دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

قضایای KKM تعمیم‌یافته و قضایای نقطه ثابت مشترک در فضاهای برداری توپولوژیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش آنالیز)

ملیحه حیدرپور

استاد راهنما

دکتر اسکندر نراقی‌راد

مهر ۱۳۹۲

دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش آنالیز) خانم ملیحه حیدرپور

تحت عنوان

قضایای KKM تعمیم‌یافته و قضایای نقطه ثابت مشترک در فضاهای برداری توپولوژیک

در تاریخ ۱۳۹۲/۷/۱۴ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر اسکندر نراقی‌راد (استادیار)
۲– استاد مشاور	دکتر روح‌الله پروینیان زاده (استادیار)
۳– استاد داور خارجی	دکتر بهمن یوسفی (استاد)
۴– استاد داور داخلی	دکتر حمید رضایی (استادیار)

سپاسگزاری

ای هستی‌بخش، وجود مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست. ذره ذره‌ی وجودم برای تو و نزدیک‌شدن به تو می‌تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست‌مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران. حال که توفیق جمع‌آوری و تهیه‌ی این مجموعه را یافته‌ام، بر خود واجب می‌دانم از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری‌شان بهره‌مند گشته‌ام، تشکر و قدردانی کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم. خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه‌ی درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه‌ی آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه‌ی وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم؛ چراکه این دو وجود پس از پروردگار مایه‌ی هستی‌ام بوده‌اند، دستم را گرفتند و راه‌رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب به من آموختند.

در ابتدا صمیمانه‌ترین تقدیرها تقدیم به خانواده‌ی عزیز و مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده‌اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی‌ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیر ممکن بود.

از استاد راهنمای فرزانه‌ام، استاد علم و اخلاق جناب آقای دکتر اسکندر نراقی‌راد که با سعه‌ی صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و با ارائه‌ی نظرات سازنده و رهنمودهای بی‌دریغشان در پیشبرد این پایان‌نامه سعی تمام مبذول داشتند، کمال تشکر را دارم.

از استاد مشاور ارجمند، جناب آقای دکتر روح‌الله پروینیان‌زاده که در طول این تحقیق با رهنمودها و تشویق‌های خود مرا مورد لطف خویش قرار دادند، صمیمانه سپاسگزارم.

از کلیه‌ی اساتید گرانقدر گروه که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم و در محضر این عزیزان لذت آموختن و یادگیری را تجربه کردم، تشکر می‌نمایم.

مراتب سپاس و قدردانی خود را به داوران محترم که زحمت بازخوانی و داوری این مجموعه را به عهده داشتند، تقدیم می‌دارم.

در نهایت از تمامی دوستان و همکلاسی‌های عزیز که در طول این مدت افتخار آشنایی و مصاحبت با آنها را داشتم، به پاس همیاری‌ها و محبت‌های بی‌دریغشان سپاسگزارم.

تقدیم به:

مادرم

دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

پدرم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه ی زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

و همسرم

که وجودش شادی بخش و صفایش مایه ی آرامش من است.

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه، ابتدا قضیه‌ی KKM تعمیم‌یافته را ثابت می‌کنیم و با استفاده از آن، قضیه‌ی شبه‌—KKM تعمیم‌یافته، قضیه‌ی نقطه ثابت مشترک برای یک خانواده از نگاشت‌های چند مقداری و قضیه‌ی نقطه ثابت کاکوتانی—فن—گلیکسبرگ را ثابت کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که قضیه‌ی وجودی برای نقاط ثابت مشترک با قضیه‌ی نقطه ثابت کاکوتانی—فن—گلیکسبرگ معادل است.

مقدمه

در این پایان‌نامه قضایای KKM [۱] تعمیم‌یافته و شبه$-$KKM تعمیم‌یافته را بررسی می‌کنیم و با استفاده از قضیه‌ی KKM تعمیم‌یافته، قضایای نفطه ثابت مشترک زیر را برای یک خانواده از نگاشت‌های چندمقداری مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱$-$CFP [۲] : $\bar{x} \in X$ را طوری بیابید که $\bar{x} \in T(\bar{x}, y)$ برای هر $y \in Y$، که در آن X یک زیرمجموعه‌ی ناتهی و بسته از فضای برداری توپولوژیک هاسدورف E، Y یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه و $T : X \times Y \longmapsto 2^X$ یک نگاشت چندمقداری با مقادیر ناتهی است.

