دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

عنوان:

حل مسائل حساب تغییرات با استفاده از روش‌های شبه‌طیفی

دانشجو:
ابوبکر آدربار

استاد راهنما:
دکتر امجد علی‌پناه

استاد مشاور:
دکتر مراد احمد نسب

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

اسفند ماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

پدر، مادر و همسر عزیزم

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایـج مطالعات،

ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع

این پایان‌نامه (رسـاله) متعلق به دانشـگاه کردستان است.

تعهد نامه

اینجانب ابوبکر آدربار دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشگاه کردستان، دانشکده علوم گروه ریاضی تعهد می‌نمایم که محتوای این پایان‌نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

ابوبکر آدربار

۱۳۸۹/۱۲/۱۷

قدردانی و تشکر

خداوند بزرگ را شکر می گویم که در سایه ی لطف و رحمتش توانستم این پایان نامه را به پایان برسانم. در نگارش این پایان نامه استادانی گرانمایه و دوستانی چند دخیل بودند و من وظیفه خود می دانم که از همه این عزیزان قدردانی و سپاسگزاری نمایم. از جمله آقای دکتر امجد علی پناه استاد راهنمایم که در طول این دوره زحمات بسیاری کشیده اند و نیز از آقایان دکتر مراد احمد نسب، دکتر کمال شانظری و دکتر فردین ساعدپناه که در دوره کارشناسی ارشد از راهنمایی های ارزنده این عزیزان بهره گرفتم.

همچنین از دوستان عزیزم آقایان فرزاد منصوری، وریا رشیدی، محمدمهدی نیک مهر، فردین حسین پناهی و خانم ها شهلا ایزدی، فاطمه بابالو، الهام فیلی، مریم نیازی و تمامی عزیزانی که در این مسیر مرا یاری نمودند، تقدیر و تشکر می نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه، دسته‌ای از روش‌های عددی برای حل مسائل حساب تغییرات بر پایه روش‌های شبه‌طیفی کلاسیک و غیرکلاسیک ارائه می‌شود. مزیت روش غیرکلاسیک آن است که تابع‌های وزن اختیاری برای تولید چندجمله‌ایهای متعامد استفاده می‌شوند و دامنه‌ای بزرگتری برای نقاط هم‌مکانی و ماتریس‌های مشتق را ممکن می‌سازند. به وسیله مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی یک ماتریس سه‌قطری متناظر چندجمله‌ایهای متعامد، گره‌ها (نقاط هم‌مکانی) و وزن‌های انتگرال‌گیری عددی گاوس ارائه می‌شوند. روش‌های شبه‌طیفی نیز به صورت دو دسته کلاسیک و غیرکلاسیک ارائه می‌شوند. همچنین در ادامه نتایج عددی برای حل چند مسئله حساب تغییرات آورده شده و به طور ضمنی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

واژه‌های کلیدی: *حساب تغییرات، روش‌های شبه‌طیفی، چندجمله‌ایهای متعامد، روش غیرکلاسیک، نقاط هم‌مکانی و ماتریس مشتق .*

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

با گذر زمان و با پیشرفت علوم مختلف، مسائل مختلف و پیچیده‌ای بوجود می‌آیند، که برای حل آنها نیز تلاش‌های زیادی می‌شود. این تلاش‌ها باعث بوجود آمدن روش‌های نو و بهبود روش‌های قبلی می‌شود. روش‌های عددی برای حل مسائل مختلف در علوم مختلف، همیشه مهم و مورد توجه بوده‌اند. مهمتر این که مردم اکنون قادرند پدیده‌های علمی را که در گذشته مطالعه و درک آنها خیلی سخت بود، بهتر درک کنند. امروزه اکثر مسائل علوم و مهندسی را با توجه به پیچیدگی مدل مربوطه با روش‌های عددی حل می‌کنند. تقریب تابع، یکی از مهمترین مسائل در زمینه ریاضیات کاربردی و مهندسی می‌باشد. این تقریب باید به گونه‌ای باشد که با حجم عملیات کمتر، به دقت خوبی برسد.

