F}$

۳) $\Omega \in \mathcal{F}$ (یا به‌طور معادل $\emptyset \in \mathcal{F}$).

به‌علاوه کلاس $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های Ω یک σ -جبر است هرگاه یک جبر باشد و:

۴) اگر $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ ، آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

از دیدگاه احتمال، σ -جبر را می‌توان به عنوان اطلاعات داده شده‌ی یک آزمایش درنظر گرفت. در مباحث اقتصادی از $\mathcal{F}$ برای نمایش مجموعه‌ی سوابق [۲] استفاده می‌کنند. در واقع شرایط (۱) تا (۴) یک ساختار ریاضی برای سابقه‌ی آزمایش فراهم می‌کنند.

---

[۱] Algebra

[۲] Information set

تعریف ۲.۱.۱ الف) یک فضای اندازه‌پذیر زوج $(\Omega, \mathcal{F})$ شامل یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه و σ -جبر $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های Ω است .

ب) اندازه‌ی نامنفی P روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ یک تابع مجموعه‌ای نامنفی روی $\mathcal{F}$ است به‌گونه ای که:

۱) $P(\emptyset) = ۰$.

۲) اگر $A_i \in \mathcal{F}$ ، $i = ۱, ۲, \ldots$ ، دو به دو مجزا باشند آن‌گاه $P(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i)$.

دراین‌صورت به سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای اندازه می‌گویند.

ج) اگر $P(\Omega) = ۱$، P را اندازه‌ی احتمال [۳] روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ و سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را فضای احتمال [۴] می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ و $(\Omega', \mathcal{F}')$ دو فضای اندازه باشند، آن‌گاه تابع $T : \Omega \longrightarrow \Omega'$ یک بردار تصادفی است، اگر T ، $\mathcal{F}$–اندازه‌پذیر باشد، یعنی به ازای هر $B \in \mathcal{F}'$،

$$T^{-۱}(B) = \{w \in \Omega : T(w) \in \mathcal{F}'\} \in \mathcal{F}.$$

به‌ویژه اگر $(\Omega', F') = (\mathbb{R} \, , \, \mathcal{B})$ ، که $\mathcal{B}$ ، σ -جبر تولید شده توسط بازه‌های متناهی در $\mathbb{R}$ است، آن‌گاه T را متغیر تصادفی [۵] می‌گویند.

تعریف ۴.۱.۱ فرایند تصادفی [۶] $\{X_t : t \in I\}$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است که در آن I مجموعه‌ی اندیس‌گذار است. اگر $I = \mathbb{Z}$ آن‌گاه $\{X_t : t \in I\}$ یک فرایند تصادفی گسسته، سری زمانی یا دنباله‌ی تصادفی [۷] نامیده می‌شود. اگر $I = [۰, ۱]$ یا $I = [۰, \infty)$ آن‌گاه $\{X_t : t \in I\}$ را یک فرایند تصادفی پیوسته می‌نامند. به عبارت دیگر اگر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد یک فرایند تصادفی، تابع اندازه‌پذیر $X(t, \omega)$ است که روی فضای $I \times \Omega$ تعریف شده به گونه‌ای که $X : (t, \omega) \longmapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$ ، به‌ویژه

---

[۳] Probability measure

[۴] Probability space

[۵] Random variable

[۶] Stochastic process

[۷] Stochastic sequence

۱) به‌ازای هر $t \in I$ ، $X(t,\cdot)$ یک متغیرتصادفی است.

۲) به‌ازای هر $\omega \in \Omega$ ، $X(\cdot,\omega) : I \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر است که تابع نمونه‌ای یا مسیر نمونه ای [۸] یا مسیر [۹] نامیده می‌شود.

برد متغیر تصادفی X را فضای حالت [۱۰] و برای $\omega \in \Omega$ مقدار $X(t,\omega)$ را وضعیت در زمان t می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱ الف) دنباله $\{X_n\}$ را با احتمال یک [۱۱] $(\omega.p.۱)$ همگرا به متغیر تصادفی X می‌نامند هرگاه

$$P(\{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = ۰\}) = ۱ \quad .$$

به این همگرایی، همگرایی تقریباً با قطعیت$(a.s)$ [۱۲] نیز می‌گویند.

