بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

بسط وبررسی بعضی از نامساویهای نرمی

استاد راهنما:

دکتر رحمت الله لشکری پور

تحقیق و نگارش:

روح الله قائدی

این پایان نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره مند شده است

۸۷/۶/۳۰

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان بسط وبررسی بعضی از نامساویهای نرمی قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض توسط دانشجو روح الله قائدی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر رحمت الله لشکری پور تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

روح الله قائدی

این پایان نامه ...۶... واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ...۲۳/۶/۸۷... توسط هیئت داوران بررسی و درجه ...عالی... به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد رهنما	دکتر رحمت الله لشکری پور		
استاد راهنما:			
استاد مشاور:			
داور ۱:	دکتر اکبر گلچین		
داور ۲:	دکتر علیرضا احمدی لداری		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر پرویز سرگلزائی		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب رو ح الله قائدی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو: روح الله قائدی

امضاء

سپاسگزاری

به یاری خداوند متعال توانستم کار خود را به پایان برسانم، که در این راستا کسانی بودند که به من کمک کردند و اگر کمک ویاری آنها نبود نمی توانستم این کار را به پایان برسانم.

از استاد فرزانه جناب آقای دکتر لشکری پور، که با راهنمایی و مساعدت خویش بر من منت گذاشتند تا کار پایان نامه کامل شود.

و از جناب آقایان دکتر گلچین و دکتر احمدی لداری که زحمت داوری این پایان نامه و نماینده تحصیلات تکمیلی، دکتر سرگلزایی تشکر می نمایم.

همچنین از کادر تحصیلات تکمیلی و دانشکده ریاضی، از دوستان خوبم، ورودیهای ۸۵،۸۶ ریاضی از جمله: سید علی خالقی، غلامرضا طالبی و احسان خراسانی نژاد و دوست خوبم دکتر فتحی تشکر می نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه به بسط رده‌های C_p، فون‌نیومن—شاتن[1] و نتیجهٔ پنرز[2] در مینیمم‌سازی $\|AXB - C\|_2$ می‌پردازیم. پنرز به زیبایی اثبات کرد که اگر A^+ و B^+ معکوس‌های مور—پنرز A و B باشند(X, C, B, A، همگی عملگراند) آنگاه عکس نامساوی زیر برقراراست:

$$\|AXB - C\|_2 \geq \|AA^+CB^+B - C\|_2.$$

در نامساوی قبل A^+CB^+، مینیمم‌ساز یکتایی از نرم کمینهٔ $\|.\|_2$ است. همچنین نشان‌داده شده که اگر $AX - C \in C_p$، آنگاه

$$AA^+C - C \in C_p, \qquad \|AX - C\|_p \geq \|AA^+C - C\|_p, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

علاوه بر این اثبات شده که A^+C مینیمم‌ساز یکتای $\|.\|_p$، برای $1 < p < \infty$ است.

---

[1] VonNeumann-Schatten

[2] Penrose

مقدمه و تاریخچه:

تاقبل ازاین در مورد معکوس‌های توسعه‌یافته و مور—پنرز، کارهای زیادی انجام شده، که آخرین شخصی که در این مورد کار کرده‌است، اقای ماهر[3] بودند. در سال ۲۰۰۷ میلادی مقاله‌ای تحت عنوان بسط این نوع معکوس‌ها، بیان کردند. من در این پایان نامه من به پیروی از ایشان و با راهنمایی دکتر لشکری‌پور به بررسی ای ن مطالب پرداختم. این پایان‌نامه شامل سه فصل است، که در فصل اول من به بیان مفاهیم مقدماتی، در فصل دوم به بررسی رده‌های فون‌نیومن—شاتن و در فصل آخر به بررسی وبسط معکوس‌های توسعه‌یافته و مور—پنرز، پرداخته‌ام.

---

[3] P.J.Maher

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱—۱ مقدمه

در این فصل تعاریف، قضایا و مفاهیمی که برای آشنایی با موضوع پایان نامه لازم و در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند، آورده شده است.

