دانشگاه تربيت معلم

دانشكده علوم رياضي و كامپيوتر

رساله دكتري رياضي محض

عنوان : نمايش هاي ۲- گروههاي متناهي

تدوين : حسين عبدل زاده

استاد راهنما : حسين دوستي

آذر ۱۳۸۹

اظهارنامه

این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول و دوم مقدمات لازم و نظریه هم رده تشریح شده‌است. در فصل سوم ارتباط این نظریه با نمایشهای گروهها بسط یافته و در بخش ششم از این فصل نظریه هم رده برای ارائه نمایشهای ۲ـگروهها بکار رفته‌است. مطالب بخش ششم از فصل سه اصیل بوده و در آن برای تقریبا همه ۲ـگروههای از هم رده حداکثر ۳ نمایش ارائه می شود. همچنین مطالب فصل چهار از قضیه ۴ـ۲ـ۱ به بعد اصیل است و در آن یک نتیجه عددی برای p‌ـگروههای غیرآبلی مینیمال اثبات می شود. از مطالب این رساله دو مقاله زیر استخراج شده‌است:

- H. Abdolzadeh and B. Eick, *On efficient presentations for infinite sequences of 2-groups with fixed coclass*, Algebra Colloquium (to appear).
- H. Abdolzadeh, M. Azadi and H. Doostie, *A subgroup involvement of Fibonacci length*, J. Appl. Math. and Computing, **32**, (2010), 382-392.

چکیده

یافتن نمایشهای کوتاه برای گروهها همیشه مسئله‌ای مورد توجه در نظریه گروهها بوده است. بویژه این مسئله در مورد p-گروهها مهم‌تر است.

این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول و دوم مقدمات لازم و نظریه هم رده تشریح خواهد شد. در فصل سوم ارتباط این نظریه با نمایشهای گروهها بسط می یابد و در بخش ششم از این فصل نظریه هم رده را برای ارائه نمایشهای ۲-گروهها بکار خواهیم برد. با مختصر کردن نمایشهای پرو-۲-گروهها و ارتباط آن با نمایشهای ۲-گروهها و بکار بردن این روش برای پرو-۲-گروههای از هم رده یک و دو ثابت خواهیم کرد:

قضیه. تقریباً همهٔ (همه بجز تعدادی متناهی) ۲-گروههای متناهی از هم رده حداکثر ۲ که ضربگر شور آنها بدیهی است فرادوری بوده و لذا کاستی صفر دارند.

سپس نمایشهایی برای همه ۲-گروههای متناهی از هم رده حداکثر ۳ و ضربگر شور بدیهی و همچنین نمایشهای شش خانواده نامتناهی از ۲-گروههای ۳-مولدی با ضربگر شور بدیهی ارائه خواهد شد.

در فصل چهارم برای p-گروههای غیرآبلی مینیمال نشان خواهیم داد که برای زیرگروه مشتق این گروهها مجموعه مولد مناسبی وجود دارد که نسبت به آن طول فیبوناچی زیرگروه مشتق طول فیبوناچی گروه اصلی را می شمارد. بویژه قضیه زیر ثابت خواهد شد:

قضیه. برای هر p-گروه غیرآبلی مینیمال مانند G، مجموعه مولدی مانند A' برای G' وجود دارد بطوریکه $LEN_{A'}(G') | LEN_A(G)$ که در آن A مجموعه مولد اصلی G است.

واژه‌های کلیدی: p-گروه متناهی، نظریه هم رده، کاستی صفر، طول فیبوناچی، عدد وال.

رده‌بندی موضوعی: 20D15, 20F05

مقدمه

آیک و لیدهام‌ـگرین خانواده نامتناهی از pـگروهها از هم ردهٔ یکسان را معرفی کرده اند. آنها نشان داده اند که pـگروههای واقع در یک خانواده با یک نمایش آزاد پارامتری قابل نمایش هستند. در این رساله هدف ما ارایه‌ی نمایش آزاد برای چنین خانواده هایی از ۲ـگروههاست . برای بعضی از این خانواده ها نمایش با کاستی صفر ارایه کرده و برای برخی خانواده های ۳ـمولدی چنین نمایشی حدس خواهیم زد.

گروهی متناهی که مرتبهٔ آن توانی از عدد اول p باشد یک pـگروه نامیده می شود. pـگروهها جایگاه ویژه‌ای در گروههای متناهی دارند، برای مثال هر گروه متناهی p ـگروهها را بعنوان زیرگروههای سیلو شامل است. بنابراین رده‌بندی pـگروهها مسئله ای مهم و اساسی ، و در عین حال مشکل است. حتی تعداد گروههای از مرتبه p^n معلوم نیست .

نظریهٔ نمایش گروهها مبحثی کلیدی در نظریهٔ گروههاست . یک نمایش کوتاه توصیفی مفید و کوتاه از گروه زمینهٔ خود بدست می دهد. بنابراین ارائهٔ نمایش کوتاه برای یک گروه مهم و اساسی است .

یک راه برای سنجش اندازهٔ یک نمایش، کاستی آن است : برای نمایشی مانند $\langle X \mid R\rangle$ کاستی آن عبارت است از عدد $|R| - |X|$. در اینصورت کاستی گروهی مانند G برابر است با ماکزیمم کاستی نمایشهای متناهی آن ، که با علامت $\mathrm{def}(G)$ نشان داده می شود. می دانیم که کاستی یک گروه متناهی نامثبت است . جالب ترین گروهها، گروههای با کاستی صفر هستند. برای ملاحظه مثالهائی از این گروهها و اطلاعات بیشتر، خوانندهٔ علاقه‌مند را به [23] ارجاع می دهیم .

$M(G)$ ، ضربگر شور یک گروه مانند G مهمترین پایای G است برای یافتن نمایشهای کوتاه برای G. شور [40] ثابت کرده است که $M(G)$ گروهی متناهی و آبلی است که با حداکثر $-\mathrm{def}(G)$ عضو تولید می شود. بنابراین اگر کاستی گروه G صفر باشد، آنگاه $M(G)$ بدیهی است. لذا گروههای با کاستی صفر را بایستی در بین گروههای با ضربگر شور بدیهی جستجو کرد.