۲$-$CFP: $\bar{x} \in X$ را طوری بیابید که $\bar{x} \in T(\bar{x})$ برای هر $T \in S$، که در آن X زیرمجموعه‌ای ناتهی، محدب و بسته از فضای برداری توپولوژیک هاسدورف E و S خانواده‌ای از نگاشت‌های چندمقداری از X به‌توی X است.

همچنین به مطالعه‌ی قضیه‌ی KKM تعمیم‌یافته برای نگاشت چندمقداری $T : Y \longmapsto 2^X$ می‌پردازیم. به عنوان کاربردهایی از قضیه‌ی KKM تعمیم‌یافته، قضیه‌ی شبه$-$KKM تعمیم‌یافته، قضایای نقطه ثابت مشترک برای یک خانواده از نگاشت‌های چندمقداری و قضیه‌ی نقطه ثابت کاکوتانی$-$فن$-$گلیکسبرگ [۳] [۱۴و۱۲] را بررسی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که قضیه‌ی وجودی برای نقاط ثابت مشترک با قضیه‌ی نقطه ثابت کاکوتانی$-$فن$-$گلیکسبرگ معادل است.

باید توجه داشت که این نتایج روی قضایای نقطه ثابت مشترک برای یک خانواده از نگاشت‌های چندمقداری، قضایای نقطه ثابت مشترک [۳و۱] و هر قضیه‌ی ثابت مشترک در مجموعه قضایای موجود متفاوت‌اند.

در این پایان‌نامه، با استفاده از مرجع [۱۸]، Y مجموعه‌ای دلخواه و X یک زیرمجموعه‌ی ناتهی و بسته از فضای برداری توپولوژیک E بوده و Y یک زیرمجموعه از E فرض نشده است. همچنین تمام فضاهای برداری توپولوژیک، هاسدورف فرض شده‌اند.

---

[۱] Knaster-Kuratowski-MazurKiewicz

[۲] Common Fixed Point

[۳] Kokutani-Fan-Glicksberg

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا تاریخچه‌ای از مطالعات و تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی نقطه ثابت، قضایای KKM تعمیم‌یافته و قضایای نقطه ثابت مشترک را بیان می‌کنیم. پس از آن به بیان تعاریف و مثال‌های اولیه که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند، می‌پردازیم.

۱—۱ تاریخچه

نگاشت KKM: فرض کنید X زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای برداری توپولوژیک E باشد. آنگاه نگاشت چندمقداری $T : X \longmapsto ۲^E$، KKM نامیده می‌شود اگر

$$\mathrm{Co}\{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\} \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} T(x_i)$$

برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$ از X.

قضیه‌ی KKM: فرض کنید X زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای برداری توپولوژیک هاسدورف E باشد و $T : X \longmapsto ۲^E$ نگاشت KKM با مقادیر ناتهی و بسته باشد. اگر به‌ازای $x_\circ \in X$، $T(x_\circ)$

