وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه علوم پایهٔ دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض به عنوان بخشی از فعالیتهای لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

پایداری اولام—گاوروتا—راسیاس معادله تابعی خطی

توسط:

جعفر پاشایی حاجی‌کندی

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا عباسپور

استاد مشاور:

دکتر نرگس تولایی

اسفند ۱۳۸۸

چکیده

پایداری اولام—گاوروتا—راسیاس معادله تابعی خطی

بوسیله

جعفر پاشایی حاجی‌کندی

در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی و بررسی پایداری اولام—گاوروتا—راسیاس معادله تابعی جمعی کشی

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

در فضاهای نرمدار و در ادامه به بررسی پایداری معادله تابعی جمعی کشی در فضاهای ناارشمیدسی می‌پردازیم. سپس به بررسی نتایج به دست آمده در مورد پایداری هایرز—اولام—راسیاس برای تعمیم یافته معادله تابعی خطی کشی

$$f(x+y+a)=f(x)+f(y)$$

در فضاهای نرمدار خواهیم پرداخت. در نهایت پایداری اولام—گاوروتا—راسیاس معادله تابعی

$$f(x+y+a)+f(x+y+b)=۲f(x)+۲f(y)$$

را در فضاهای نرمدار بررسی خواهیم کرد.

واژگان کلیدی: معادله تابعی کشی، پایداری هایرز—اولام—راسیاس.

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از مهمترین شاخه‌های معادلات تابعی مربوط به پایداری این گونه معادلات است. در این زمینه اولین مسأله پایداری همریختی‌ها در سال ۱۹۴۰ توسط م.اولام[۱] از دانشگاه ویسکانسین [۲] به صورت زیر مطرح شد؛ فرض کنیم $G_۱$ یک گروه و $G_۲$ یک گروه متریک با متر d باشد، برای ϵ داده شده آیا یک $\delta > ۰$ موجود است به طوری که اگر برای هر $x, y \in G_۱$، نگاشت $h : G_۱ \to G_۲$ در رابطه $d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$ صدق کند، آنگاه همریختی‌ای مانند $H : G_۱ \to G_۲$ با شرط $d(h(x), H(x)) < \epsilon$ برای هر $x \in G_۱$ موجود باشد؟

در سال بعد هایرز [۳] در حالت خاص در فضاهای باناخ مسأله را حل کرد. هایرز نشان داد که اگر X, Y فضاهای باناخ باشند و برای یک $\epsilon > ۰$ و هر $x, y \in X$، تابع $f : X \to Y$ که در نامساوی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

صدق کند، آنگاه برای هر $x \in X$، حد $a(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(۲^n x)}{۲^n}$ موجود است و نامساوی $\|f(x) - a(x)\| \leq \epsilon$ برای هر $x \in X$، برقرار می‌باشد. به علاوه اگر نگاشت $t \to f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به Y برای هر x ثابت، پیوسته باشد آنگاه a خطی است.

مسئله هایرز در حالات مختلفی تعمیم داده شد. به ویژه راسیاس [۴] [۱۸] و گاجدا [۵] [۴] مسأله هایرز را به صورتهای مختلفی تعمیم دادند. در این پایان‌نامه نتایج به دست آمده در مورد پایداری هایرز—اولام—راسیاس

[۱] S. M. Ulam

[۲] Wisconsin

[۳] D. H. Hyers

[۴] Th. M. Rassias

[۵] Z. Gajda

را برای معادله تابعی جمعی کشی در فضاهای باناخ و ناارشمیدسی بررسی می‌کنیم. در ادامه نوع جدید معادله تابعی خطی در فضاهای باناخ را معرفی می‌کنیم و اثباتی از پایداری تعمیم یافته‌ی معادله تابعی خطی بیان خواهد شد.

ابتدا معادله تابعی جمعی کشی را معرفی کرده و به نتایجی از پایداری این معادله تابعی اشاره‌ای خواهیم داشت. معادله تابعی

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

را معادله تابعی کشی می‌نامیم. هر جواب معادله تابعی مذکور را جمعی می‌نامیم. اگر بخواهیم به زبانی ساده توصیفی از پایداری ارائه کنیم شاید مطلب زیر ساده‌ترین بیان مفهوم پایداری باشد.