ضربگر شور نقطه آغاز مناسبی است، بویژه به این دلیل که الگوریتمی برای تعیین ضربگر شور یک گروه وجود دارد [21,25]. از طرفی هنوز چنین الگوریتمی برای تعیین کاستی یک گروه ارایه نشده است. مقاله هاواش، نیومن و ابرایان [23] روشهای محاسباتی دیگری برای یافتن نمایشهای با کاستی صفر معرفی می کند.

سوان [46] ثابت کرده است که گروه با ضربگر شور بدیهی لزوماً کاستی صفر نیست. در اینجا این سئوال به ذهن می رسد که بین گروههای متناهی با ضربگر بدیهی کدامها کاستی صفر هستند. لذا پرداختن بیشتر به این موضوع نیازمند بررسی کاستی گروههای با ضربگر بدیهی است. توجه می کنیم که سئوال زیر تاکنون بی پاسخ مانده است :

پرسش. آیا pـگروهی متناهی با ضربگر شور بدیهی وجود دارد که کاستی آن منفی باشد؟

هم ردهٔ یک pـگروه از مرتبه p^n و ردهٔ پوچتوانی c طبق تعریف برابر است با $n - c$. بنابراین برای مثال pـگروههای از رده ماکسیمال از هم رده ۱ هستند. لیدهام‌ـگرین ونیومن در سال ۱۹۸۰ رده بندی pـگروههای متناهی بر اساس هم رده را پیشنهاد کردند و پیشنهاد آنها به زمینه تحقیقاتی عظیمی در نظریه گروهها بدل شده است. در این رساله ما نظریهٔ هم رده را برای یافتن نمایشهای ۲ـگروهها بکار خواهیم برد.

نظریه هم رده دریچه جدیدی به pـگروههای متناهی با ضربگر بدیهی گشوده است . برای عدد اول فرد p، آیک [17] ثابت کرده است که از میان نامتناهی pـگروه متناهی از هم رده r فقط تعدادی متناهی گروه ضربگر بدیهی دارند. این

حکم برای ۲ـگروهها برقرار نیست . آیک و لیدهام‌ـگرین [20] نشان داده‌اند که ۲ـگروههای متناهی از هم رده r به تعدادی متناهی خانوادهٔ نامتناهی و تعدادی متناهی ۲ـگروه دیگر تقسیم می شوند. آیک [17] نشان داده است که برای عدد طبیعی دلخواه r، ۲ـگروههای از هم رده r شامل خانواده هایی نامتناهی است که همه اعضای خانواده ضربگر بدیهی دارند.

نظریه هم رده ابزار قدرتمندی برای مطالعه pـگروههای متناهی از هم رده یکسان r فراهم کرده است . بدین منظور ما ازگراف $\mathcal{G}(p,r)$ استفاده خواهیم کرد.

گراف هم رده $\mathcal{G}(p,r)$ که با pـگروههای از هم رده r مرتبط است، بصورت زیر تعریف می شود. راسهای این گراف رده های هم ارزی از pـگروههای از هم رده r هستند و هر راس نماینده‌ای از یک رده است. دو راس H وG با یال جهتدار (G,H) مرتبط اند اگر وفقط اگر G با خارج قسمت $H/\gamma_c(H)$ یکریخت باشد که در آن $\gamma_c(H)$ آخرین جمله نابدیهی سری مرکزی پایینی گروه H است.

درگراف $\mathcal{G}(p,r)$ گروه H تالی (فرزند) گروه G نامیده می شود هرگاه $G=H$ یا مسیری از G به H وجود داشته باشد. ما گراف $\mathcal{G}(p,r)$ را در صفحه اقلیدسی مانند یک گراف بی جهت در نظر می گیریم بطوریکه تالی های یک گروه پایین تر از آن رسم شده‌است.

ساختار پروـpـگروههای نامتناهی از هم رده متناهی بطورگسترده‌ای مطالعه شده و معلوم است. فرض کنیم S یک پروـpـگروه نامتناهی از هم رده متناهی r باشد. در اینصورت خارج قسمتهای جملات سری مرکزی پایینی S، یعنی $S_i := S/\gamma_i(S)$ ، pـگروههای متناهی بوده و تقریباً همه آنها در $\mathcal{G}(p,r)$ قرار دارند. گروه S می تواند بعنوان حد معکوس گروههای S_i نیز در نظرگرفته شود. هر پروـpـگروه نامتناهی از هم رده متناهی r یک درخت هم رده ماکسیمال بنام $\mathcal{T}(S)$ در $\mathcal{G}(p,r)$ تعریف می کند. $\mathcal{T}(S)$ دقیقاً یک مسیر نامتناهی را شامل است که با S_i ها مشخص می شود. این مسیر نامتناهی یک مسیر اصلی در $\mathcal{G}(p,r)$ نامیده می شود وگروههای این مسیرگروههای مسیر اصلی نامیده می شود. بنا به قضیه D از قضایای هم رده،([31] را ببینید) فقط تعداد متناهی پروـpـگروه نامتناهی از هم رده r وبنابراین تعداد متناهی مسیر نامتناهی در $\mathcal{G}(p,r)$ وجود دارد.

در این رساله یک روش کلی برای ارائه نمایش آزاد برای خانواده‌های نامتناهی از ۲ـگروههای از هم رده یکسان تشریح خواهد شد.

نظریه هم رده حدود ۲۰ سال است که مطرح شده و ابزار قدرتمندی برای رده بندی pـگروههاست. این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول و دوم مقدمات لازم و نظریه هم رده تشریح خواهد شد. در فصل سوم ارتباط این نظریه با نمایشهای گروهها بسط می یابد و در بخش ششم از این فصل نظریه هم رده را برای ارائه نمایشهای ۲ـگروهها بکار خواهیم برد. با مختصرکردن نمایشهای پروـ۲ـگروهها و ارتباط آن با نمایشهای ۲ـگروهها و بکار بردن این روش برای پروـ۲ـگروههای از هم رده یک و دو ثابت خواهیم کرد:

قضیه. تقریباً همهٔ (همه بجز تعدادی متناهی) ۲ـگروههای متناهی از هم رده حداکثر ۲ که ضربگر شور آنها بدیهی است فرادوری بوده و لذا کاستی صفر دارند.