۱—۲ فضای هیلبرت و ویژگی‌های آن

در تعاریف زیر منظور از $\mathcal{F}$، میدان اعداد حقیقی (مختلط) است.

تعریف ۱.۲.۱: اگر $\mathcal{X}$ یک فضای برداری روی $\mathcal{F}$ باشد، ضرب داخلی روی $\mathcal{X}$ یک تابع مانند $u : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{F}$ است به طوری که برای هر α و β در $\mathcal{F}$ و هر x، y و z در $\mathcal{X}$ داشته باشیم:

(۱) $u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x,z) + \beta u(y,z)$؛

(۲) $u(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} u(x,y) + \overline{\beta} u(x,z)$؛

(۳) $u(x,x) \geq 0$؛

(۴) $0 = u(x,y) = \overline{u(y,x)}$؛

(۵) برای هر x و y در $\mathcal{X}$، $u(x,0) = u(0,y)$؛

(٦) اگر $u(x,x) = 0$، آنگاه $x = 0$.

تعریف ۲.۲.۱: فضای برداری $\mathcal{H}$ روی میدان $\mathcal{F}$ به همراه ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ را هیلبرت گویند، هرگاه این فضا نسبت به نرم $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$، کامل باشد. به بیان دیگر هر دنبالهٔ کشی در $\mathcal{H}$ همگرا باشد.

تذکر ۳.۲.۱: در این پایان‌نامه ضرب داخلی را به صورت، $\langle x,y \rangle = u(x,y)$ و مزدوج x را با $\overline{x}$ نشان می‌دهیم. همچنین نرم در فضای هیلبرت را به صورت $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$، تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۲.۱: اگر $\mathcal{H}$ فضایی هیلبرت و f و g در $\mathcal{H}$ باشند، آنگاه f و g را متعامد گویند

هرگاه $\langle f,g\rangle = ۰$ و به صورت $f \perp g$، نوشته می‌شود. به طورکلی اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{H}$ باشند، $A \perp B$، اگر برای هر $f \in A$ و هر $g \in B$، $f \perp g$.

تعریف ۵.۲.۱: اگر $\mathcal{X}$ یک فضای برداری روی $\mathcal{F}$ و $A \subseteq \mathcal{X}$، آنگاه A را یک مجموعهٔ محدب گویند، هرگاه

$$tx + (۱ - t)y \in A, \qquad ۰ \leq t \leq ۱, \qquad \forall\, x,\ y \in A.$$

تذکر ۶.۲.۱: اگر $A \subseteq \mathcal{H}$، آنگاه

$$A^{\perp} = \{f \in \mathcal{H} : f \perp g,\ \forall\, g \in A\}.$$

تعریف ۷.۲.۱: پایهٔ ξ از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را یک پایهٔ متعامد یکه گویند، هرگاه

(۱) برای هر e متعلق به ξ، $\|e\| = ۱$؛

(۲) اگر $e_۱$ و $e_۲$ عناصری از ξ باشند به‌طوری که $e_۱ \neq e_۲$، آنگاه $e_۱ \perp e_۲$.

تعریف ۸.۲.۱: مجموعه A را چگال گویند هرگاه شامل زیر مجموعه‌ای شمارا مانند B باشد به‌طوری‌که بستار B با A، برابر باشد.

تذکر ۹.۲.۱: مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خطی و کراندار از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ با $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ نمایش داده می‌شود. اگر $\mathcal{H} = \mathcal{K}$، آنگاه $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ و مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی و کراندار روی فضای جدایی‌پذیر $\mathcal{H}$ را با $L(\mathcal{H})$، نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱: فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را جدایی‌پذیر گویند، هرگاه شامل زیرمجموعه‌ای شمارا و چگال باشد.

قضیه ۱۱.۲.۱: اگر A مجموعه‌ای متعامد در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

(۱) $A^{\perp} = \{۰\}$.