یکی از موضوعات مهم در علوم ریاضی، مهندسی و فیزیک حساب تغییرات[۱] می‌باشد، که دارای تاریخچه‌ای طولانی است. حساب تغییرات در جستجوی یافتن مجموعه‌ای از مسیرها، خم‌ها و خمینه‌ها است که به عنوان توابعی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای اکسترمم هستند (اغلب در مسائل فیزیکی از آن به عنوان کمینه و بیشینه نیز یاد می‌شود). مسئله‌ی کوتاهترین خم زمانی[۲] توسط یوهان برنولی در سال ۱۶۹۶ مطرح شد که در آن زمان، ذهن ریاضیدانانی مشهور از اروپا، همچون نیوتون، لایب‌نیتز، یاکوب برنولی، هود و فاتیو را به خود مشغول کرد. از آن زمان به بعد حساب تغییرات به عنوان دستگاه ریاضی خاصی توسعه یافته است. عمده‌ترین انگیزه‌های ابداع و گسترش حساب تغییرات را می‌توان نیازهای تدریجی مکانیک کلاسیک به کشاندن مشکلات محاسباتی از حوزه مشتق‌ها و حل معادلات دیفرانسیل به حوزه انتگرال‌ها و بهینه‌سازی ذکر نمود. می‌توان مسائل حساب تغییرات را با روش‌های حل کرد که به یک معادله دیفرانسیلی به نام اویلر-لاگرانژ منجر شوند و سپس جواب معادله دیفرانسیل جواب مسئله حساب تغییرات می‌باشد. اما در اکثر موارد این روش‌ها پیچیده و مشکل هستند، به همین دلیل روش‌های مستقیمی ابداع شده‌اند که در آنها از روش‌های عددی استفاده می‌شود

[۱] Calculus of variations
[۲] Brachistochrone problem

و نیازی به حل معادله دیفرانسیل نیست [۱]. روش‌های طیفی[۳] یکی از روش‌های عددی می‌باشند که برای حل مسائل حساب تغییرات استفاده می‌شوند. روش‌های طیفی، خانواده‌ای بزرگ از روش‌ها برای حل معادلات عملگری می‌باشند که در چند دهه اخیر به طور وسیعی گسترش یافته‌اند. این روش‌ها برای حل مسائل علوم و مهندسی بسیار کارا و موثر می‌باشند. روش‌های هم‌مکانی در سال۱۹۳۴ توسط کانتوروویچ[۴] و سلاتر[۵] برای کاربردهای خاصی استفاده شده‌اند. اولین الگوریتم‌های مربوط به روش‌های طیفی در سال ۱۹۳۸ به وسیله لانزوس[۶] ارائه شدند [۲]. در دهه ۱۹۷۰ توسط ارزاگ[۷] این روش‌ها مشهور شدند، زیرا به سادگی برای ضرایب متغیر و مسائل غیرخطی قابل اعمال بودند. دهه ۱۹۸۰ برای توسعه روش‌های طیفی فوق‌العاده مفید بوده است. در سال ۱۹۸۱ مرسیر[۸] در رساله‌ای نقش نقاط کوادراتور گاوسی برای چندجمله‌ایهای متعامد را به صورت نقاط هم‌مکانی برای روش‌های طیفی توسعه داد. در این دهه آنالیز پایداری و همگرایی برای رویکردهای مختلف به دست آمد، در حقیقت راهی برای استفاده از تکنیک‌های آنالیزی تابعک در مسائل پیچیده و به دست آوردن نتایج دقیق‌تر ایجاد شد. کتاب بوید[۹] در سال‌های ۱۹۸۹ و ۲۰۰۱ شامل جزئیات با ارزش از الگوریتم‌های طیفی می‌باشد، به خصوص مرجع خوبی برای مسائلی با دامنه‌های غیرکراندار در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی می‌باشد. فونارو[۱۰] در سال ۱۹۹۲ و گیو[۱۱] در سال ۱۹۹۸ تقریب معادلات دیفرانسیل را با استفاده از بسط چندجمله‌ایها، مورد بحث قرار دادند. در سال ۲۰۰۱ گوتلیب[۱۲] و هست‌هاون[۱۳] کاربردهای روش‌های طیفی برای معادلات هذلولوی مرتبه اول را معرفی کردند. در سال ۲۰۰۲ کوهن[۱۴] کتاب کاربرد روش‌های طیفی برای معادلات موج را نوشت [۲]. در روش‌های طیفی عملگرهای توصیف‌کننده، سیستم را با استفاده از پایه‌های همچون