سپس نمایشهایی برای همه ۲ـگروههای متناهی از هم رده حداکثر ۳ و ضربگر شور بدیهی و همچنین نمایشهای

شش خانواده نامتناهی از ۲ـگروههای ۳ـمولدی با ضربگر شور بدیهی ارائه خواهد شد. در فصل چهارم برای p ـگروههای غیرآبلی مینیمال نشان خواهیم داد که برای زیرگروه مشتق این گروهها مجموعه مولد مناسبی وجود دارد که نسبت به آن مجموعه مولد طول فیبوناچی زیرگروه مشتق طول فیبوناچی گروه اصلی را می شمارد. بویژه قضیه زیر ثابت خواهد شد:

قضیه. برای هر p ـگروه غیرآبلی مینیمال مانند G، مجموعه مولدی مانند A' برای G' وجود دارد بطوریکه $LEN_A(G) \mid LEN_{A'}(G')$ که در آن A مجموعه مولد اصلی G است.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشنیازها

۱-۱ مقدمات و تعاریف

تعریف ۱-۱-۱ فرض کنیم p عددی اول است. یک گروه متناهی pـگروه نامیده می شود هرگاه مرتبه‌اش توانی از p باشد.

گزاره ۱-۱-۲ فرض کنیم G یک pـگروه باشد. هر زیرگروه G نیز یک pـگروه است و اندیس آن توانی از p است. اگر H زیر گروه نرمالی از G باشد آنگاه گروه خارج قسمتی G/H یک pـگروه است.

قضیه ۱-۱-۳ یک pـگروه مانند G دارای خواص زیر است:

(۱) $Z(G) \neq 1$.

(۲) اگر H زیرگروه سره G باشد آنگاه $H \subset \mathcal{N}_G(H)$.

(۳) اگر H زیرگروه ماکسیمال G باشد آنگاه $|G : H| = p$.

(۴) اگر H زیرگروه نرمال و نابدیهی G باشد آنگاه $H \cap Z(G) \neq 1$.

تعریف ۱-۱-۴ فرض کنیم G گروهی از مرتبه p^n و رده پوچتوانی c باشد. عدد $n-c$ را هم رده G نامیده و با $cc(G)$ نشان می دهیم.

۱-۲ نمایشهای آزاد گروهها

می دانیم که هرگروه با خارج قسمتی از یک گروه آزاد یکریخت است. این نتیجه ساده مبحثی مهم در نظریه گروهها را بوجود آورده است ، به بیان دیگر گروهها اغلب بصورت خارج قسمتهای گروههای آزاد نمایش داده می شوند.

تعریف ۱-۲-۱ فرض کنیم X یک مجموعه، $F=F(X)$ گروه آزاد بر X و R زیر مجموعه‌ای از F ، $N=\overline{R}$ بستار نرمال R در F و G گروه خارج قسمتی F/N باشد. با این نمادها می نویسیم $G=\langle X|R\rangle$ و آنرا نمایش آزادی برای G می نامیم. عناصر X مولدهای G و عناصر R روابط تعریف کننده G نامیده می شوند.

در نمایش $G=\langle X|R\rangle$ متداول است که R را با $R=1$ عوض می کنند، یعنی با مجموعه $\{r=1|r\in R\}$. همچنین ممکن است یک رابطه به شکل "$u=v$" باشد که با uv^{-1} معادل است.

تعریف ۱-۲-۲ گروه G متناهی نمایش نامیده می شود هرگاه نمایشی داشته باشد که در آن X و R هر دو مجموعه‌های متناهی باشند.

گزاره ۱-۲-۳ ([26, 4.1]) هر گروه نمایشی دارد و هر گروه متناهی، متناهی نمایش است.

مثال ۱-۲-۴ مثالهای زیر به آسانی نتیجه می شوند

(۱) $\langle X|\ \rangle$ نمایشی برای گروه آزاد $F(X)$ است.

(۲) نمایش $\langle x,y|x^3,y^2,x^{-1}y^{-l}xy\rangle$ نمایشی برای گروه دوری از مرتبه ۶ است.

(۳) نمایش $\langle x,y|x^4,y^2,(xy)^2\rangle$ نمایشی برای گروه دووجهی از مرتبه ۸ است.

(۴) بنا به تعریف هر گروه دوری نقش همریختی از $\mathbb{Z}=\langle x|\ \rangle$ است. هسته این همریختی دوری است، بنابراین یا بدیهی است یا بستار نرمال $x^n,\ (n\in\mathbb{N})$ است. لذا نمایش هر گروه دوری بصورت زیر است $\mathbb{Z}=\langle x|\ \rangle,\ C_n=\langle x|x^n\rangle,\ n\in\mathbb{N}$.

گزاره ۱-۲-۵ ([26, 4.2]) اگر $H=\langle X|S\rangle$ و $G=\langle X|R\rangle$ که در آن $R\subseteq S\subseteq F(X)$ ، آنگاه همریختی پوشای $\phi:G\to H$ وجود دارد بطوریکه هر عضو از X را ثابت نگه می دارد و $Ker\phi=\overline{S\setminus R}$. بالعکس هر گروه خارج قسمتی گروه $G=\langle X|R\rangle$ نمایشی مانند $\langle X|S\rangle$ دارد که در آن $S\supseteq R$.