فرض کنیم یک شیء ریاضی در یک خاصیت تقریبی صدق کند. اگر بتوانیم این شیء را با یک شیء که در آن خاصیت صدق کند، تقریب بزنیم گوییم آن خاصیت پایدار است.

در سال ۱۹۷۷ راسیاس به سوالی درباره پایداری معادله کشی برخورد کرد[۱۸]. سپس در سال ۱۹۷۸ جوابی برای آن ارایه کرد. روشی که راسیاس بکار برد شبیه روش هایرز می باشد. در این روش نیازی به کراندار بودن اختلاف کشی نمی باشد. نتیجه راسیاس به صورت زیر می‌باشد.

فرض کنیم E_1 و E_2 دو فضای باناخ باشد و $f: E_1 \to E_2$ یک تابع باشد. نیز فرض کنیم $\epsilon > 0$ و $p \in [0,1)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in E_1$ در

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)$$

صدق کند. آنگاه نگاشت جمعی یکتای $A: E_1 \to E_2$ وجود دارد که برای هر $x \in E_1$،

$$\|f(x)-A(x)\| \leq \frac{2\epsilon}{2-2^p}\|x\|^p$$

پس از آن گاوروتا [6] [۵] در سال ۱۹۹۴ نتیجه راسیاس را به صورت زیر تعمیم داد.

فرض کنیم $(G,+)$ یک گروه آبلی و $(X,\|.\|)$ فضای باناخ و نگاشت $\varphi: G\times G \to [0,\infty)$ به گونه‌ای باشد

---

[6] P. Gavruta

که برای هر $x, y \in X$

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(2^k x, 2^k y) < \infty$$

و $f : G \to X$ یک تابع که به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varphi(x,y)$$

آنگاه تابع جمعی یکتای $A : G \to X$ موجود است که به ازای هر $x \in G$

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x,x)$$

لازم به ذکر است کارهای راسیاس در این زمینه هم‌اکنون نیز ادامه دارد. با توجه به اینکه مسأله پایداری معادلات تابعی کاربردهای زیادی در ریاضیات کاربردی و آنالیز ریاضی دارد، این مسأله به طور گسترده توسط تعداد زیادی از محققان بررسی شده است. با توجه به تأثیرات زیاد راسیاس و هایرز در مورد بررسی مسائل پایداری، نوعی از پایداری معادلات تابعی را که به وسیله راسیاس در سال ۱۹۷۸ در [۱۸] معرفی و اثبات شد، پایداری هایرز—اولام—راسیاس می‌نامند.

این پایان‌نامه شامل ۳ فصل می باشد.

فصل اول شامل تعریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در سراسر این پایان‌نامه است. در فصل دوم به بررسی پایداری هایرز—اولام—راسیاس معادله تابعی جمعی کشی در فضاهای باناخ و ناارشمیدسی می‌پردازیم.

سرانجام در فصل سوم به بررسی پایداری تعمیم یافته هایرز—اولام—راسیاس در فضاهای باناخ برای نوع جدید معادله تابعی خطی خواهیم پرداخت.

لازم به ذکر است منابع پایه و اصلی این پایان‌نامه مراجع [۱]، [۲]، [۴]،[۵]، [۹]،[۱۲]، [۱۸] و [۲۱] می‌باشد.

فصل ۱

پیش نیاز ها

در این فصل به بیان بعضی از تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در سراسر این پایان‌نامه مورد نیاز است. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۲۰] و [۲۱] می‌باشد و خواننده می‌تواند برای مشاهدهٔ برهان قضایایی که در اینجا ذکر نگردیده است به این مراجع رجوع کند. از آوردن بعضی از برهان‌ها صرف‌نظر می‌کنیم ولی برهان چندتایی که جالبتر به نظر می‌آیند را ذکر می‌کنیم.

۱—۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱—۱.۱ فضای برداری. یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$، مجموعه‌ای است مانند X همراه با عملگرهای جمع $X \times X \to X$ و ضرب اسکالر $\mathbb{F} \times X \to X$ که در خواص زیر صدق کند.