ب) دنباله $\{X_n\}$ در میانگین توان دوم [۱۳] همگرا به متغیر تصادفی X است هر گاه $E(X^۲) < \infty$ و به ازای هر $n = ۱, ۲, \ldots$ که $E(X_n^۲) < \infty$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^۲] = ۰ \quad .$$

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید Σ فضای حالتهای فرایند تصادفی $\{X_t; t \in I\}$ باشد که روی فضای احتمال (Ω, F, P) تعریف شده است، در این‌صورت، X_t را یک فرایندمارکوف [۱۴] می‌نامند اگر به ازای هر مجموعه‌ی بورل $B \in \mathcal{B}(\Sigma)$ و هر t_i در I به گونه‌ای که $t_۰ \le t_۱ \le t_۲ \le \ldots \le t_n \le t$ و وضعیت‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in \Sigma$ داشته باشیم

$$P\left[X_t \in B | X_{t_۱} = x_۱, X_{t_۲} = x_۲, \ldots, X_{t_n} = x_n\right] = P\left[X_t \in B | X_{t_n} = x_n\right] \ .$$

تعریف ۷.۱.۱ احتمال انتقال [۱۵] فرایند مارکوف $\{X_t; t \in I\}$ برای $t \le s$ و $s, t \in I$ و برای $x \in \Sigma$

[۸] Sample path

[۹] Trajectory

[۱۰] State space

[۱۱] With probability one

[۱۲] Almost surely

[۱۳] In mean square

[۱۴] Markov process

[۱۵] Transition probability

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\widehat{P}(t,x,s,B) = P(X_s \in B | X_t = x), \qquad \forall B \in B(\Sigma), \qquad \omega.P.۱ \quad .$$

به‌ویژه برای s,t,B ثابت، $\widehat{P}(t,.,s,B)$، $\mathcal{B}(\Sigma)$- اندازه‌پذیر است و برای x,s,t ثابت، $\widehat{P}(t,x,s,.)$ یک اندازه احتمال است. به‌علاوه برابری چپمن - کولموگروف [۱۶] برای $s,t,r \in I, t < r < s$ به صورت زیر برقرار است

$$\widehat{P}(t,x,s,B) = \int_{\Sigma} \widehat{P}(r,y,s,B)\widehat{P}(t,x,r,dy), \qquad \omega.p.۱ \quad .$$

تعریف ۸.۱.۱ فرایند مارکوف $\{X_t; t \in I\}$ یک فرایند مانا (ایستا) [۱۷] است اگر

$$\widehat{P}(t+u,x,s+u,B) = \widehat{P}(t,x,s,B) \quad .$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید $\Sigma = \mathbb{R}^n$، فرایند مارکوف را یک فرایند پخش [۱۸] n−بعدی گویند اگر:

۱) به ازای هر $\varepsilon > ۰$،

$$\lim_{h \to ۰^+} h^{-۱} \int_{|x-y| > \varepsilon} \widehat{P}(t,x,t+h,dy) = ۰ \quad .$$

۲) توابع حقیقی $a_{ij}(t,x)$, $f_i(t,x)$, $i\ ,\ j\ =\ ۱,۲,\ldots,\ n$ وجود دارند به گونه‌ای که برای هر $\varepsilon > ۰$،

$$\lim_{h \to ۰^+} h^{-۱} \int_{|x-y| \le \varepsilon} (y_i - x_i)\widehat{P}(t,x,t+h,dy) = f_i(t,x)$$
$$\lim_{h \to ۰^+} h^{-۱} \int_{|x-y| \le \varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\widehat{P}(t,x,t+h,dy) = a_{i,j}(t,x) \quad .$$

این حدود به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $t \in I$ برقرارند. تابع برداری $f = (f_۱,\ldots,f_n)$ را ضریب انحراف موضعی [۱۹] و تابع ماتریس - مقدار $a = (a_{i,j})$ را ماتریس کوواریانس موضعی [۲۰] می‌گویند.