یک گروه مانند G نمایشهای مختلفی می تواند داشته باشد و در نظریه گروهها تبدیل یک نمایش به دیگری کاری متداول است. فرض کنیم $\langle X|R\rangle$ نمایشی برای گروه دلخواه G باشد و r عضو دلخواهی از $N=\overline{R}$. فرض کنیم $R'=R\cup\{r\}$. واضح است که هر دو نمایش $\langle X|R'\rangle$ و $\langle X|R\rangle$ گروه G را تعریف می کنند. مجدداً با فرض نمایش

$\langle X|R\rangle$ برای گروه G قرار می دهیم $X' = X \cup \{x\}$ که در آن $x \notin X$. فرض کنیم w عضوی از F باشد و قرار می دهیم $R' = R \cup \{r\}$ که در آن $r = x^{-1}w$. به آسانی ملاحظه می شود که $\langle X'|R'\rangle$ و$\langle X|R\rangle$ با گروه G یکریخت هستند. بصورت دقیقتر می توان گفت :

گزاره ۱-۲-۶ ([26, 4.5]) فرض کنیم $G = \langle X|R\rangle$ ، $F = \langle X|\ \rangle$ و که در آن $w, r \in F$ بطوریکه w عضو دلخواهی از F است و $r \in \overline{R} \setminus R$. اگر y عنصری دلخواه خارج X باشد آنگاه هر دو نگاشت

$$X \to \langle X|R, r\rangle$$

$$X \to \langle X, y|R, y^{-1}w\rangle$$

را می توان به یکریختیهای با دامنه G توسیع داد.

یکریختیهای گزاره قبل و معکوسهای آنها چهار طریق برای تبدیل یک نمایش به نمایشی دیگر به دست می دهد. این تبدیلات را تبدیلات تی ـیتز می نامند و بصورت زیر تعریف می شوند:

تعریف ۱-۲-۷ چهار تبدیل تی ـ یتز با علامتهای $R+,\ R-,\ X+,\ X-$ نشان داده می شوند و

(۱) تبدیل $R+$ اضافه کردن رابطه نامیده می شود و نمایش $\langle X|R\rangle$ را به نمایش $\langle X|R, r\rangle$ تبدیل می کند که در آن $r \in \overline{R} \setminus R$.

(۲) تبدیل $R-$ حذف یک رابطه نامیده می شود و نمایش $\langle X|R\rangle$ را به نمایش $\langle X|R \setminus \{r\}\rangle$ تبدیل می کند که در آن $r \in R \cap \overline{R \setminus \{r\}}$.

(۳) تبدیل $X+$ اضافه کردن یک مولد نامیده می شود و نمایش $\langle X|R\rangle$ را به نمایش $\langle X, y|R, y^{-1}w\rangle$ تبدیل می کند که در آن $w \in F$ و $y \notin X$.

(۴) تبدیل $X-$ حذف یک مولد نامیده می شود و نمایش $\langle X|R\rangle$ را به نمایش $\langle X \setminus \{y\}|R \setminus y^{-1}w\rangle$ تبدیل می کند که در آن $y \in X,\ w \in F(X \setminus \{y\})$ و $y^{-1}w$ تنها رابطه‌ای در R است که شامل y است .

گزاره ۱-۲-۸ ([26, 4.6]) دو نمایش مفروض، گروههای یکریخت تعریف می کنند اگر و فقط اگر با بکار بردن تعدادی متناهی تبدیل تی ـ یتز یک نمایش را بتوان به دیگری تبدیل کرد.

تبدیلات تی ـ یتز ابزاری مفیدند بویژه هرگاه بخواهیم نشان دهیم دو نمایش موجود گروههای یکسانی تعریف می کنند. همچنین برای مختصر کردن نمایشها از این تبدیلات استفاده می شود.

فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. می دانیم زیرگروه مشتق گروه G که با علامت G' نشان داده می شود با مجموعه همه تعویضگرهای عناصر G تولید می شود یعنی $G' = \langle\{g^{-1}h^{-1}gh|g, h \in G\}\rangle$. می دانیم G' زیرگروه نرمال G است و $G_{ab} := G/G'$ گروهی آبلی است . علاوه براین G' کوچکترین زیرگروه نرمالی است که خارج قسمت آن آبلی

است ، به عبارت دقیقتر اگر $N \trianglelefteq G$ آنگاه G/N آبلی است اگر و فقط اگر $G' \subseteq N$. G_{ab} را اغلب آبلی شدهٔ G می نامند و یک پایای گروه G است .

روشن است که هر نمایش مانند $\langle X|R\rangle$ گروهی مانند G را تعریف می کند. از طرف دیگر گاهی لازم است برای گروهی مانند G که بطریقی غیر از نمایش آزاد معرفی شده است ، نمایشی ارائه داد. روش معمول برای این کار بصورت زیر است : ابتدا مجموعه مولدی مانند X برای گروه G می یابیم و سپس روابطی بر حسب عناصر X که در G برقرارند را نوشته با احتساب اینکه این روابط برای تعریف G کافی هستند، سعی می کنیم با قرار $H = \langle X|R\rangle$ نشان دهیم همریختی پوشای گزاره ۵.۲.۱ یکریختی است .

گزاره ۱-۲-۹ ([26, 6.1]) فرض کنیم $r \in \mathbb{N}$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. اگر $G = \langle X|R\rangle$ آنگاه $G_{ab} = \langle X|R, C\rangle$ که درآن $C = \{[x_i, x_j] | 1 \leq i < j \leq r\}$.

گزاره ۱-۲-۱۰ ([26, 6.2]) اگر $G = \langle X|R\rangle$ نمایشی متناهی از گروه متناهی G باشد آنگاه $|X| \leq |R|$.

تعریف ۱-۲-۱۱ کاستی یک نمایش متناهی مانند $\langle X|R\rangle$ عبارت است از عدد $|X| - |R|$. کاستی یک گروه مانند G عبارت است از ماکزیمم کاستی‌های همه نمایشهای متناهی آن گروه . کاستی گروه G را با علامت $\mathrm{def}(G)$ نشان می دهیم.