- فوریه
- انواع چندجمله‌ایهای متعامد و غیرمتعامد
- توابع قطعه‌ای پیوسته

[۳] Spectral methods
[۴] Kantorovic
[۵] Slater
[۶] Lanczos
[۷] Orzag
[۸] Mercier
[۹] Boyd
[۱۰] Funaro
[۱۱] Guo
[۱۲] Gottlieb
[۱۳] Hesthaven
[۱۴] Cohen

• موجک‌ها

به یک دستگاه معادلات جبری خطی و غیرخطی تبدیل کرده سپس با روش‌های مناسبی دستگاه را حل می‌کنند [۲، ۳]. پایه‌هایی که برای روش‌های طیفی استفاده می‌شوند را می‌توان به دو گروه پایه‌های متعامد و غیرمتعامد تقسیم کرد. برای گروه پایه‌های متعامد می‌توان از دسته‌های چندجمله‌ایهای متعامد [۴، ۵]، توابع مثلثاتی، موجک‌های متعامد و توابع قطعه‌ای پیوسته(بلاک-پالس [۶]، والش [۷]، پایه‌های ترکیبی [۸]، هار [۹] و ...)، یاد کرد [۴۹]. برای پایه‌های غیرمتعامد می‌توان به چندجمله‌ایهای درونیاب، موجک‌ها، پایه‌های RBF[۱۵]، اسپلاین‌ها اشاره کرد [۵۰]. روش‌های طیفی با روش‌های مختلف ارائه و مورد استفاده قرار گرفته‌اند به عنوان مثال می‌توان به روش‌های زیر اشاره کرد [۱۰].

• گالرکین[۱۶]

• تاو[۱۷]

• هم‌مکانی(هم‌محلی)[۱۸].

روش گالرکین: این روش برای اولین بار توسط گالرکین در سال ۱۹۱۵ معرفی شده [۲] و بیشتر در روش عناصر متناهی[۱۹] به کار می‌رود [۵۰].

روش تاو: در حقیقت این روش تغییریافته روش گالرکین است که در آن پایه‌ها به طریقی ساخته می‌شوند که در شرایط مرزی عملگرها صدق کنند [۲]. کاربرد این روش بیشتر در مسائل خطی با ضرایب ثابت می‌باشد [۵۰].

روش هم‌مکانی: در مرجع [۱۱] برای اولین بار روش‌های شبه‌طیفی[۲۰] برای مسائل مشتقات جزئی به کار برده شده است. همچنین ارزاگ از این روش‌ها به طور وسیعی استفاده کرده است. در اوایل این روش‌ها را روش‌های هم‌مکانی می‌گفتند اما ارزاگ این روش‌ها را روش‌های شبه‌طیفی نامید [۲]. این روش‌ها دارای دقت بسیار بالا بوده و به سادگی برای مسائل مختلف قابل اعمال می‌باشند. از دیگر ویژگی‌های این روش‌ها این است که، در پیاده‌سازی کامپیوتری ساده و پایدارند. روش‌های طیفی مدام در حال توسعه هستند، در مرجع [۱۲] روش طیفی دیگری با نام شبه-شبه-طیفی [۲۱] ارائه شده است که قابل رقابت با روش‌های دیگر می‌باشد.

در این پایان‌نامه، چندجمله‌ایهای متعامد، مسائل حساب تغییرات و روش‌های شبه‌طیفی را معرفی می‌کنیم.