الف) به ازای هر $\alpha, \beta \in X$، $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

ب) به ازای هر $\alpha, \beta, \gamma \in X$، $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

ج) عنصر $\circ \in X$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $\alpha \in X$ داشته باشیم

$$\alpha + \circ = \circ + \alpha = \alpha$$

د) به ازای هر $\alpha \in X$، عنصری مانند $\beta \in X$ موجود باشد به طوری که

$$\alpha + (\beta) = \beta + \alpha = 0$$

و) اگر $1 \in \mathbb{F}$ عنصر واحد $\mathbb{F}$ باشد. به ازای هر $\alpha \in X$ داریم $1 \cdot \alpha = \alpha$.

ه) به ازای هر $c, d \in \mathbb{F}$ و $\alpha, \beta \in X$، $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ و $(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha$.

تعریف ۱—۱.۲ نیم‌نرم. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. یک نیم‌نرم روی X یک نگاشت به صورت $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ است به طوری که در شرایط زیر صدق کند؛

۱) برای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲) برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

نیم‌نرمی که در شرط زیر صدق کند، نرم نامیده می شود.

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

هر فضای برداری X به همراه یک نرم $\|.\|$ را یک فضای نرمدار گوییم.

تعریف ۱—۱.۳ فضای باناخ. فضای نرمدار X را فضای باناخ گوییم هرگاه هر دنباله کشی در X همگرا باشد.

تعریف ۱—۱.۴ نگاشت جمعی. فرض کنیم X, Y فضاهای برداری باشند. نگاشت $f : X \to Y$ را جمعی گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (۱.۱)$$

تعریف ۱—۵.۱ تابع $f:X\to Y$ را به طور گویا همگن گوییم هرگاه به ازای هر $x\in X$

$$f(rx)=rf(x)\quad (r\in\mathbb{Q})$$

که $\mathbb{Q}$، مجموعه اعداد گویا می‌باشد.

قضیه ۱—۶.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای برداری روی $\mathbb{R}$ و $f:X\to Y$ جواب معادله جمعی (۱.۱) باشد آنگاه f به طور گویا همگن است.

برهان. از قرار دادن $x=\circ=y$ در رابطه (۱.۱) داریم $f(\circ)=f(\circ)+f(\circ)$. پس

$$f(\circ)=\circ \tag{۲.۱}$$

از جایگذاری $y=-x$ در (۱.۱) و استفاده از (۲.۱) نتیجه می‌شود

$$f(-x)=-f(x)\quad \forall\, x\in X \tag{۳.۱}$$

بنابراین f فرد است. حال نشان می‌دهیم که هر جواب معادله جمعی (۱.۱) به طور گویا همگن است. برای این منظور به ازای هر x،

$$f(۲x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=۲f(x)$$

بنابراین

$$f(۳x)=f(۲x+x)=f(۲x)+f(x)=۲f(x)+f(x)=۳f(x)$$

با استقراء روی هر عدد صحیح و مثبت n داریم

$$f(nx)=nf(x) \tag{۴.۱}$$

به همین ترتیب اگر n عدد صحیح منفی باشد آنگاه $-n$ عدد صحیح مثبت است و بنا به حالت قبل خواهیم داشت

$$f(nx)\quad=\quad f(-(-n)x)$$

$$
\begin{aligned}
&= -f(-nx)\\
&= -(-n)f(x)\\
&= nf(x)
\end{aligned}
$$

پس به ازای هر عدد صحیح n و هر $x \in X$، $f(nx) = nf(x)$. حال فرض کنیم r عدد گویای دلخواهی باشد. قرار می‌دهیم $r = \frac{k}{l}$ که k عدد صحیح و n عدد طبیعی است. به علاوه $kx = l(rx)$. چون f برای هر عدد صحیح همگن است.

$$kf(x) = f(kx) = f(l(rx)) = lf(rx)$$

پس :

$$f(rx) = \frac{k}{l}f(x) = rf(x)$$

پس f به طور گویا همگن است. از قرار دادن $x = ۱$ درعبارت بالا و تعریف $c = f(۱)$ داریم

$$f(r) = cr$$

پس f روی مجموعه اعداد گویا همگن است. □

قضیه ۱—۷.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند و $f : X \to Y$ جواب معادله جمعی باشد. اگر f در یک نقطه پیوسته باشد آنگاه f در هر نقطه پیوسته است.

برهان. فرض کنیم f در t پیوسته باشد. x را دلخواه فرض می‌کنیم. بنابراین $\lim_{y\to t} f(y) = f(t)$. نشان می‌دهیم f در x پیوسته است.

