دانشکده علوم

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض- جبر

مدول های C- پروژکتیو و C- انژکتیو

به وسیله‌ی

فاطمه ملازم

استاد راهنما

دکتر مجید ارشاد

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب فاطمه ملازم دانشــجوی رشتــه ی ریاضــی گــرایــش جبر دانشکده ی علوم اظهار میکنم کــه این پایان نامه حاصل پژوهش خــودم بوده و در جاهایی کــه از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام، همچنین اظهار می کنــم کــه تحقیق و موضــوع پایان نامه ام تکــراری نیست و تعهد مینمایم کــه بــدون مجــوز دانشــگاه دستــاوردهای آن را منتشر ننموده و یــا در اختیار غیر قرار بدهم، کلیه حقوق این اثــرمطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: فاطمه ملازم

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۶/۱۱

به نام خدا

مدول های C- پروژکتیو و C- انژکتیو

به کوشش

فاطمه ملازم

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه شیراز به عنوان
بخشی از فعالیت‌های لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی

ریاضی محض - جبر

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی کمیته پایان نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر مجید ارشاد، استاد بخش ریاضی (رئیس کمیته)..

دکتر شهره نمازی، استادیار بخش ریاضی..

دکتر افشین امینی، استادیار بخش ریاضی ....

شهریور ۱۳۹۰

سپاسگزاری

به نام او که یادش آرامش بخش دل هاست.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا   بر منتهای مطلب خود کامران شدم

حال که با یاری خداوند متعال بر این مهم فایق آمدم, بر خود لازم میدانم که از زحمات بی دریغ عزیزانی که در این راه مشوقم بودند قدردانی کنم.

ازجناب آقای دکتر مجید ارشاد استاد راهنمای ارجمندم که راهنمایی هایشان روشنی بخش راهم بود سپاسگزارم.از اساتید محترم مشاور سرکار خانم دکتر شهره نمازی و جناب آقای دکتر افشین امینی نیز کمال تشکر را دارم.

و در نهایت قدردان پدر و مادر و همسر عزیزم هستم که صبورانه و دلسوزانه در این راه یاریم نمودند.

چکیده

مدول های C- پروژکتیو و C- انژکتیو

به کوشش
فاطمه ملازم

در این پایان نامه A یک حلقه است، در صورتی که بیانگر معنای دیگری باشد، ذکر خواهد شد. همچنین قضایا و تعاریف را روی یک A- مدول راست بررسی می کنیم، که می توان آن را برای A- مدول های چپ نیز تعمیم داد.
ابتدا قضایا و تعاریف مقدماتی و مورد نیاز در فصل های بعد آورده می شود، سپس قضایایی از حلقه های منظم و ارتباط آن با مدول های هموار، دوری هموار و مدول های P- انژکتیو مورد مطالعه قرار می گیرند.
در فصل سوم نوع دیگری از مدول ها به نام مدول های C- انژکتیو معرفی می شود. مفاهیمی چون حلقه ی فربنیوس و V- حلقه ها و ارتباط آن ها با مدول C- انژکتیو را بررسی می کنیم، سپس مدول های C- انژکتیو را که انژکتیو می شوند را مشخص می کنیم.
در فصل چهارم دو مساله ای که هنوز به طور کامل به اثبات نرسیده است و حدس و گمان های بسیاری راجع به آن ها وجود دارد را بیان کرده و همچنین شبه انژکتیو و ارتباط آن با C- انژکتیو را مورد مطالعه قرار می دهیم.
در فصل پنجم نوع دیگری از مدول ها به نام مدول های C- پروژکتیو معرفی می شود. مفاهیمی چون YJ- انژکتیو، حلقه های موروثی و ارتباط آن ها با مدول های C- پروژکتیو و رابطه بین مدول های C- انژکتیو و C- پروژکتیو را بررسی می کنیم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست علائم ونشانه ها