فشرده باشد، آنگاه

$$\bigcap_{x\in X} T(x) \neq \emptyset.$$

از گذشته تا کنون مؤلفان متعددی به مطالعه‌ی قضیه‌ی KKM و کاربردهای آن پرداختند [۴, ۱۷].
قضیه‌ی KKM در فضای با بعد متناهی توسط کوراتسکی[۱] و همکارانش [۱۵] در سال ۱۹۲۹ مورد مطالعه قرار گرفت.
در سال ۱۹۶۱، فن[۲] [۱۱] قضیه‌ی KKM تعمیم‌یافته در فضاهای برداری توپولوژیک با بعد نامتناهی را ثابت کرد. در سال ۱۹۹۱ چنگ[۳] و ژنگ[۴] [۷] بعضی از کاربردهای قضایای KKM تعمیم‌یافته را در فضای برداری توپولوژیک هاسدورف ارائه دادند. پس از آن قضیه‌ی KKM و کاربردهای آن در فضای متریک ابرمحدب توسط کرک[۵] و همکارانش [۱۶] در سال ۲۰۰۰ ثابت گردید. کاربردهای دیگری از این قضیه در مراجع [۸ − ۶] آمده است.
در سال ۲۰۰۹ اگرول[۶] و همکارانش [۱] مفهوم یک خانواده از نگاشت‌های چندمقداری کوراتسکی (KKM) نسبت به خانواده‌ی دیگر از نگاشت‌های چندمقداری را معرفی کردند و چندین قضیه‌ی نقطه ثابت مشترک در فضاهای برداری توپولوژیک هاسدورف موضعاً محدب با مفهوم یک خانواده از نگاشت‌های چندمقداری KKM نسبت به خانواده‌ی دیگر از نگاشت‌های چندمقداری را ثابت کردند. این مفهوم را ابتدا لین[۷] و چنگ در مرجع [۱۷] معرفی نمودند.
در پایان، در سال ۲۰۱۰ بلاج[۸] [۳] توانست قضیه‌ی نقطه ثابت مشترک برای یک خانواده از نگاشت‌های چندمقداری با خاصیت شبه−KKM تعمیم‌یافته را مورد بررسی قرار دهد و نتایج مهمی روی مسأله‌ی تعادل به‌دست آورد.
قبل از اینکه به بیان مسأله‌ی تعادل بپردازیم، اشاره‌ای داریم به تعریف زیر که در مسأله‌ی تعادل برداری به کار رفته است.
مخروط: فرض کنیم V یک فضای برداری توپولوژیک باشد. زیرمجموعه‌ی $C \subseteq V$ یک مخروط است اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}^+$، $\alpha C \subseteq C$.

---

[۱] K. Kuratowski
[۲] K. Fan
[۳] S. S. Chang
[۴] Y. Zhang
[۵] W. A. Kirk
[۶] R. P. Agarwal
[۷] L. J. Lin
[۸] M. Balaj

مخروط محدب: زیرمجموعه‌ی C از فضای برداری توپولوژیک V، یک مخروط محدب است اگر $\alpha x + \beta y \in C$ برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ و هر $x, y \in C$.
به عبارت دیگر C را مخروط محدب گوییم هرگاه $\alpha C + \beta C = C$ برای هر اسکالر نامنفی α و β.
اکنون به بیان مسأله‌ی تعادل می‌پردازیم.
فرض کنید X یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای برداری توپولوژیک E و Y یک مجموعه‌ی دلخواه و ناتهی باشد و $f : X \times Y \longmapsto \mathbb{R}$ یک تابع با $f(x, x) = ۰$ برای هر $x \in X$ باشد. آنگاه مسأله‌ی تعادل عددی به‌صورت زیر است:
$x_۰ \in X$ را طوری بیابید که $f(x_۰, y) \geqslant ۰$ برای هر $y \in X$.
در سال‌های اخیر مسأله‌ی تعادل عددی به مسأله‌ی تعادل برداری نگاشت‌های چندمقداری تعمیم یافت.
اکنون دو حالت از مسائل تعادل برداری را بیان می‌کنیم.
فرض کنید X زیرمجموعه‌ی ناتهی، محدب و فشرده از فضای برداری توپولوژیک E باشد، Y یک مجموعه‌ی ناتهی و V یک فضای برداری توپولوژیک باشد.

$$F : X \times Y \longmapsto ۲^V,\ G : X \times X \longmapsto ۲^V,\ C : X \longmapsto ۲^V$$

سه نگاشت چندمقداری می‌باشند. فرض کنید برای هر $x \in X$، $C(x)$ مخروط محدب ناتهی است.
$x_۰ \in X$ را طوری بیابید که:
۱) $F(x_۰, y) \nsubseteq -\operatorname{int} C(x_۰)$ برای هر $y \in Y$.
۲) $F(x_۰, y) \subseteq C(x_۰)$ برای هر $y \in Y$.
توجه کنید که در حالت اول فرض شده که $\operatorname{int} C(x) \neq \emptyset$ برای هر $x \in X$.
تذکر: باید توجه داشت که نتایج ارائه شده توسط بلاج روی مسأله‌ی تعادل با نتایج به‌دست آمده روی مسأله‌ی تعادل کلاسیک متفاوت هستند.

۱ــ۲ فضای برداری

در این پایان‌نامه، میدان اعداد حقیقی، میدان اعداد مختلط، مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد فرد را به‌ترتیب با $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{O}$ نمایش می‌دهیم. همچنین نماد $X \backslash A$ به معنی متمم X در A

می‌باشد.