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to x} f(y) &= \lim_{y\to x} f(y - x + x - t + t)\\
&= \lim_{y\to x}[f(y - x + t) + f(x - t)]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{y\to x} f(y-x+t) + \lim_{y\to x} f(x-t) \\ &= f(t) + f(x-t) \\ &= f(t) + f(x) - f(t) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(۵.۱)

و این نشان می‌دهد که f در x پیوسته است. چون x دلخواه بود لذا f پیوسته می‌باشد. □

قضیه ۱—۸.۱ فرض کنیم E و F دو فضای نرمدار حقیقی و $f : X \longrightarrow Y$ تابع پیوسته باشد و در معادله تابعی جمعی صدق کند، آنگاه f خطی است .

برهان. چون اعداد گویا در $\mathbb{R}$ چگالند، لذا برای هر $t \in \mathbb{R}$ دنباله $\{r_n\}$ از اعداد گویا وجود دارد که اگر $n \to \infty$، $r_n \to t$ لذا

$$A(tx) = A(\lim_{n\to+\infty} r_n x) = \lim_{n\to+\infty} A(r_n x) = \lim_{n\to+\infty} r_n A(x) = tA(x)$$

□

قضیه ۱—۹.۱ هر تابع جمعی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که روی بازه $[a,b]$ کراندار باشد، خطی است.

برهان. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جمعی و روی بازه $[a,b]$ کراندار باشد. ابتدا نشان می‌دهیم f روی $[\circ, b-a]$ کراندار است. چون f روی بازه $[a,b]$ کراندار است، پس عدد مثبت M وجود دارد به طوری که به ازای هر $y \in [a,b]$،

$$|f(y)| < M$$

اگر $x \in [0, b-a]$ آنگاه $x+a \in [a,b]$ پس $f(x) = f(x+a) - f(a)$ لذا

$$|f(x)| < M + f(a)$$

قرار می‌دهیم $\alpha = b - a$ پس $f(x)$ روی بازه $[0, \alpha]$ کراندار است. فرض کنیم $m = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ قرار می‌دهیم $\phi(x) = f(x) - cx$ لذا

$$\begin{aligned}
\phi(x+y) &= f(x+y) - c(x+y) \\
&= f(x) + f(y) - c(x) - c(y) \\
&= f(x) - c(x) + f(y) - c(y) \\
&= \phi(x) + \phi(y)
\end{aligned}$$

پس $\phi(\alpha) = f(\alpha) - c\alpha = 0$. لذا $\phi(x)$ متناوب با دوره تناوب α است. به ازای هر x در $\mathbb{R}$

$$\phi(x+\alpha) = \phi(x) + \phi(\alpha) = \phi(x)$$

به علاوه تفاضل دو تابع کراندار روی بازه $[0, \alpha]$، روی بازه $[0, \alpha]$ کراندار است. و چون $\phi(x)$ متناوب با دوره تناوب α است، پس $\phi(x)$ روی $\mathbb{R}$ کراندار است. لذا $\phi(x)$ تابع جمعی است که روی $\mathbb{R}$ کراندار است. بنابرنتیجه قبل به ازای هر x در $\mathbb{R}$، $\phi(x) = 0$ یا $f(x) = cx$ می‌باشد. $\square$

قضیه ۱—۱.۱۰ گراف هر تابع جمعی غیر خطی در $\mathbb{R}^2$ چگال است.

برهان. فرض کنیم f جواب غیر خطی تابع جمعی باشد. فرض کنیم مجموعه $G = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$ گراف تابع f باشد. عدد حقیقی ناصفر x_1 را انتخاب می‌کنیم. چون f جواب غیر خطی تابع جمعی است، پس عدد حقیقی ناصفر x_2 وجود دارد که

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}$$

در غیر این صورت با قرار دادن $c = \frac{f(x_1)}{x_1}$ و $x_2 = x$ به ازای هر $x \neq 0$ خواهیم داشت $f(x) = c(x)$. چون $f(0) = 0$ پس f خطی است که این با فرض ما در تناقض است. لذا