[۱۶] Chapman-Kolmogrov

[۱۷] Stationary process

[۱۸] Diffusion process

[۱۹] Local drift coefficient

[۲۰] Local covariance matrix

تعریف ۱۰.۱.۱ فرایند تصادفی $W(t,\omega)$ را حرکت براونی استاندارد [۲۱] می‌نامند اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) $P\{\omega; W(\cdot,\omega)=\cdot\}=۱$,

۲) به‌ازای هر $\cdot \leq s \leq t$ متغیر تصادفی $W_t - W_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $(t-s)$ باشد یعنی به‌ازای هر $a<b$ ،

$$P\{a \leq W_t - W_s \leq b\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi(t-s)}}\int_a^b exp\{\frac{-x^۲}{۲(t-s)}\}dx \quad .$$

۳) $W(t,\omega)$ دارای نموهای مستقل باشد یعنی به‌ازای هر $t_\cdot \leq t_۱ < t_۲ < \ldots < t_n$ متغیرهای تصادفی $W_{t_۱}, W_{t_۲}-W_{t_۱}, \ldots, W_{t_n}-W_{t_{n-۱}}$ مستقل باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱ الف) فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$ را در نظر بگیرید. خانواده‌ای از σ -جبرهای صعودی یعنی اگر $s \leq t$ آنگاه $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ را یک فیلتر [۲۲] می‌نامند.

ب) اگر $\{W_t\}$ یک فرایند وینر باشد آن‌گاه σ -جبر تولید شده توسط $\{W_t\}$ برای تمام t ها به‌صورت $F_t = \sigma(W_s; s \leq t)$ را فیلتر استاندارد می‌گویند.

ج) یک فضای احتمال فیلتردار [۲۳] ، فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$ به همراه فیلتر $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ است به‌گونه‌ای که $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\infty$. ($\mathcal{F}_\infty$ کوچکترین σ -جبر روی Ω است که هر پیشامد $\mathcal{F}_t$ را شامل می‌شود.)

د) فیلتر $\{\mathcal{F}_t; t \in [\cdot,\infty]\}$ از راست پیوسته [۲۴] است اگر در شرط

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \qquad \forall t \in [\cdot,\infty]$$

صدق کند.

تعریف ۱۲.۱.۱ الف) فرایند تصادفی $\{X_t; t \in I\}$ را سازگار با فیلتر $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ می‌گویند اگر به‌ازای هر t، متغیر تصادفی X_t، $\mathcal{F}_t$ -اندازه پذیر باشد.

ب) تابع $\sigma(t,\omega) : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ سازگار [۲۵] است اگر به‌ازای هر t ، $\sigma(t,\omega)$ $\mathcal{F}_t$ -اندازه‌پذیر باشد.

[۲۱] Stand'ard Brownian motion

[۲۲] Filtration

[۲۳] Filtered probability space

[۲۴] Right continuous

[۲۵] Nonanticipating

تعریف ۱۳.۱.۱ گیریم فیلتر $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$ داده شده باشد، متغیر تصادفی $\tau:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}\bigcup\{+\infty\}$ را یک $\mathcal{F}_n$ -زمان توقف [۲۶] می‌نامند اگر برای هر $n\geqslant ۱$ ،$\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n$.

به عبارت دیگر تعریف برای زمان توقف به‌صورت زیر است. تابع $\tau:\Omega\longrightarrow[۰,\infty]$ را یک زمان توقف پیوسته نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant ۰}$ می‌نامند اگر

$$\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)=t\}\in\mathcal{F}_t^+,\qquad \forall t\in[۰,\infty]$$

۲.۱ انتگرال تصادفی و لم ایتو

معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}=\mu(t,x)\quad, \tag{۱-۱}$$

این معادله می‌تواند به فرم دیفرانسیلی زیر بیان شود

$$dx=\mu(t,x)dt\quad, \tag{۲-۱}$$

می‌توانیم معادله دیفرانسیل بالا را به معادله دیفرانسیل تصادفی [۲۷] توسیع دهیم

$$dx=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t,x(t))dW_t\quad, \tag{۳-۱}$$