(۲) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $x = \sum_{a\in A}\langle x, a\rangle a$.

(۳) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\|x\|^{۲} = \sum_{a\in A}|\langle x, a\rangle|^{۲}$.

(۴) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle x, y\rangle = \sum_{a\in A}\langle x, a\rangle\langle a, y\rangle$.

برهان: به [۱۳] مراجعه کنید.□

تعریف ۱.۲.۱۲: عملگر $A \in B(\mathcal{H})$ را کراندار گویند، هرگاه عدد حقیقی مانند $k > ۰$ وجود داشته باشد به طوری‌که

$$\|Ax\| \leq k\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

لم ۱.۲.۱۳: فرض کنید $A \in B(\mathcal{H})$. آنگاه $A = ۰$، اگر

$$\langle Ax, x\rangle = ۰, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

برهان: داریم

$$\begin{aligned}
&\langle A(\alpha x + \beta y), \alpha x + \beta y\rangle - |\alpha|^{۲}\langle Ax, x\rangle - |\beta|^{۲}\langle Ay, y\rangle \\
&= \langle \alpha Ax + \beta Ay, \alpha x + \beta y\rangle - |\alpha|^{۲}\langle Ax, x\rangle - |\beta|^{۲}\langle Ay, y\rangle \\
&= \alpha\overline{\alpha}\langle Ax, x\rangle + \beta\overline{\alpha}\langle Ay, x\rangle + \alpha\overline{\beta}\langle Ax, y\rangle \\
&+\beta\overline{\beta}\langle Ay, y\rangle - |\alpha|^{۲}\langle Ax, x\rangle - |\beta|^{۲}\langle Ay, y\rangle \\
&= \beta\overline{\alpha}\langle Ay, x\rangle + \alpha\overline{\beta}\langle Ax, y\rangle.
\end{aligned}$$

حال اگر در رابطه‌های بالا قرار دهید، $\alpha = i$ و $\beta = ۱$، داریم

$$i\langle Ax, y\rangle - i\langle Ay, x\rangle = ۰, \qquad (*)$$

و اگر قرار دهید، $\beta = ۱$ و $\alpha = ۱$، داریم

$$\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = ۰. \qquad (**)$$

بنابراین از روابط $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌گیریم که

$$\langle Ax, y\rangle = ۰, \qquad \forall x,\ y \in \mathcal{H},$$

در نتیجه $Ax = ٠$، لذا $A = ٠$.$\square$

فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. می‌خواهیم $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K}$ را طوری تعریف کنیم که یک فضای هیلبرت شود.

تعریف ۱۴.۲.۱: فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K} = \{h \bigoplus k : h \in \mathcal{H}, \quad k \in \mathcal{K}\}$ و تعریف کنید:

$$\langle h_۱ \bigoplus k_۱, h_۲ \bigoplus k_۲ \rangle = \langle h_۱, h_۲ \rangle + \langle k_۱, k_۲ \rangle.$$

گزاره ۱۵.۲.۱: اگر $\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲, \ldots$، فضاهای هیلبرت باشند، آنگاه $\mathcal{H}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\mathcal{H} = \{(h_n)_{n=۱}^{\infty} : h_n \in \mathcal{H}_n, \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \|h_n\|^۲ < \infty\}.$$

حال اگر برای هر $h = (h_n)$ و $g = (g_n)$ در $\mathcal{H}$، تعریف کنید

$$\langle h, g \rangle = \sum_{n=۱}^{\infty} \langle h_n, g_n \rangle.$$

آنگاه $\langle . \, , . \rangle$ یک ضرب داخلی در $\mathcal{H}$ است و نرم را نسبت به این ضرب، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|h\| = (\sum_{n=۱}^{\infty} \|h_n\|^۲)^{\frac{۱}{۲}}, \qquad h = (h_n).$$