۱-۳ گروههای کوهمولوژی و ضربگر شور

گزاره ۱-۳-۱ فرض کنیم R یک حلقه و α یک Rـهمریختی از A به A' باشد. α یک همریختی گروههای آبلی مانند α^* از $\mathrm{Hom}_R(A', B)$ به $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ بصورت زیر القا می کند: اگر $f \in \mathrm{Hom}_R(A', B)$ در اینصورت $\alpha^*(f)$ عضوی از $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ است که هر عضو مانند a از A را به $f(\alpha(a))$ می نگارد یعنی

$$\alpha^*(f)(a) = f(\alpha(a))$$

اگر β و α دو Rـهمریختی از A به A' باشند آنگاه $(\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$. اگر γ یک Rـهمریختی از A' به Rـمدول دیگر A'' باشد، در اینصورت داریم $(\alpha\gamma)^* = \gamma^*\alpha^*$

ملاحظه می شود که هرگاه R حلقه‌ای جابجائی باشد، همریختیهای گزاره قبل R ـهمریختی هستند.

تعریف ۱-۳-۲ یک دنباله مانند

$$\cdots \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

از Rـمدولها و Rـهمریختیها یک رشته دقیق تشکیل می دهند، هرگاه به ازای هر n داشته باشیم $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$

قضیه زیر نتیجه گزاره ۱.۳.۱ است .

قضیه ۱-۳-۳ ([38, 2.40]) اگر رشته

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

دقیق باشد و اگر Y یک Rـمدول باشد، آنگاه رشته زیر از Rـمدولها و Rـهمریختیها دقیق است

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A,Y),$$

که در آن f^* مانند گزاره ۱.۳.۱ تعریف می شود.

قضیه ۱-۳-۴ ([38, 2.38]) اگر رشته

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

دقیق باشد آنگاه رشته دقیق زیر از Rـمدولها و Rـهمریختیها را خواهیم داشت

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X,B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(X,C),$$

که در آن f_* بطریقی مشابه با f^* تعریف می شود.

فرض کنیم $\Gamma = \mathbb{Z}G$. می توان $\mathbb{Z}$ را بعنوان یک Γـمدول در نظر گرفت با ضرب اسکالر $(\sum n_g g)n = (\sum n_g)n$. تحت این شرایط، $\mathbb{Z}$ را Γـمدول بدیهی می نامند.

تعریف ۱-۳-۵ یک دنباله مانند $\mathcal{X}$ شامل Γـمدولهای آزاد X_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ و Γـهمریختیهای d_i رزولوشن آزاد برای $\mathbb{Z}$ نامیده می شود هرگاه رشته

$$\mathcal{X} : \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

دقیق باشد.

تعریف ۱-۳-۶ فرض کنیم A یک Γـمدول و

$$\mathcal{X} : \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

یک رزولوشن آزاد $\mathbb{Z}$ باشد. در اینصورت دنباله زیر از گروههای آبلی و همریختی آنها را خواهیم داشت

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(X_1, A) \xleftarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_\Gamma(X_0, A) \xleftarrow{d_0^*} \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathbb{Z}, A) \longleftarrow 0$$

که در آن $d_i^* : \mathrm{Hom}_R(X_{i-1}, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X_i, A)$ همریختی‌ای القا شده توسط d_i است. با توجه به گزاره ۱.۳.۵ نتیجه می شود $d_{i+1}^* d_i^* = 0$ بنابراین $\mathrm{Im}d_i^* \subseteq \mathrm{Ker}d_{i+1}^*$. گروه خارج قسمتی

$$\mathrm{H}^n(G,A) = \mathrm{Ker}d_{i+1}^*/\mathrm{Im}d_i^*$$

را nـامین گروه کوهمولوژی مدول A نسبت به Γ گویند.

قضیه ۱-۳-۷ (**[45, 7.21]**) گروه کوهمولوژی $\mathrm{H}^n(G,A)$ بطور منحصربفرد توسط A و G مشخص می شود و مستقل از انتخاب رزولوشن آزاد است .

فرض کنیم G و A بترتیب یک گروه دلخواه و یک گروه آبلی باشند. همچنین فرض کنیم به ازای هر عضو مانند g از G و هر عضو a از A، عضو منحصربفردی از A مانند a^g وجود داشته باشد بطوریکه

$$\begin{aligned} (ab)^g &= a^g b^g \qquad (a,\ b \in A,\ g \in G) \\ (a^x)^y &= a^{xy} \qquad (a \in A,\ x,\ y \in G) \\ a^{۱} &= a \qquad (a \in A), \end{aligned}$$

در اینصورت گوئیم G بر A عمل می کند(یا بعبارت دیگر A یک $\mathbb{Z}G$ـمدول است).

یک نگاشت مانند f از حاصلضرب مستقیم n نسخه از گروه G به توی A را یک n ـکوچین می نامیم. یک nـکوچین مانند f را نرمال شده گوئیم هرگاه به ازای هر nـتائی از عناصر G مانند $(g_۱,\ldots,g_n)$ که در آن حداقل یک g_i عنصر همانی G باشد، داشته باشیم $f(g_۱,g_۲,\ldots,g_n)=۱$. مجموعه همه nـکوچین های نرمال شده که با $C^n(G,A)$ نشان داده می شود، همراه با ضرب توابع تشکیل گروهی آبلی می دهد. در صورتی که $n=۰$، قرار می دهیم $C^{۰}(G,A)=A$. اکنون نگاشت تعریف شده با

$$\begin{aligned} (d_{k+۱}f)(g_۱,\ldots,g_{k+۱}) &= f(g_۲,\ldots,g_{k+۱}) \\ &\times \prod_{i=۱}^{k} f(g_۱, \quad \ldots \quad, g_ig_{i+۱},\ldots,g_{k+۱})^{(-۱)^i}(f(g_۱,\ldots,g_k)^{(-۱)^{k+۱}})^{g_{k+۱}} \end{aligned}$$

همریختی‌ای تعریف می کند مانند $d_{k+۱}:C^k(G,A)\to C^{k+۱}(G,A)$. قرار می دهیم $B^n(G,A)=\mathrm{Im}\ d_n$ و $Z^n(G,A)=\mathrm{Ker}\ d_{n+۱}$ و عناصر $B^n(G,A)$ و $Z^n(G,A)$ را به ترتیب nـکوباندری و nـکوسایکل می نامیم .