که W_t فرایند وینر است. معادله‌ی بالا را نمی‌توان به فرم معادله $(۱-۱)$ نوشت چون $\frac{dW_t}{dt}$ تعریف نشده است. معادله‌ی دیفرانسیل را می‌توان به فرم معادله‌ی انتگرال نوشت برای معادله‌ی $(۱-۱)$ داریم

$$x_(t)=x_(t_۰)+\int_{t_۰}^{t}\mu(s,x)ds\quad, \tag{۴-۱}$$

به‌طور مشابه معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی را می‌توان به فرم معادله‌ی انتگرال نوشت

$$X_t=X_{t_۰}+\int_{t_۰}^{t}\mu(s,X_s)ds+\int_{t_۰}^{t}\sigma(s,X_s)dW_s\quad. \tag{۵-۱}$$

انتگرال دوم در $(۱-۵)$ یک انتگرال ریمان یا لبگ معمولی نیست زیرا شرط لازم برای وجود انتگرال ریمان -اشتیل‌یس $\int_a^b f d\alpha$ این است که α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد.

---

[۲۶] Stopping time

[۲۷] Stochastic Differential Equation (SDE)

۱.۲.۱ انتگرال تصادفی ایتو

برای $0 < T < \infty$ تعریف می‌کنیم کلاس $\mathcal{L}_T^2$ از توابع $f : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) f، $\mathcal{L} \times \mathcal{F}$ -اندازه‌پذیر باشد که L، σ -جبر زیر مجموعه‌های لبگ از $\mathbb{R}$ است.

۲) $\int_0^T E(f(t,.)^2)dt < \infty$.

۳) $E(f(t,.)^2)dt < \infty$.

۴) $f(t,.)$ ، $\mathcal{F}_t$ -اندازه‌پذیر باشد.

سپس با نرم $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T E(f(t,.)^2)dt}$، $\mathcal{L}_T^2$ فضای خطی نرم‌دار کامل است یعنی یک فضای باناخ است به این شرط که توابعی که فقط روی مجموعه‌های با اندازه‌های صفر با هم متفاوت هستند را یکسان در نظر بگیریم (در حقیقت یک فضای هیلبرت است).

تعریف ۱.۲.۱ تابع $f(t,\omega)$ تابع پله‌ای (فرایند ساده) نامیده می‌شود اگر افراز $t_0 < t_1 < \ldots < T$ از $[t_0, T]$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که به ازای هر $t \in [t_i, t_{i+1}]$ که $i = 1, \ldots, n-1, f(t,\omega) = f(t_i, \omega)$.

فرض کنید S_T^2 زیر مجموعه تمام توابع پله‌ای در $\mathcal{L}_T^2$ باشد. سپس می‌توانیم هر تابع در $\mathcal{L}_T^2$ را با توابع پله‌ای در S_T^2 تقریب بزنیم.

لم ۲.۲.۱ برای هر $f(t,\omega) \in \mathcal{L}_T^2$، دنباله‌ای از توابع پله‌ای در S_T^2 وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_{t_0}^{T} |f_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 dt\right] = 0 \quad .$$

و وقتی $n \to \infty$ ، در میانگین توان دوم $\int_{t_0}^T f_n(t,\omega)dW_t \longrightarrow \int_{t_0}^T f(t,\omega)dW_t$

تعریف ۳.۲.۱ انتگرال ایتو تابع پله‌ای سازگار $f(t,\omega)$ روی بازه $[0, T]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(f) = \int_{t_0}^{T} f(t,\omega)dW_t = \sum_{i=0}^{T} f(t_i,\omega)[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] \quad .$$

لم ۴.۲.۱ برای هر $f, g \in S_T^2$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم:

۱) $I(f)$، $\mathcal{F}_t$ -اندازه‌پذیر است.

۲) $E(I(f)) = 0$.

۳) $E(I(f)^2) = \int_0^T E(f(t,.)^2)dt$.