---

۱۵ Radial Bases Function

۱۶ Galerkin

۱۷ Tau

۱۸ Collocation

۱۹ Finite element methods

۲۰ Pseudospectral methods

۲۱ Pseudo-Pseudospectral methods

در ادامه به وسیله مقادیر ضرایب رابطه‌ی بازگشتی برای چندجمله‌ایهای متعامد ماتریس سه‌قطری ژاکوبی را تعیین می‌کنیم و از مقادیر ویژه آن و بردارهای ویژه‌ی متناظر، گره‌های گاوس-لوباتو و وزن‌های آن را به دست می‌آوریم. همچنین مسائل حساب تغییرات را با استفاده از روش‌های شبه‌طیفی حل می‌کنیم و نتایج عددی را به صورت ضمنی ارائه می‌دهیم.

فصل اول، شامل تعاریف و مقدمات مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌باشد.

در فصل دوم، ابتدا به ارائه مفاهیم، تعاریف، روش‌های تولید و خواص چندجمله‌ایهای متعامد و قضایای مربوطه می‌پردازیم و سپس ارتباط بین چندجمله‌ایهای متعامد و انتگرال‌گیری عددی گاوس را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم، ابتدا به مفاهیم، تعاریف و قضایایی در مورد حساب تغییرات می‌پردازیم و معادله اویلر-لاگرانژ را معرفی می‌نمایم، سپس چند روش حل عددی مسائل حساب تغییرات را معرفی می‌کنیم.

در فصل چهارم، روش‌های شبه‌طیفی را معرفی کرده و سپس آنها را برای حل عددی چند مسئله حساب تغییرات به کار می‌بریم.

در فصل پنجم، روش‌های شبه‌طیفی غیرکلاسیک را معرفی کرده و سپس آنها را برای حل عددی چند مسئله حساب تغییرات به کار می‌بریم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی فضای ضرب داخلی، فضای نرم‌دار، فضای باناخ، فضای هیلبرت، مجموعه‌های متعامد، بهترین تقریب، بسط توابع در فضای $L^{۲}[a,b]$، عملگرهای خطی و فضای سوبولوف را به اختصار بیان می‌کنیم. برای نوشتن این فصل از مراجع [۲]، [۵۰] و [۵۲] استفاده شده است.

۱.۱ فضای ضرب داخلی

تعریف ۱. هر ضرب داخلی بر فضای برداری حقیقی مانند X، تابعی دو متغیره مانند $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که:

۱) $\langle \cdot,\cdot \rangle$ نسبت به متغیر اول خطی باشد، یعنی به ازای هر $x,y,z \in X$ و هر دو عدد حقیقی α و β $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$.

۲) $\langle \cdot,\cdot \rangle$ متقارن باشد، یعنی به ازای هر $x,y \in X$، $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

۳) به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\langle x,x\rangle \geq ۰$ و $\langle x,x\rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

با توجه به خواص (۱) و (۲) می‌بینیم که هر ضرب داخلی بر یک فضای برداری حقیقی، نسبت به متغیر دوم نیز خطی است. هر فضای برداری حقیقی مجهز به یک ضرب داخلی را یک فضای با ضرب داخلی حقیقی نامیم.

۲.۱ فضای نرم‌دار

تعریف ۲. تابع حقیقی $||\cdot||$ را که روی فضای برداری X تعریف شده است یک نرم نامیم هرگاه در سه ویژگی زیر صدق کند:

۱) به ازای هر $x \in X$، $||x|| \geq 0$، $||x|| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$

۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$

۳) به ازای هر $x, y \in X$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

ویژگی (۳) نابرابری مثلثی نام دارد و هم‌ارز با این گزاره است که به ازای هر $x, y, z \in X$

$$||x - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y||.$$

فضای برداری X مجهز به نرم $||\cdot||$ را یک فضای برداری نرم‌دار یا به اختصار، یک فضای نرم‌دار نامیم. روی فضای برداری نرم‌دار X با استفاده از تابع $d(x, y) = ||x - y||$ متریکی بر حسب نرم تعریف می‌کنیم. با توجه به ویژگی‌های نرم به آسانی می‌بینیم که $d(\cdot, \cdot)$ یک متریک روی X است. این متریک را متریک القایی به وسیله نرم نامیم.