تعریف ۱.۱ (فضای برداری): فرض کنیم منظور از Φ، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. آنگاه هر عضو Φ را یک اسکالر می‌نامیم. فضای برداری روی Φ مجموعه‌ای است مانند X که عنصرهایش را بردار نامیده و در آن دو عمل به نام‌های جمع و ضرب اسکالر تعریف شده‌اند که از خواص جبری زیر برخوردارند:

الف) به هر جفت از بردارهای x و y برداری مانند $x+y$ چنان نظیر است که

$$x+y=y+x,\ (x+y)+z=x+(y+z).$$

X بردار منحصر به‌فردی مانند 0 (بردار صفر یا مبدأ X) دارد به طوری که به‌ازای هر $x\in X$،

$$x+0=0+x=x$$

و به‌ازای هر $x\in X$ بردار منحصر به‌فردی مانند $-x$ چنان نظیر است که

$$x+(-x)=(-x)+x=0.$$

ب) به هر جفت (α,x) با $\alpha\in\Phi$ و $x\in X$ یک بردار مانند αx چنان نظیر است که

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,\ 1x=x \qquad (\alpha \text{ و } \beta \text{ اسکالراند})$$

و قوانین پخش‌پذیری

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\ \alpha(x+y)=\alpha x+\beta y$$

برقرار می‌باشد.

علامت 0 برای عنصر صفر میدان اسکالر نیز به کار خواهد رفت.

یک فضای برداری حقیقی، فضایی است که در آن $\Phi=\mathbb{R}$ و یک فضای برداری مختلط، فضایی است که در آن $\Phi=\mathbb{C}$. هر حکم راجع به فضای برداری که در آن میدان اسکالر به صراحت ذکر نشده است، ناظر به هر دو حالت خواهد بود.

۱–۳ فضای توپولوژیک

تعریف ۲.۱ **(فضای توپولوژیک)**: یک توپولوژی روی مجموعه‌ی X، گردایه‌ی τ از زیرمجموعه‌های X(یک زیرمجموعه از $P(X)$) است که خواص زیر را داراست:

۱) $\emptyset$ و X به τ متعلق‌اند؛

۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه از τ متعلق به τ است؛

۳) مقطع اعضای هر زیرگردایه‌ی متناهی τ متعلق به τ است.

مجموعه‌ی X و یک توپولوژی τ بر آن را فضای توپولوژیک می‌نامند و آن را با (X,τ) نمایش می دهند.

تعریف ۳.۱ **(مجموعه‌ی باز)**: اگر X یک فضای توپولوژیک با توپولوژی τ باشد، زیرمجموعه‌ی U از X را یک مجموعه‌ی باز خوانیم هرگاه $U \in \tau$.

تعریف ۴.۱ **(مجموعه‌ی بسته)**: زیرمجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک X را یک مجموعه‌ی بسته خوانیم هرگاه مجموعه‌ی $X\backslash A$ باز باشد.

نتیجه ۵.۱ : در هر فضای توپولوژیک مانند (X,τ)، مجموعه‌های X و $\emptyset$، بسته هستند.

مثال ۶.۱ : فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. $\tau = P(X)$ یک توپولوژی روی X است و به این توپولوژی که بزرگترین توپولوژی روی X است، توپولوژی گسسته می گویند.

تعریف ۷.۱ **(فضای هاسدورف[۹])**: فضای توپولوژیک X را هاسدورف گوییم هرگاه به‌ازای هر دو نقطه‌ی متمایز X مانند x و y، مجموعه‌های بازی مانند U و V در X موجود باشند به طوری که $x \in U$، $y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

لازم به ذکر است که خواص زیر در مورد فضاهای هاسدورف صادق است:

۱) هر زیرمجموعه‌ی متناهی یک فضای هاسدورف، بسته است.

۲) هر زیرفضای یک فضای هاسدورف، هاسدورف است.

۳) حد هر دنباله در فضای هاسدورف، یکتاست.

[۹] Hausdorff Space

تعریف ۸.۱ (پوشش باز): گوییم گردایه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک X یک پوشش برای X است یا X را می‌پوشاند در صورتی که اجتماع اعضای $\mathcal{A}$ مساوی X باشد.
اگر اعضای $\mathcal{A}$ زیرمجموعه‌های باز X باشند، آن را یک پوشش باز X می‌خوانیم.