متعلق است به	$\in$
متعلق نیست به	$\notin$
پایان اثبات	$\square$
تحدید بهA	$\|_A$
وجود دارد	$\exists$
اشتراک	$\cap$
اجتماع	$\cup$
یکریخت است	$\approx$
زیر مجموعه	$\subseteq$
زیر مدول	$\leq$
مخالف	$\neq$
جمع مستقیم	$\bigoplus$
معکوس عضوm	m^{-1}
فاکتور مدول	$\frac{K}{\mathrm{M}}$
همریختی هایی ازB به A	$Hom(B,A)$
ضرب	$\times$
به ازای هر	$\forall$
اساسی	$\trianglelefteq$
ضرب تانسوری	$\bigotimes$
بطوریکه	$s.t$

فصل اول

مقدمه

در این فصل پس از مقدمه، تعاریف، لم ها و قضایایی در مورد مدول ها وحلقه ها که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند، آمده است. در ضمن از آوردن اثبات بعضی از قضایا صرف نظر می کنیم و تنها به ذکر منابع جهت اثبات بسنده می نماییم.

۱-۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

مدولهای پروژکتیو و انژکتیو از ساختارهای مهم جبری، روی مدولها هستند که تابعگون روی آنها به تابعگونی دقیق تبدیل می شود و مدولهای آزاد همگی در خانواده ی مدول های پروژکتیو قرار دارند و به علاوه مدولهای غیرآزاد هم در این خانواده هستند پس این نوع مدولها، تعمیمی از مدولها ی آزاد می باشند.

مطالب این پایان نامه برگرفته از مراجع [۴۰]، [۳۶]، [۳۷] و[۳۵] می باشد. در واقع همان گونه که مدولهای انژکتیو و پروژکتیو را تعریف کردیم تعمیمی از آنها یعنی مدولهایC- انژکتیو و C- پروژکتیو را بیان می کنیم وارتباط بینشان و مفاهیم وابسته به آنها در این پایان نامه شرح داده خواهد شد. به عنوان مثال مدولهای C- انژکتیو که انژکتیو می شوند مورد بحث قرار می گیرد.

فرض کنید A یک حلقه باشد. A- مدولهای انژکتیو برای اولین بار توسط بایر[۱] در سال ۱۹۴۰ معرفی شد، آنها را گروههای آبلی کامل روی حلقه A نامید و نام انژکتیو برای اولین بار

1 Bayer

در مقاله الینبرگ[1] ظاهر شد. مقاله بایر شامل گزاره ای بود که بیان می کرد "هر مدول، زیر مدول یک مدول انژکتیو است." و آنچه امروز اصل بایر[2] برای A- مدول M نامیده می شود بیان می کند که شرط انژکتیو بودن M این است که هر نگاشت از یک ایده ال حلقه A به M می بایست به یک نگاشت از A به M گسترش یابد.

با استفاده از ایده آل اصلی، تعمیم مدول های انژکتیو یعنی p- انژکتیو را بیان می کنیم و در مراجع [۲]، [۱۵]، [۳۴] و[۳۶] نشان داده می شود که منظم بودن یک حلقه با هموار و نیز p- انژکتیو بودن مدول های آن حلقه معادل هستند و در واقع با معرفی مدولهای p- انژکتیو ثابت می کنیم که حلقه A، منظم است اگر وفقط اگرهر A- مدول p- انژکتیو باشد.

در این پایان نامه خواهم دید که مدولهای C- انژکتیو دوری، انژکتیو خواهند شد و همچنین اگر هر مدول C- انژکتیو، انژکتیو شود حلقه نوتری خواهد شد. مشابه با مدول های C- انژکتیو، مدول های C- پروژکتیو را نیز تعریف می کنیم که مفاهیم مربوطه در مرجع [۱۱] آمده است.

حلقه های شبه انژکتیو (QI)، شبه فربنیوس(QF)، YJ- انژکتیو و موروثی را بررسی می کنیم. کوهلر(Koehler)، حلقهQI را در مرجع [۱۱] و زاو (Xue) حلقه YJ- انژکتیو را در مرجع [۳۰] و آیکدا (Ikeda) و ناکایاما (Nakayama) شبه فربنیوس رادر مرجع [۱۸] توصیف کرده اند. ثابت می شود که یک حلقه شبه انژکتیو تحت چه شرایطی $C-$ انژکتیو و اگر یک حلقهQI نوتری شود، چه نتیجه ای حاصل می گردد. در ضمن دو مساله باز از بویل و ماتلیس را بیان می کنیم که مساله بویل در مرجع [۱۲] ومساله ماتلیس در مرجع [۱۳] آمده است که مقدار پیشرفت کار و تحقیقات خود را به طور کامل شرح داده اند.