فضای $C[a, b]$، این فضا شامل همه توابع حقیقی پیوسته روی بازه‌ی $[a, b]$ است، این فضا نرم‌دار است و در این فضا چند نرم مختلف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) $||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

۲) $||f||_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

۳) $||f||_\infty = \sup |f(x)|$.

فضای $L^p[a, b]$، برای $1 \leq p < \infty$، شامل همه توابع حقیقی انتگرال‌پذیر لبگ روی بازه‌ی $[a, b]$ است که

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty.$$

این فضا یک فضای نرم‌دار است و نرم آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{۱}{p}}.$$

تعریف ۳. یک دنباله‌ی نامتناهی مانند $\{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$ از فضای برداری X همگرا به $x \in X$ است و آن را با $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ نمایش می‌دهیم اگر

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - x\| = ۰,$$

و دنباله‌ی $\{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$ از فضای برداری X را یک دنباله‌ی کوشی[۱] می‌نامیم هرگاه

$$\lim_{i,j\to\infty} \|x_i - x_j\| = ۰.$$

تعریف ۴. فضای برداری نرم‌دار X را یک فضای باناخ[۲] گویند، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی روی فضای X همگرا باشد. به عنوان مثال می‌توان نشان داد که $L^p[a,b]$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۵. فرض کنید که X فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت نرم تولید شده توسط فضای ضرب داخلی را یک نرم القائی گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall x \in X, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

قضیه ۱.۲.۱. *فرض‌کنیم که X یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه برای هر $x, y \in X$ داریم:*

الف) (نامساوی کوشی - شوارتز) $\quad |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$

ب) (نامساوی مثلثی) $\quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

ج) (قانون متوازی‌الاضلاع) $\quad \|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲\left(\|x\|^۲ + \|y\|^۲\right)$.

تعریف ۶. دو نرم $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$ روی فضای برداری X هم‌ارزند هرگاه ثابت‌های مثبت K و M موجود باشند

[۱] Cauchy sequence
[۲] Banach space

به طوری که به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم که

$$K\|x\|_b \le \|x\|_a \le M\|x\|_b. \tag{۱.۱}$$

قضیه ۲.۲.۱. *همه نرم‌های تعریف شده روی یک فضای برداری متناهی-البعد با هم هم‌ارزند.*

اثبات. بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود فرض کنیم فضای متناهی-البعد مورد بحث، $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنیم $\|\cdot\|_۲$ نرم اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را نشان دهد، یعنی $\|x\|_۲=\left(x_۱^۲+x_۲^۲+\ \cdots+x_n^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$. اگر $\|\cdot\|$ نرم دیگری روی $\mathbb{R}^n$ باشد کافی است ثابت کنیم $\|\cdot\|$ هم‌ارز با $\|\cdot\|_۲$ است. اگر

$$x=\left(x_۱,\ \cdots,x_n\right)=x_۱e_۱+\ \cdots+x_ne_n$$

(که در آن e_i ها بردارهای یکه متعارف هستند)، بنابر نابرابری مثلثی داریم

$$\|x\|=\Big\|\sum_{i=۱}^{n}x_ie_i\Big\|\le\sum_{i=۱}^{n}|x_i|\cdot\|e_i\|\le\Big(\sum_{i=۱}^{n}\|e_i\|\Big).\|x\|_۲,$$

بدین سان، اگر $M=\sum_{i=۱}^{n}\|e_i\|$، آنگاه به ازای هر $x\in\mathbb{R}^n$،

$$\|x\|\le M\|x\|_۲,$$

به این ترتیب نیمی از نابرابری‌های (۱.۱) ثابت می‌شود. به ازای هر $x,y\in X$ نابرابری‌های

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|\le M\|x-y\|_۲,$$

نشان می‌دهند که تابع $x\longrightarrow\|x\|$، از $\mathbb{R}^n$، مجهز به نرم اقلیدسی، در $\mathbb{R}$ (به طور یکنواخت) پیوسته است. فرض کنیم

$$S=\Big\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_۲=۱\Big\},$$

کره یکه برای نرم اقلیدسی باشد. در این صورت بسته و کراندار و در نتیجه، نسبت به نرم فشرده است، پس