برهان: به [۲] مراجعه کنید.$\square$

تعریف ۱۶.۲.۱: فرض کنید $\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲, \ldots$، فضاهای هیلبرت باشند. فضای $\mathcal{H}$ را که براساس گزاره ۱۳.۲.۱ تعریف شد، جمع مستقیم $\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲, \ldots$، گویند و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_۱ \bigoplus \mathcal{H}_۲ \bigoplus \ldots$$

اگر $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$، مجموعه‌ای از فضاهای هیلبرت باشد، $\mathcal{H} = \bigoplus\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ بر اساس مجموعه‌ای از توابع مانند $h : I \to \cup\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$، تعریف می‌شود به طوری‌که برای هر $i \in I$، $h(i) \in \mathcal{H}_i$ و

$$\sum_{i \in I} \|h(i)\|^۲ < \infty.$$

حال اگر $g, h \in \mathcal{H}$، ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle h, g\rangle = \sum_{i\in I}\langle h(i), g(i)\rangle,$$

که با این تعریف $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت می‌شود.

گزاره ۱.۲.۱۷: فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت باشد، برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ تابع $x \otimes y$ را به صورت، $(x\otimes y)(z) = \langle z, x\rangle y$، که $z \in \mathcal{H}$، تعریف می‌کنیم و داریم

(۱) $\tau(x\otimes y) = \langle x, y\rangle$.

(۲) $\|x\otimes y\| = \|x\|\,\|y\|$.

برهان: به [۱۳] مراجعه کنید.□

۱—۳ ماتریس‌ها و عملگرهای خطی

تعریف ۱.۳.۱: فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت باشند. نگاشت $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{K}$ یک عملگر خطی نامیده می‌شود، اگر برای هر $h_1,\ h_2 \in \mathcal{H}$ و $\lambda \in \mathcal{F}$ داشته باشیم

$$T(\lambda h_1 + h_2) = \lambda T(h_1) + T(h_2).$$

تعریف ۲.۳.۱: فرض کنید $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. آنگاه عملگر $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ را که $\langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle$، الحاق A گویند و با نماد $B = A^*$ نشان داده می‌شود. همچنین عملگر A را خودالحاق گویند، هرگاه $A^* = A$.

گزاره ۳.۳.۱: اگر $A,\ B\ \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ و $\alpha \in \mathcal{F}$، آنگاه

(۱) اگر I عملگر یکانی باشد، آنگاه $I = I^*$.

(۲) $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha}A^* + B^*$.

(۳) $(AB)^* = B^*A^*$.

(۴) $A^{**} = A$.

(۵) $\|A\| = \|A^*\|$.

(۶) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

(۷) اگر A در $B(H)$ معکوس‌پذیر و A^{-1} معکوس A باشد، آنگاه A^* نیز معکوس‌پذیر و $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

برهان([۲]): (۱) چون $Ix = x$ و

$$\langle Ix, y\rangle = \langle x, I^*y\rangle, \qquad \forall x,\ y \in \mathcal{H},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Ix, y\rangle - \langle x, I^*y\rangle \\ &= \langle x, y - I^*y\rangle, \qquad \forall x,\ y \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

پس

$$y - I^*y = 0 \Rightarrow I^*y = y \Rightarrow I = I^*, \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

(۲) با استفاده از تعریف داریم

$$\begin{aligned} \langle(\alpha A + B)x, y\rangle &= \langle \alpha Ax + Bx, y\rangle \\ &= \langle \alpha Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle \\ &= \alpha\langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle \\ &= \langle x, \overline{\alpha}A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle = \langle x, (\overline{\alpha}A^* + B^*)y\rangle, \end{aligned}$$

در نتیجه $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha}A^* + B^*$.

(۳) چون $(AB)x = A(Bx)$، لذا

$$\begin{aligned} \langle(AB)x, y\rangle &= \langle A(Bx), y\rangle \\ &= \langle Bx, A^*y\rangle \\ &= \langle x, B^*(A^*y)\rangle = \langle x, (B^*A^*)y\rangle, \qquad \forall x,\ y \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\langle(AB)x, y\rangle = \langle x, (AB)^*y\rangle, \qquad \forall x,\ y \in \mathcal{H},$$

که این هم یعنی، $(AB)^* = B^*A^*$.