فرض کنیم $n=۱$، در اینصورت $f\in Z^{۱}(G,A)$ اگر و فقط اگر $f(xy)=f(x)^y f(y)$ ، به ازای هر $x,y\in G$. چنین نگاشتی را یک همریختی متقاطع می نامیم .

با توجه به تعریف، $B^{۱}(G,A)$ شامل توابعی مانند $f:G\to A$ است که به ازای آنها عضو $a\in A$ چنان وجود داشته باشد که $f(g)=a(a^{-۱})^g$. چنین نگاشتی را همریختی متقاطع اصلی می نامند. بنابراین اگر عمل G بر A بدیهی باشد، $\mathrm{H}^{۱}(G,A)$ با مجموعه همه همریختیهای از G به A یعنی $\mathrm{Hom}(G,A)$ یکی است .

اکنون فرض می کنیم $n=۲$ در اینصورت $f\in Z^{۲}(G,A)$ اگر و فقط اگر به ازای هر $x,y,z\in G$ ،

$$f(x,y)^z f(xy,z)=f(y,z)f(x,yz)$$

و همچنین $f\in B^{۲}(G,A)$ اگر و فقط اگر تابع $t:G\to A$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $x,y\in G$ داشته باشیم

$$f(x,y)=t(y)t(xy)^{-۱}t(x)^y$$

تعریف ۱-۳-۸ فرض کنیم Q و K گروه باشند. یک توسیع K توسط Q عبارت است از رشته دقیق و کوتاه $1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 1$.

فرض کنیم $G = \langle X|R\rangle$ ، $A = \langle Y|S\rangle$ و $1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$ توسیعی از A توسط G باشد که در آن i نگاشت شمول است . فرض کنیم $\hat{X} = \{\hat{x}|x \in X\}$ ترانسورسالی برای A در E باشد بطوریکه $\hat{x}\nu = x$ برای هر x از X. بعلاوه به ازای هر r از R، فرض کنیم $\hat{r}$ عبارت باشد ازکلمه ای در $\hat{X}$ که از r با تعویض x با $\hat{x}$ بدست آمده است . حال تصویر هرکلمه $\hat{r}$ در G توسط ν عضو همانی است، بنابراین به ازای هر $r \in R$ ، داریم $\hat{r} \in \mathrm{Ker}\nu = A$ و چون A توسط Y تولید می شود، هر r از R را می توان بر حسب عناصر Y نوشت که فرض می کنیم u_r کلمه موردنظر باشد. قرار می دهیم $\hat{R} = \{\hat{r}u_r^{-1}|r \in R\}$. چون A در E نرمال است لذا هر مزدوج $\hat{x}^{-1}y\hat{x}$ که در آن $y \in Y$ و $\hat{x} \in \hat{X}$، مشمول A است و بنابراین کلمه ای است در Y مانند $w_{x,y}$. با قرار

$$T = \{\hat{x}^{-1}y\hat{x}w_{x,y}|x \in X, y \in Y\},$$

نتیجه زیر را خواهیم داشت :

گزاره ۱-۳-۹ ([26, 10.1]) با علامات بالا گروه E نمایشی بصورت زیر دارد

$$E = \langle \hat{X}, Y|\hat{R}, S, T\rangle.$$

تعریف ۱-۳-۱۰ فرض کنیم K و Q گروه باشند. دو توسیع مانند $1 \to K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \to 1$ و $1 \to K \xrightarrow{j} F \xrightarrow{q} Q \to 1$ را هم ارز گویند هرگاه همریختی‌ای مانند $\phi : E \to F$ وجود داشته باشد بطوریکه دیاگرام زیر جابجائی شود.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & Q & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_K} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle 1_Q} & & \\
1 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & F & \xrightarrow{q} & Q & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

متداول است برای سادگی می گوئیم E و F توسیعهای هم ارز هستند.

اگر K گروهی آبلی باشد در اینصورت عمل Q روی K آنرا به یک $\mathbb{Z}Q$ـمدول تبدیل می کند بطوریکه ضرب اسکالر بصورت زیر تعریف می شود: $xa = a^x$ به ازای هر $x \in Q$ و $a \in K$.

تعریف ۱-۳-۱۱ توسیع $1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 1$ را جدا شدنی گوئیم هرگاه همریختی $j : Q \to E$ چنان وجود داشته باشد که $pj = id_Q$. در این حالت گروه E را حاصلضرب نیم مستقیم K توسط Q می نامند و با علامت $K \rtimes Q$ نشان می دهند.

تعریف ۱-۳-۱۲ توسیع $1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 1$ را مرکزی نامیم هرگاه $i(K) \subseteq Z(E)$.

قضیه ۱-۳-۱۳ فرض کنیم K یک Qـمدول بوده و $e(Q,K)$ مجموعه همه رده های هم ارزی توسیعهای K بوسیله Q باشد. آنگاه تناظر یک به یکی بین عناصر $\mathrm{H}^{۲}(Q,K)$ و اعضای $e(Q,K)$ وجود دارد مانند

$$\phi : \mathrm{H}^{۲}(Q,K) \longrightarrow e(Q,K)$$

علاوه بر این

۱) اگر عمل Q بر K بدیهی باشد آنگاه $e(Q,K)$ مجموعه کلاسهای هم ارزی توسیعهای مرکزی K بوسیله Q است .

۲) ϕ صفر را به رده هم ارزی توسیعهای جدا شدنی می نگارد.

اکنون فرض کنیم G و A گروههای آبلی باشند و $f \in Z^{۲}(G,A)$. گوئیم f متقارن است در صورتیکه $f(x,y) = f(y,x)$ به ازای هر x و y از G. بدیهی است اگر $g \in B^{۲}(G,A)$ آنگاه g متقارن است ، لذا زیرگروه زیر از $\mathrm{H}^{۲}(G,A)$ را داریم :

تعریف ۱-۳-۱۴

$$\mathrm{Ext}(G,A) = \{\overline{f} \in \mathrm{H}^{۲}(G,A) | f \ \ is\ symmetric\},$$

که در آن $\overline{f}$ رده هم ارزی f در $Z^{۲}(G,A)$ است .