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

بنابراین بردارهای $\vec{v_1} = (x_1, f(x_1))$ و $\vec{v_2} = (x_2, f(x_2))$ مستقل خطی هستند و در نتیجه تمام صفحه $\mathbb{R}^2$ را تولید می کنند؛ یعنی به ازای هر بردار $\vec{v} = (x, f(x))$ اعداد حقیقی r_1 و r_2 وجود دارند که

$$\vec{v} = r_1\vec{v_1} + r_2\vec{v_2}$$

حال اگر ρ_1 و ρ_2 اعداد گویا باشند آنگاه $\rho_1\vec{v_1} + \rho_2\vec{v_2}$ به دلخواه نزدیک صفحه بردار $\vec{v}$ است، زیرا اعداد گویای $\mathbb{Q}$ در اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ چگال و در نتیجه $\mathbb{Q}^2$ در $\mathbb{R}^2$ چگال است. اکنون داریم

$$\begin{aligned} \rho_1\vec{v_1} + \rho_2\vec{v_2} &= \rho_1(x_1, f(x_1)) + \rho_2(x_2, f(x_2)) \\ &= (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, \rho_1 f(x_1) + \rho_2 f(x_2)) \\ &= (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, f(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2)) \end{aligned}$$

بنابراین مجموعه

$$\hat{G} = \{(x, y) \mid x = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, \quad y = f(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2), \quad \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{Q}\}$$

در $\mathbb{R}^2$ چگال است. چون

$$\hat{G} \subset G$$

پس گراف هر تابع غیر خطی جمعی f، در R^2 چگال است و برهان قضیه کامل می‌شود. □

در ادامه مفهوم پایه هامل را بیان می‌کنیم که منجر به ساختن نگاشت جمعی ناپیوسته خواهد شد.

تعریف ۱—۱۱.۱ فرض کنیم S مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و B زیر مجموعه S باشد. مجموعه B را پایه هامل برای S گوییم اگر هر عضو S یک ترکیب خطی گویا و یکتا از B باشد.

قضیه ۱—۱۲.۱ فرض کنیم B پایه هامل برای $\mathbb{R}$ باشد. اگر دو نگاشت جمعی در هر نقطه از B دارای مقدارهای برابر باشند، آنگاه این دو نگاشت مساویند.

برهان. فرض کنیم f_1 و f_2 دو نگاشت جمعی باشند که در هر نقطه از B دارای مقدارهای برابر هستند. فرض کنیم x عدد حقیقی دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $f = f_1 - f_2$. بنابراین اعداد $b_1, ..., b_n$ در B و اعداد گویای $r_1, ..., r_n$ چنان وجود دارند که

$$x = r_1 b_1 + ... + r_n b_n$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= f(x) \\ &= f(r_1 b_1 + ... + r_n b_n) \\ &= f(r_1 b_1) + ... + f(r_n b_n) \\ &= r_1 f(b_1) + ... + r_n f(b_n) \\ &= r_1 [f_1(b_1) - f_2(b_1)] + ... + r_n [f_1(b_n) - f_2(b_n)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین $f_1 = f_2$ و برهان کامل است. □

قضیه ۱—۱۳.۱ فرض کنیم B پایه هامل برای $\mathbb{R}$ و $g : B \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در اینصورت تابع جمعی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که برای هر $b \in B$، $f(b) = g(b)$.

برهان. برای هر عدد حقیقی x، اعداد $b_1, ..., b_n$ در B و اعداد گویای $r_1, ..., r_n$ چنان وجود دارند که

$$x = r_1 b_1 + ... + r_n b_n$$

تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = r_1 g(b_1) + ... + r_n g(b_n)$$

بنابراین برای هر $b \in B$ داریم: $f(b) = g(b)$.

اکنون نشان می‌دهیم f روی اعداد حقیقی جمعی است. فرض کنیم x و y اعداد حقیقی دلخواه باشند. بنابراین

$$x = r_1 a_1 + ... + r_n a_n$$

و

$$y = s_1 b_1 + ... + s_m b_m$$

که $r_1, ..., r_n$ و $s_1, ..., s_m$ اعداد گویا و $a_1, ..., a_n$ و $b_1, ..., b_m$ اعضای پایه هامل B می‌باشند.