(۴) داریم

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle (A^*)^*x, y\rangle, \qquad \forall x,\ y \in \mathcal{H}.$$

بنابراین

$$\langle (A - A^{**})x, y\rangle = 0, \qquad \forall y \in \mathcal{H}.$$

پس $A = A^{**}$.

(۵) داریم

$$\begin{aligned} \|A^*x\|^2 &= \langle A^*x, A^*x\rangle \\ &= \langle A(A^*x), x\rangle \\ &\leq \|A(A^*x)\|\|x\| \\ &\leq \|A^*x\|\|A\|\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

لذا، $\|A^*\| \leq \|A\|$. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle \\ &= \langle A^*(Ax), x\rangle \\ &\leq \|A^*(Ax)\|\|x\| \\ &\leq \|Ax\|\|A^*\|\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

پس $\|A\| \leq \|A^*\|$. بنابراین حکم برقرار است.

(۶)

$$\|A^*Ax\| \leq \|A^*\|\|A\|\|x\| = \|A\|^2\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

بنابراین $\|AA^*\| \leq \|A\|^2$. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle \\ &= \langle A^*Ax, x\rangle \\ &\leq \|A^*Ax\|\|x\| \\ &\leq \|A\|\|A^*\|\|x\|^2, \qquad \forall x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

پس $\|A^*A\| \leq \|A\|^۲$. بنابراین حکم برقرار است.

(۷) داریم

$$I = I^*,$$

$$I = AA^{-۱} = A^{-۱}A,$$

$$(AA^{-۱})^* = I^* = I,$$

حال با استفاده از قسمت (۳) داریم

$$(AA^{-۱})^* = (A^{-۱})^* A^*.$$

بنابراین $(A^{-۱})^* A^* = I$. لذا

$$(A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*.$$

به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.□

تعریف ۴.۳.۱: عملگر $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را خودتوان گویند، هرگاه $E^۲ = E$.

تعریف ۵.۳.۱: عملگر $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را تصویر گویند، هرگاه P خودتوان باشد و $kerP = (ranP)^\perp$.

هر عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $T = A + iB$ نوشت، که در آن $A = \frac{(T+T^*)}{۲}$ و $B = \frac{(T-T^*)}{۲i}$.

لم ۶.۳.۱: هر عملگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی و متناهی از عملگرهای یکانی نوشت.

برهان: به [۱۳] مراجعه کنید.□

قضیه ۷.۳.۱: اگر $\mathcal{M}$ زیر فضایی بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $h \in \mathcal{H}$، Ph را نقطهٔ یکتایی در $\mathcal{M}$ در نظر بگیرید به طوری که $h - Ph \perp \mathcal{M}$، آنگاه

(۱) P یک تبدیل خطی در $\mathcal{H}$ است.

(۲) $\|Ph\| \leq \|h\|$.

(۳) $P^{۲} = P$.

(۴) $kerP = \mathcal{M}^{\perp}$ و $ranP = \mathcal{M}$.

برهان([۲]): (۱) فرض کنید $h_۱, h_۲ \in \mathcal{H}$ و $\alpha_۱, \alpha_۲ \in F$. اگر $f \in \mathcal{M}$، آنگاه

$$\langle P(\alpha_۱ h_۱ + \alpha_۲ h_۲) - (\alpha_۱ Ph_۱ + \alpha_۲ Ph_۲), f\rangle$$
$$= \alpha_۱ \langle h_۱ - Ph_۱, f\rangle + \alpha_۲ \langle h_۲ - Ph_۲, f\rangle = ۰.$$

بنابراین

$$P(\alpha_۱ h_۱ + \alpha_۲ h_۲) = \alpha_۱ Ph_۱ + \alpha_۲ Ph_۲.$$

(۲) اگر $h \in \mathcal{H}$، آنگاه $h = (h - Ph) + Ph$، $Ph \in \mathcal{M}$ و $h - Ph \in \mathcal{M}^{\perp}$. بنابراین

$$\|h\|^{۲} = \|h - Ph\|^{۲} + \|Ph\|^{۲} \geq \|Ph\|^{۲}.$$

لذا $\|Ph\| \leq \|h\|$.