به آسانی بررسی می شود که تناظر یک به یکی بین کلاسهای هم ارزی توسیعهای آبلی A بوسیله G و عناصر $\mathrm{Ext}(G,A)$ برقرار است .(برای مثال مراجعه کنید به [28, 1.4.2])

نکته ۱-۳-۱۵ رزولوشن آزادی برای $\mathbb{Z}$ مانند

$$\cdots \longrightarrow B_n \xrightarrow{d_n} B_{n-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_۱ \xrightarrow{d_۱} B_۰ \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \longrightarrow ۰,$$

وجود دارد که رزولوشن استاندارد خوانده می شود بطوریکه به ازای هر Γـمدول مانند A ، $\mathrm{Hom}(B_n,A)$ با گروه جمعی $C^n(G,A)$ یکریخت است (برای مثال مراجعه شود به *[45]*) بنابراین با توجه به تعریف nـامین گروه کوهمولوژی، داریم

$$.\mathrm{H}^n(G,A) = Z^n(G,A)/B^n(G,A)$$

تعریف ۱-۳-۱۶ فرض کنیم G گروهی متناهی و $\mathbb{C}^*$ گروه ضربی اعداد مختلط ناصفر باشد. بعلاوه فرض کنیم G بطور بدیهی بر $\mathbb{C}^*$ عمل کند. دومین گروه کوهمولوژی $\mathrm{H}^{۲}(G,\mathbb{C}^*)$ نسبت به عمل بدیهی را ضربگر شور گروه G نامیده و با علامت $M(G)$ نشان می دهیم .

بنا به تعریف ، $M(G)$ گروهی آبلی است . نشان داده شده است که $M(G)$ گروهی متناهی است که مرتبه‌اش مرتبه G را عاد می کند.(مراجعه شود به [28])

طریق دیگری برای تعریف ضربگر شور یک گروه وجود دارد:

تعریف ۱-۳-۱۷ برای گروه متناهی $G = \langle X|R\rangle$ ، ضربگر شور G بصورت $M(G) = (F' \cap \overline{R})/[F, \overline{R}]$ تعریف می شود که در آن $\overline{R}$ عبارتست از بستار نرمال R در $F = F(X)$.

در سال ۱۹۰۷ ، شور ([41] را ببینید) ثابت کرد که ضربگر شور گروه G

۱) پایای گروه G است یعنی به نمایش $\langle X|R\rangle$ بستگی نداشته و فقط به گروه G بستگی دارد.

۲) گروهی متناهی و آبلی است .

۳) با حداکثر $\mathrm{def}(G)-$ عضو تولید می شود.

تعریف ۱-۳-۱۸ گروه G را فرادوری می نامیم هرگاه زیرگروه نرمالی مانند N داشته باشد بطوریکه N و G/N هر دو دوری باشند.

گزاره ۱-۳-۱۹ ([26, 7.1]) فرض کنیم

$$G = \langle x, y | x^m = ۱, x^y = x^r, y^n = x^s\rangle,$$

که در آن $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ و $r, s \leq m$ ، $r^n \equiv ۱ \pmod m$ و $rs \equiv s \pmod m$. در اینصورت $N = \langle x\rangle$ زیرگروهی نرمال از G است بطوریکه

$$N \cong C_m,\ G/N \cong C_n$$

بنابراین G گروهی فرادوری و متناهی است . علاوه براین هر گروه فرادوری متناهی نمایشی مانند فوق دارد.

گزاره ۱-۳-۲۰ ([26, 7.2]) فرض کنیم

$$G = \langle x, y | x^m = ۱, x^y = x^r, y^n = x^s\rangle,$$

که در آن $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ و

$$r^n \equiv ۱ \pmod m$$

$$s = m/\gcd(m, r - ۱)$$

آنگاه G را با همان مولدهای yو x می توان بصورت

$$\langle x, y | y^n = x^s, [y, x^{-t}] = x^{m/s}\rangle,$$

نمایش داد که در آن t عددی صحیح است .

فصل ۲

پرو-p-گروهها و گروههای پرو-متناهی

۲-۱ گروههای توپولوژیک

تعریف ۲-۱-۱ یک گروه توپولوژیک گروهی است که یک توپولوژی بر مجموعه زمینه آن چنان وجود دارد که نگاشتهای

$$g \mapsto g^{-1} : G \to G$$

و

$$(g, h) \mapsto gh : G \times G \to G$$

تحت آن توپولوژی پیوسته‌اند.

گزاره ۲-۱-۲ ([9, 0.17]) فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. در اینصورت

۱) برای هر g از G نگاشتهای $x \mapsto xg$، $x \mapsto x^{-1}$ و$x \mapsto gx$ هومئومورفیسم‌اند.

۲) اگر H زیرگروه بازی(بسته‌ای) از G باشد آنگاه هر همدست H زیرمجموعه بازی(بسته‌ای) از G است .

۳) هر زیرگروه باز G بسته نیز است .

۴) G هاسدورف است اگر و فقط اگر زیرگروه بدیهی G بسته باشد.

۵) اگر G هاسدورف و N زیرگروه نرمال و بسته G باشد آنگاه G/N با توپولوژی خارج قسمتی هاسدورف است .

۶) اگر زیرگروه H از G شامل یک زیرمجموعه باز و ناتهی از G باشد آنگاه H باز است .

۲-۲ گروههای پرو-متناهی

اگر G گروهی توپولوژیک و X زیر مجموعه ای از G باشد، می نویسیم $\overline{X}$ برای نشان دادن بستار X در G و $\langle X \rangle$ برای نشان دادن زیرگروه تولید شده توسط زیر مجموعه X. می نویسیم $X \leq_o G$ ، $X \leq_c G$ ، $X \lhd_o G$ و $X \lhd_c G$ ، بترتیب برای نشان دادن اینکه X زیرگروه باز ،زیرگروه بسته ، زیرگروه نرمال باز و زیرگروه نرمال بسته G است .