فرض کنیم $\{c_1, ..., c_l\}$ اجتماع دو مجموعه $\{a_1, ..., a_n\}$ و $\{b_1, ..., b_m\}$ باشد. بنابراین $l \leq m + n$،

$$x = u_1 c_1 + ... + u_l c_l$$

و

$$y = v_1 c_1 + ... + v_l c_l$$

که $u_1, ..., u_l$ و $v_1, ..., v_l$ اعداد گویا می‌باشند و تعدادی از این اعداد ممکن است صفر باشند. لذا داریم

$$x + y = (u_1 + v_1) c_1 + ... + (u_l + v_l) c_l$$

و

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= f((u_1+v_1)c_1+...+(u_l+v_l)c_l) \\
&= (u_1+v_1)g(c_1)+...+(u_l+v_l)g(c_l) \\
&= [u_1g(c_1)+...+u_lg(c_l)] \\
&\quad +[v_1g(c_1)+...+v_lg(c_l)) \\
&= f(x)+f(y)
\end{aligned}
$$

بنابراین f روی اعداد حقیقی جمعی است و برهان کامل است. $\square$

اکنون می‌توانیم با کمک پایه هامل نگاشت جمعی غیر خطی بسازیم. فرض کنیم B یک پایه هامل برای $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنیم b عضو دلخواه از B باشد. تعریف می‌کنیم

$$
g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in B - \{b\} \\ 1 & , x = b \end{cases}
$$

بنا به قضیه قبل تابع جمعی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که برای هر $x \in B$، $f(x) = g(x)$.
بنابراین برای هر $x \in B$ و $x \neq b$، داریم

$$
0 = \frac{f(x)}{x} \neq \frac{f(b)}{b}
$$

بنابراین f غیر خطی است.

فصل ۲

پایداری معادله تابعی جمعی کشی

در این فصل به بررسی پایداری هایرز—اولام—راسیاس و نتایج این پایداری، برای معادله تابعی جمعی کشی می‌پردازیم. این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول پایداری هایرز—اولام—راسیاس معادله تابعی

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱.۲)$$

در فضاهای نرمدار را ارائه می‌کنیم و در بخش دوم پایداری معادله تابعی (۱.۲) را در فضاهای ناارشمیدسی مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالب این فصل از مراجع [۴]، [۵]، [۷]، [۹]، [۱۲]، [۱۸]، [۱۳] و [۲۳] برداشت شده است.

۲—۱ پایداری هایرز معادله تابعی جمعی کشی

در این بخش نخست، قضیه مهم زیر را که در سال ۱۹۴۱ توسط هایرز ارائه شد را همراه با برهان بیان می‌کنیم.

قضیه ۲–۱.۱ قضیه هایرز. فرض کنیم E_1 فضای برداری نرمدار و E_2 فضای باناخ باشد و $f : E_1 \to E_2$ برای هر $x, y \in E_1$ در

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon \tag{۲.۲}$$

برای یک $\epsilon > 0$ صدق کند، آنگاه نگاشت جمعی یکتای $A : E_1 \to E_2$ چنان وجود دارد که برای هر x در E_1 داریم،

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \epsilon.$$

برهان. در رابطه (۲.۲) قرار می‌دهیم $x = y$. سپس طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. داریم

$$\|\frac{f(2x)}{2} - f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{۳.۲}$$

در رابطه (۳.۲) x را با $2x$ جایگزین و سپس طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم داریم

$$\|\frac{f(2^2x)}{2^2} - \frac{f(2x)}{2}\| \leq \frac{\epsilon}{2^2} \tag{۴.۲}$$

روابط (۳.۲) و (۴.۲) را ترکیب کرده و از نامساوی مثلث داریم

$$\begin{aligned}
\|\frac{f(2^2x)}{2^2} - f(x)\| &= \|\frac{f(2^2x)}{2^2} + \frac{f(2x)}{2} - \frac{f(2x)}{2} - f(x)\| \\
&\leq \|\frac{f(2^2x)}{2^2} - \frac{f(2x)}{2}\| + \|\frac{f(2x)}{2} - f(x)\| \\
&\leq \epsilon(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}) = \epsilon(1 - 2^{-2})
\end{aligned}$$