(۳) اگر $f \in \mathcal{M}$، آنگاه $Pf = f$. برای هر $h \in \mathcal{H}$، $Ph \in \mathcal{M}$. بنابراین

$$P^{۲}h = P(Ph) = Ph,$$

و این یعنی $P^{۲} = P$.

(۴) اگر $Ph = ۰$، آنگاه $h = h - Ph \in \mathcal{M}^{\perp}$. همین‌طور اگر $h \in \mathcal{M}^{\perp}$، آنگاه بردار صفر تنها برداری است که $h \perp \mathcal{M} = ۰$، بنابراین $Ph = ۰$. و این هم یعنی $kerP = \mathcal{M}^{\perp}$. به همین نحو می‌توان ثابت کرد، $ranP = \mathcal{M}$.□

گزاره ۱.۳.۸: اگر $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک عملگر خود توان و $E \neq ۰$، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند:

(۱) E یک تصویر است.

(۲) E یک تصویر متعامد از $\mathcal{H}$ به توی برد E است.

(۳) $\|E\| = ۱$.

(۴) E خودالحاق $(E^* = E)$ است.

(۵) E نرمال است $(E^*E = EE^*)$.

(٦) برای هر $h \in \mathcal{H}$، $\langle Eh, h\rangle = \circ$.

برهان: به [۲] مراجعه کنید.□

تعریف ۹.۳.۱: اگر $\mathcal{M}$ زیر فضای خطی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و P نگاشت خطی تعریف شده در قضیه ۸.۳.۱ باشد، آنگاه P را تصویر متعامد از $\mathcal{H}$ به توی $\mathcal{M}$ گویند.

تعریف ۱۰.۳.۱: عملگر W را طول‌پای جزئی گویند، هرگاه برای هر $h \in (kerW)^{\perp}$، $\|Wh\| = \|h\|$.

تعریف ۱۱.۳.۱: عملگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، را مثبت گویند هرگاه برای هر $h \in \mathcal{H}$، $\langle Ah, h\rangle \geq \circ$ و می‌نویسیم $A \geq \circ$.

قضیه ۱۲.۳.۱ (تجزیه‌قطبی): اگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آنگاه یک طول‌پای جزئی مانند W وجود دارد که $(kerA)^{\perp}$ فضای آغازین و $\overline{ranA}$ را فضای پایانی W گویند ($W : (kerA)^{\perp} \longrightarrow \overline{ranA}$) به طوری که $A = W|A|$. علاوه بر آن اگر $A = UP$، جایی که $P \geq \circ$ و U یک طول‌پای جزئی است به‌طوری که $kerU = kerP$، آنگاه $P = |A|$ و $U = W$.

برهان: به [۲] مراجعه کنید.□

تعریف ۱۳.۳.۱: عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را یکانی گویند هرگاه $TT^* = T^*T = I$.

گزاره ۱۴.۳.۱ (عملگرهای جابجایی): در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، موارد زیر برقرار است:

(۱) اگر A و B خودالحاق و $A^*B^* = B^*A^*$، آنگاه AB و BA هر دو خودالحاق هستند.

(۲) اگر A و B دو عملگر خودالحاق مثبت باشند و $AB = BA$، آنگاه AB و BA هر دو مثبت هستند.

(۳) اگر A عملگر نرمال باشد و $AB = BA$، آنگاه $A^*B = BA^*$.

(۴) اگر A و B دو عملگر نرمال باشند و $AB = BA$، آنگاه AB و BA هر دو نرمال هستند.