۴) $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \quad , \qquad \omega.p.1$

لم ۵.۲.۱ فرض کنید $U : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، مشتقات جزیی $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial U}{\partial t}$ پیوسته داشته باشد. سپس برای هر $t, t+\Delta t \in [0,T]$ و $x, x+\Delta x \in R$ ثابت‌های $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$U(t+\Delta t, x+\Delta x) - U(t,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(t+\alpha\Delta t, x)\Delta t + \frac{\partial U}{\partial x}(t,x)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x+\beta\Delta x)(\Delta x)^2 \quad .$$

قضیه ۶.۲.۱ (فرمول ایتو:) فرض کنید $Y_t = U(t, X_t)$ برای هر $0 \leq t \leq T$ که U در لم (۵.۲.۱) بیان شده است و X_t در (SDE) بالا صدق می‌کند و $\sqrt{|e|} \in \mathcal{L}_T^\omega$ ، f سپس به ازای هر $0 \leq s \leq t \leq T$ با احتمال یک داریم

$$Y_t - Y_s = \int_s^t \{\frac{\partial U}{\partial t}(u, X_u) + e(u,\omega)\frac{\partial U}{\partial x}(u, X_u) + \frac{1}{2}f^2(u,\omega)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(u, X_u)\}du + \int_s^t f(u,\omega)\frac{\partial U}{\partial x}(u, X_u)dW_u.$$

تعریف ۷.۲.۱ خانواده‌ی $\{ X_t, \mathcal{F}_t \}$ رایک مارتینگل گوئیم، هرگاه

الف): برای هر $t \in T \quad , \quad X_t$ انتگرالپذیر باشد ،یعنی $E(| X_t |) < \infty$

ب): برای هر $s \leq t \quad , \quad a.s \quad E(X_t \mid \mathcal{F}_t) = X_s$

تعریف ۸.۲.۱ انتگرال ایتو $\int_{t_0}^t \sigma(u,\omega)dW_u$ را در نظر بگیرید که $\sigma(u,\omega) \in \mathcal{L}_T^2$، فرایند X_t را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X_t = \int_{t_0}^t \sigma(u,\omega)dW_u$$

فرایند $\{X_t\}$، تولید شده توسط انتگرال ایتو، مارتینگل [۲۸] است اگر برای هر $t_۰ \leq s \leq t \leq T$ داشته باشیم

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \qquad \omega.p.۱.$$

۲.۲.۱ انتگرال‌های ایتو برداری مقدار

فرض کنید $W = \{W_t, t \geqslant ۰\}$ فرایند وینر m-بعدی با مؤلفه‌های مستقل مربوط به خانواده‌ی صعودی از σ-جبرهای $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant ۰\}$ باشد. یعنی $W_t = (W_t^۱, W_t^۲, \ldots, W_t^m)$ که $W_t^j, j = ۱, \ldots, m$ ، فرایندهای وینر اسکالر نسبت به $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant ۰\}$ هستند و دو به دو مستقل هستند. بنابراین هر W_t^j، $\mathcal{F}_t$-اندازه‌پذیر است با

$$E(W_t^j|\mathcal{F}_۰) = ۰, \qquad E(W_t^j - W_s^j|\mathcal{F}_s) = ۰,$$

با احتمال یک، به ازای هر $۰ \leq s \leq t$ و $j = ۱, \ldots, m$. به علاوه

$$E((W_t^i - W_t^i)(W_t^j - W_t^j)|\mathcal{F}_s) = (t-s)\delta_{ij},$$

با احتمال یک، به ازای هر $۰ \leq s \leq t$ و $i, j = ۱, \ldots, m$، که δ_{ij} دلتای کرونکر [۲۹] است.

توابع برداری d-برداری $e : [۰, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ با مؤلفه‌های e^k که $\sqrt{|e^k|} \in \mathcal{L}_T^\omega$ برای $k = ۱, ۲, \ldots, d$ و توابع $d \times m$-ماتریسی $F : [۰, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times m}$ با مؤلفه‌های $F^{ij} \in \mathcal{L}_T^\omega$ یا $F^{ij} \in \mathcal{L}_T^۲$ برای $i = ۱, ۲, \ldots, d$ و $j = ۱, ۲, \ldots, m$ را در نظر بگیرید. دیفرانسیل تصادفی آن به‌صورت زیر است

$$dX_t = e(t,\omega)du + F(t,\omega)dW_u, \tag{۱-۶}$$

در نتیجه داریم

$$X_t - X_s = \int_s^t e(u,\omega)du + \int_s^t F(u,\omega)dW_u.$$

برای هر کدام از مؤلفه‌ها، انتگرال تصادفی به‌صورت زیر است : برای هر $t_۰ \leq s \leq t \leq T$ و با احتمال یک

$$X_t^k - X_s^k = \int_s^t e^k(u,\omega)du + \sum_{j=۱}^m \int_s^t F^{kj}(u,\omega)dW_u^j.$$