تعریف ۲-۲-۱ یک گروه پرو-متناهی گروهی توپولوژیک است که فشرده و هاسدورف بوده و گردایه زیرگروههای باز آن تشکیل پایه‌ای در نقطه همانی دهند.

بنابراین یک گروه توپولوژیک گسسته پرو-متناهی است اگر و فقط اگر متناهی باشد. چون در یک گروه توپولوژیک هرگاه زیرگروهی شامل یک مجموعه باز ناتهی باشد، خود باز است بنابراین تعریف معادلی برای گروه پرو-متناهی بصورت زیر بدست می آید.

یک گروه پرو-متناهی گروهی توپولوژیک است که فشرده و هاسدورف بوده و هر زیرمجموعه باز شامل ۱ ، شامل زیرگروهی باز است . تعاریف معادل زیادی برای گروه توپولوژیک وجود دارد که مهمترین آن درگزاره ۳.۲.۲ بیان خواهد شد. ابتدا چند نتیجه از تعریف ۱.۲.۲ بیان می کنیم .

گزاره ۲-۲-۲ (**[9, 1.2]**) فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. در اینصورت

۱) هر زیرگروه باز G بسته است .

۲) یک زیرمجموعه از G باز است اگروفقط اگر اجتماعی از همدستهای زیرگروههای باز و نرمال G باشد.

۳) برای هر زیرمجموعه مانند X از G داریم

$$\overline{X} = \bigcap_{N \lhd_o G} XN.$$

اگر X زیرگروهی از G باشد در اینصورت $\overline{X} = \bigcap \{K | X \leq K \leq_o G\}$.

۴) اگر X و Y زیرمجموعه های بسته G باشند آنگاه مجموعه $XY = \{xy | x \in X, y \in Y\}$ نیز بسته است .

۵) فرض کنیم H زیرگروه بسته‌ای از G باشد. آنگاه H با توپولوژی القایی یک گروه پرو-متناهی است . هر زیرگروه باز H به شکل $H \cap K$ است که در آن $K \leq_o G$.

۶) فرض کنیم N زیرگروه نرمال و بسته G باشد. آنگاه G/N با توپولوژی خارج قسمتی یک گروه پرو-متناهی است و همریختی طبیعی $G \longrightarrow G/N$ نگاشتی پیوسته باز و بسته است .

۷) یک دنباله مانند (g_i) در G همگراست اگر و فقط اگر کشی باشد، یعنی برای هر $N \lhd_o G$ وجود داشته باشد $n = n(N)$ بطوریکه $g_i^{-1}g_j \in N$ به ازای هر $i \geq n$ و $j \geq n$.

تعریف دومی برای گروه پرو-متناهی بر اساس مفهوم حد معکوس وجود دارد. اگر G_λ گردایه‌ای از گروههای متناهی باشد، هرکدام از عناصر گردیه را با توپولوژی گسسته و $\prod G_\lambda$ را با توپولوژی حاصلضربی در نظر گرفته و ملاحظه می کنیم که $\varprojlim G_\lambda$ با توپولوژی القایی یک گروه توپولوژیک است . اگر Λ گردایه‌ای از زیرگروههای نرمال گروه G باشد می توان Λ را با عکس شمول جزئاً مرتب کرده و دستگاه معکوس $(G/N)_{N\in\Lambda}$ را بدست آورد که در آن نگاشتهای دستگاه همریختیهای طبیعی $G/N \to G/M$ به ازای $N \leq M$ هستند.

گزاره ۲-۲-۳ ([9, 1.3]) اگر G گروهی پرو-متناهی باشد آنگاه G با $\varprojlim (G/N)_{N\lhd_o G}$ یکریخت است . بالعکس حد معکوس هر دستگاه معکوس از گروههای متناهی گروهی پرو-متناهی است .

در اینجا خاصیتی را در مورد وجود حدهای معکوس یادآور می شویم که در نتیجه‌گیری خواص گروههای پرو-متناهی از روی خواص خارج قسمتهای متناهی آن مفید است .

گزاره ۲-۲-۴ ([9, 1.4]) فرض کنیم $(X_\lambda;\ \pi_{\lambda\mu})$ دستگاه معکوسی از فضاهای توپولوژیک ناتهی فشرده بر مجموعه جهتدار Λ باشد. آنگاه $\varprojlim X_\lambda$ ناتهی است .

گزاره ۴.۲.۲ می تواند بر دستگاههای معکوس از گروههای متناهی اعمال شود زیرا گروههای متناهی با توپولوژی گسسته فشرده‌اند.

زیرمجموعه X از گروه توپولوژیک G را مجموعه مولد G می نامند هرگاه $G = \overline{\langle X\rangle}$. گروه توپولوژیک G را متناهی مولد گویند هرگاه مجموعه مولدی متناهی داشته باشد.

گزاره ۲-۲-۵ ([9, 1.5]) فرض کنیم G گروهی پرو-متناهی باشد و H زیرگروهی بسته از آن .

۱) فرض کنیم $X \subseteq H$. آنگاه X گروه H را تولید می کند اگر و فقط اگر به ازای هر $N \lhd_o G$ مجموعه XN/N گروه HN/N را تولید کند.

۲) فرض کنیم d عددی صحیح و مثبت باشد. اگر به ازای هر $N \lhd_o G$ گروه خارج قسمتی HN/N با d عضو تولید شود آنگاه H نیز با d عضو تولید می شود.

گزاره ۲-۲-۶ ([9, 1.6]) اگر G گروهی پرو-متناهی و متناهی مولد باشد و m عددی طبیعی آنگاه G فقط تعداد متناهی زیرگروه باز از اندیس m دارد و هر زیرگروه باز شامل یک زیرگروه مشخص باز است .

گزاره ۲-۲-۷ ([9, 1.7]) اگر G گروهی پرو-متناهی و متناهیا تولید شده باشد آنگاه هر زیرگروه باز G با تولید متناهی است .