تعریف ۹.۱ (فضای فشرده): فضای توپولوژیک X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز آن شامل یک زیرپوشش باز متناهی باشد.

مثال ۱۰.۱ : هر فضای توپولوژیک X که شامل تعدادی متناهی عضو باشد، لزوماً فشرده است، زیرا در این حالت، هر پوشش باز X متناهی است.

تعریف ۱۱.۱ (فضای موضعاً فشرده): فضای توپولوژیک X را موضعاً فشرده خوانیم هرگاه برای هر $x \in X$، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از X مانند A و مجموعه‌ی بازی مانند U موجود باشد به طوری که

$$x \in U \subseteq A.$$

تعریف ۱۲.۱ : رابطه‌ی $\preccurlyeq$ در مجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک X را یک رابطه‌ی ترتیب جزئی می‌گوییم هرگاه برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in A$، روابط زیر برقرار باشد.
۱) $\alpha \preccurlyeq \alpha$؛
۲) اگر $\alpha \preccurlyeq \beta$ و $\beta \preccurlyeq \alpha$، آنگاه $\alpha = \beta$؛
۳) اگر $\alpha \preccurlyeq \beta$ و $\beta \preccurlyeq \gamma$، آنگاه $\alpha \preccurlyeq \gamma$.

تعریف ۱۳.۱ (مجموعه‌ی جهت‌دار): یک مجموعه‌ی جهت‌دار مانند J، مجموعه‌ای است در فضای توپولوژیک X با یک رابطه‌ی ترتیب جزئی $\preccurlyeq$ به طوری که به‌ازای هر زوج α و β از اعضای J، عضوی از J مانند γ موجود باشد به قسمی که

$$\alpha \preccurlyeq \gamma, \ \beta \preccurlyeq \gamma.$$

مثال ۱۴.۱ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$، یک مجموعه‌ی جهت‌دار است.

تعریف ۱۵.۱ (تور): فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. یک تور در X، تابعی مانند f از مجموعه‌ی جهت‌داری مانند J به‌توی X است. اگر $\alpha \in J$، معمولاً $f(\alpha)$ را با x_α نمایش می‌دهیم. خود تور f را با نماد $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ یا $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ و یا اگر از سیاق مطلب فهمیده شود، مختصراً با (x_α) نمایش می‌دهیم.
تور (x_α) را همگرا به نقطه‌ای از $x \in X$ می‌گوییم $(x_\alpha \to x)$ هرگاه به‌ازای هر همسایگی U از x، αیی از J موجود باشد که

$$\alpha \preccurlyeq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

مثال ۱۶.۱ : فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $J = \mathbb{N}$. تعریف می‌کنیم $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$ با

$$f(n) = ۲n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

آنگاه تابع f یک تور در $\mathbb{N}$ است.

تعریف ۱۷.۱ (همپایان): فرض کنیم J مجموعه‌ای جهت‌دار باشد. زیرمجموعه‌ای مانند K از J را در J همپایان خوانیم هرگاه برای هر $\alpha \in J$، عضوی مانند β در K موجود باشد که $\alpha \preccurlyeq \beta$. می‌توان ثابت کرد که اگر J مجموعه‌ای جهت‌دار و K در J همپایان باشد، آنگاه K نیز جهت‌دار است.

مثال ۱۸.۱ : فرض کنیم J مجموعه‌ای جهت‌دار، X یک فضای توپولوژیک، $J = \mathbb{N}$ و $K = O$ باشند. در این صورت، O در $\mathbb{N}$ همپایان است.

تعریف ۱۹.۱ (زیرتور): فرض کنید $f : J \longmapsto X$ توری در X باشد و $f(\alpha) = x_\alpha$. اگر K مجموعه‌ای جهت‌دار باشد و $g : K \longmapsto J$ تابعی باشد که:
الف) اگر $i \preccurlyeq j$، آنگاه $g(i) \preccurlyeq g(j)$؛
ب) $g(K)$ در J همپایان باشد؛
آنگاه تابع مرکب $fog : K \longmapsto X$ را یک زیرتور (x_α) می‌گوییم.