[۲۸] Martingale

[۲۹] Kronecker delta

نتیجه ۹.۲.۱ فرض کنید $U : [\text{۰}, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ مشتقات جزئی $\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x^k}$ و $\frac{\partial^{\text{۲}} U}{\partial x^k \partial x^i}$ برای $k, i = \text{۱}, \text{۲}, \dots, d$ دارد و فرایند اسکالر $\{Y_t, \text{۰} \leq t \leq T\}$ به‌صورت $Y_t = U(t, X_t) = U(t, X_t^{\text{۱}}, \dots, X_t^d)$ با احتمال یک تعریف می‌کنیم که X_t در (۷.۲.۱) صدق می‌کند، سپس دیفرانسیل تصادفی برای Y_t به‌صورت زیر است

$$dY = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=\text{۱}}^{d} e^k(t,\omega)\frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\sum_{j=\text{۱}}^{m}\sum_{k,i=\text{۱}}^{d} F^{ij}(t,\omega)F^{kj}(t,\omega)\frac{\partial^{\text{۲}} U}{\partial x^k \partial x^i}dt +$$
$$\sum_{j=\text{۱}}^{m}\sum_{i=\text{۱}}^{d} F^{ij}(t,\omega)\frac{\partial U}{\partial x^i}dW_t^j.$$

در واقع فرمول بالا فرم برداری فرمول ایتو است. در بخش‌های بعدی برای به‌دست آوردن جواب معادله حرکت که یک SDE است، از فرمول ایتو استفاده می‌کنیم.

۳.۲.۱ فرایندهای پخش مارکوف روی $\mathbb{R}^n$

در نظریه‌ی احتمال، اغلب فرایند پخش را به‌عنوان جوابی از معادله دیفرانسیل تصادفی معرفی می‌کنند. تعریف فرایند پخش را در نظر بگیرید و فرض کنید $t_{\text{۰}} \leq t \leq t_{\text{۱}}$ و $\overline{Q}_{\text{۰}} = [t_{\text{۰}}, t_{\text{۱}}] \times \mathbb{R}^n$،

$$dx = f(s, x(s))ds + \sigma(s, x(s))dw(s) \quad , \quad t \leq s \leq t_{\text{۱}} \tag{۷-۱}$$

به‌گونه‌ای که $\sigma(t, x)$ یک تابع $n \times d$ -ماتریس مقدار و $w(s)$ حرکت براونی استاندارد$-d$بعدی روی بازه $I = [t, t_{\text{۱}}]$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $\forall i, j = \text{۱}, \cdots, n$ $a_{ij} = \sum_{l=\text{۱}}^{n} \sigma_{il}\sigma_{jl},$ یا $a = \sigma\sigma'$.

اکنون نیاز داریم برای انحراف موضعی f و کوواریانس موضعی a شرایطی رابیان کنیم به‌گونه‌ای که فرایند پخش n - بعدی $x(s)$ را نتیجه دهد. برای این منظور، فرض کنید توابع f_i و σ_{ij} روی $\overline{Q}_{\text{۰}}$ پیوسته‌اند و در شرایط زیر صدق می‌کنند.

۱) شرط رشد: M ای وجود دارد که برای تمام $(s, x) \in \overline{Q}_{\text{۰}}$،

$$|f(s, x)| \leq M(\text{۱} + |x|)$$

۲) شرط لیپ‌شیتز موضعی: به‌ازای هر a ، K_a وجود دارد به گونه‌ای که برای $|x| \leq a$ و $|y| \leq a$،

$$|f(s, x) - f(s, y)| \leq K_a|x - y|,$$