حال به استقراء ثابت می‌کنیم

$$\|2^{-n}f(2^nx) - f(x)\| \leq \epsilon(1 - 2^{-n}) \tag{۵.۲}$$

برای $n = ۱$ همان رابطه (۳.۲) به دست می‌آید. حال رابطه (۵.۲) را بر ۲ تقسیم کرده و x را با $۲x$ تعویض می‌کنیم داریم

$$\|۲^{-(n+۱)}f(۲^{n+۱}x) - \frac{f(۲x)}{۲}\| \leq \epsilon(\frac{۱}{۲} - ۲^{-(n+۱)}) \qquad (۶.۲)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \|۲^{-(n+۱)}f(۲^{n+۱}x) - f(x)\| \\ = \ & \|۲^{-(n+۱)}f(۲^{n+۱}x) + \frac{f(۲x)}{۲} - \frac{f(۲x)}{۲} - f(x)\| \\ \leq \ & \|۲^{-(n+۱)}f(۲^{n+۱}x) - \frac{f(۲x)}{۲}\| + \|\frac{f(۲x)}{۲} - f(x)\| \\ \leq \ & \epsilon(\frac{۱}{۲} - ۲^{-(n+۱)}) + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon(۱ - ۲^{-(n+۱)}) \end{aligned}$$

پس

$$\|۲^{-(n+۱)}f(۲^{n+۱}x) - f(x)\| \leq \epsilon(۱ - ۲^{-(n+۱)})$$

و درستی (۵.۲) برای هر $n \in N$ به استقرای ریاضی نتیجه می‌شود. نشان می‌دهیم برای هر x در $E_۱$ دنباله $\{۲^{-n}f(۲^n x)\}_{n=۱}^{\infty}$ کشی است. اگر $n > m > ۰$ باشد آنگاه $n - m$ عدد طبیعی است. این عدد را با n در رابطه (۵.۲) جایگزین می‌کنیم. برای هر $x \in E_۱$ داریم

$$\|\frac{f(۲^{n-m}x)}{۲^{n-m}} - f(x)\| \leq \epsilon(۱ - \frac{۱}{۲^{n-m}})$$

طرفین را در $\frac{۱}{۲^m}$ ضرب می‌کنیم داریم

$$\|\frac{f(۲^{n-m}x)}{۲^n} - \frac{f(x)}{۲^m}\| \leq \epsilon(\frac{۱}{۲^m} - \frac{۱}{۲^n})$$

حال x را با $۲^m x$ جایگزین می‌کنیم

$$\|\frac{f(۲^n x)}{۲^n} - \frac{f(۲^m x)}{۲^m}\| \leq \epsilon(\frac{۱}{۲^m} - \frac{۱}{۲^n})$$

حال اگر $m \to \infty$ داریم $(\frac{۱}{۲^n} - \frac{۱}{۲^m}) \to ۰$ بنابراین

$$\lim_{m,n\to\infty} \| \frac{f(۲^n x)}{۲^n} - \frac{f(۲^m x)}{۲^m} \| = ۰$$

بنابراین $\{۲^{-n} f(۲^n x)\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله کشی است. چون $E_۲$ فضای باناخ است پس همگراست. حال تعریف می‌کنیم $A : E_۱ \to E_۲$ با ضابطه

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$$

حال ثابت می کنیم A جمعی است. ابتدا در رابطه (۲.۲) به جای x عبارت $۲^n x$ و به جای y عبارت $۲^n y$ قرار می‌دهیم. سپس طرفین را بر ۲^n تقسیم کرده داریم

$$\| ۲^{-n} f(۲^n x + ۲^n y) - ۲^{-n} f(۲^n x) - ۲^{-n} f(۲^n y) \| \leq \frac{\epsilon}{۲^n}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
& \| A(x+y) - A(x) - A(y) \| \\
= & \ \| \lim_{n\to\infty} \{ \frac{f(۲^n(x+y)}{۲^n} - \frac{f(۲^n x)}{۲^n} - \frac{f(۲^n y)}{۲^n} \} \| \\
= & \ \| \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} \{ f(۲^n(x+y) - f(۲^n x) - f(۲^n y) \} \| \\
= & \ \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} \| f(۲^n(x+y)) - f(۲^n x) - f(۲^n y) \| \\
\leq & \ \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon}{۲^n} = ۰
\end{aligned}$$

پس داریم

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

حال ثابت می‌کنیم برای هر $x \in E_۱$،

$$\| f(x) - A(x) \| \leq \epsilon$$