مثال ۲۰.۱ : فرض کنیم $K = J = \mathbb{N}$ و X یک زیرمجموعه‌ی دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} \longmapsto X \\ f(n) = x_n \end{cases} \qquad \begin{cases} g : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \\ g(k) = n_k \end{cases}$$

با این شرط که $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots$ و نیز $g(k) \leqslant g(k+1)$، یعنی $n_k \leqslant n_{k+1}$. آنگاه داریم

$$fog : \mathbb{N} \longmapsto X$$
$$fog(k) = f(n_k) = x_{n_k}$$

و بنابراین $\{x_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ زیرتوری از $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ است.

۱—۴ فضای برداری توپولوژیک

تعریف ۲۱.۱ (فضای برداری توپولوژیک): فضای برداری توپولوژیک X، یک فضای برداری روی میدان Φ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) است همراه با یک توپولوژی τ که دارای خواص زیر است:

الف) برای هر $x \in X$، مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ بسته است؛

ب) تابع مجموع $X \times X \longmapsto X$ با ضابطه‌ی $(x, y) \longmapsto x + y$ پیوسته است؛

ج) تابع ضرب اسکالر $F \times X \longmapsto X$ با ضابطه‌ی $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ پیوسته است.

تعریف ۲۲.۱ (مجموعه‌ی محدب): مجموعه‌ی A را در فضای برداری توپولوژیک X، محدب گوییم هرگاه برای هر $x, y \in A$ و هر $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ داشته باشیم

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

تعریف ۲۳.۱ (غلاف محدب یک مجموعه): اگر X یک فضای برداری توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد، آنگاه غلاف محدب A که با $\mathrm{Co}(A)$ نشان داده می‌شود؛ عبارت است از اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل A.

قضیه ۲۴.۱ : اگر X یک فضای برداری توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد، آنگاه

$$\mathrm{Co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A,\ \lambda \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

متداول‌ترین فضاهای توپولوژیک، فضاهای متریک‌اند. ما آشنایی با فضاهای متریک را دانسته گرفته، ولی به خاطر کامل بودن بحث، تعاریف اصلی آنها را ذکر می‌کنیم.

۱—۵ فضای متریک

تعریف ۲۵.۱ (فضای متریک): مجموعه‌ی X که عنصرهایش را نقاط می‌نامیم در صورتی یک فضای متریک است که به هر دو نقطه‌ی p و q از X، عدد حقیقی $d(p,q)$ به نام فاصله‌ی از p تا q طوری مربوط شده باشد که:

الف) $d(p,q) > ۰$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p,p) = ۰$.

ب) $d(p,q) = d(q,p)$.

ج) به‌ازای هر $r \in X$،

$$d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q).$$

هر تابع برخوردار از این سه خاصیت یک تابع فاصله یا یک متر نام دارد.

مثال ۲۶.۱ : مهمترین مثال‌های فضاهای متریک عبارتند از: فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$، به‌ویژه $\mathbb{R}^۱$ (خط حقیقی) و $\mathbb{R}^۲$ (صفحه مختلط).

توجه کنید که فاصله در $\mathbb{R}^k$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i - y_i|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \quad (x, y \in \mathbb{R}^k).$$

تذکر ۲۷.۱ : هر زیرمجموعه‌ی Y از فضای متریک X، خود، فضای متریک با همان تابع فاصله می‌باشد.

تعریف ۲۸.۱ (فضای ابرمحدب): فضای متریک (X,d) را فضای ابرمحدب گوییم هرگاه برای هر مجموعه نقاط $\{x_\alpha\}$ از X و هر مجموعه $\{r_\alpha\}$ از اعداد حقیقی نامنفی که در آن $d(x_\alpha, x_\beta) \leqslant r_\alpha + r_\beta$، داشته باشیم

$$\bigcap_{\alpha} B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset.$$

مثال ۲۹.۱ : فرض کنید

$$X = L^{۲}([۰, ۱]) = \left\{ f : [۰, ۱] \longmapsto \mathbb{C}, \ \int_{۰}^{۱} |f(t)|^{۲} dt < \infty \right\}$$

و

$$C = \{f \in X : \exists a, b \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\}.$$

در این صورت، C زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته و محدب در X است.
نرم $\|.\|$ را روی C به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\| = \max\{|a|, |b|\}, \ f \in C.$$

آنگاه $(C, \|.\|)$ یک فضای متریک ابرمحدب است. برای جزئیات بیشتر مرجع [۶] را ببینید.