---
1 Elinberg

2-Bayer's criterion

۱-۲ مفاهیم و قضایای مقدماتی

تعریف ۱-۱ : فرض کنید A یک حلقه باشد. A- مدول P ، پروژکتیو[1] است اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله ی دقیق کوتاه ازA- همریختی ها مثل

$$0 \to M \overset{\varphi}{\to} N \overset{\vartheta}{\to} K \to 0$$

دنباله ی

$$0 \to Hom_A(P,M) \overset{\overline{\varphi}}{\to} Hom_A(P,N) \overset{\overline{\vartheta}}{\to} Hom_A(P,K) \to 0$$

دنباله دقیق کوتاهی از $\mathbb{Z}$- همریختی ها باشد.

قضیه۱-۱: شرایط زیر معادلند:

۱) A ، P- مدولی پروژکتیو است.

۲) به ازای هر A- همریختی پوشا مثل $\varphi: M \to N$ ، $\mathbb{Z}$- همریختی

$\overline{\varphi}: Hom_A(P,M) \to Hom_A(P,N)$ نیز پوشا ست.

۳) به ازای هر نمودار از A- همریختی ها و A- مدول ها مثل

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

که سطر آن دقیق باشد، A- همریختی ای مثل $\varphi : P \to M$ موجود است که نمودار را جابجا می کند:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1 Projective

اثبات : ۲→۱) فرض کنید A- همریختی پوشایی مثل $\varphi: M \to N$ داده شده باشد واضح است که دنباله ی $0 \to Ker\varphi \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ دنباله دقیق کوتاهی از A- همریختی هاست.

چون P، پروژکتیو است دنباله

$$0 \to Hom_A(P, Ker\varphi) \xrightarrow{\bar{\iota}} Hom_A(P, M) \xrightarrow{\bar{\varphi}} Hom_A(P, N) \to 0$$

هم دنباله دقیق کوتاهی از$\mathbb{Z}$- همریختی هاست پس $\mathbb{Z}$- همریختی

$$\bar{\varphi}: Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, N)$$

پوشاست.

۳→۲) فرض کنید نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از A- همریختی و A- مدول ها که سطر آن دقیق است داده شده باشد. واضح است که دقیق بودن سطر، ایجاب می کند که A- همریختی $g: M \to N$ پوشاست لذا $\mathbb{Z}$- همریختی $\bar{g}: Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, N)$ نیز پوشاست. چون $f \in Hom_A(P, N)$ عضوی از $Hom_A(P, M)$ مثل φ موجود است که $\bar{g}(\varphi) = f$، یا $g\varphi = f$. پس A- همریختی $\varphi: P \to M$ این ویژگی را دارد که $g\varphi = f$ در نتیجه نمودار داده شده را جابجا یی می کند:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

۱⟶۳) باید ثابت کنیم که تابع همگون همورد$Hom_{\mathrm{A}}(P,-)$ دقیق است. برای این منظور فرض کنید دنباله دقیق کوتاهی از A- همریختی ها مثل

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\vartheta} K \to 0$$

داده شده باشد. باید نشان دهیم که

$$0 \to Hom_A(P,M) \xrightarrow{\bar{\varphi}} Hom_A(P,N) \xrightarrow{\bar{\vartheta}} Hom_A(P,K) \to 0$$

دنباله دقیق کوتاهی از$\mathbb{Z}$- همریختی ها است. نشان می دهیم

$$\bar{\vartheta} : Hom_A(P,N) \to Hom_A(P,K)$$

پوشا است. فرض کنید f عضوی دلخواه از $Hom_A(P,N)$ باشد، فرض کنید A- همریختی ای مثل $\theta: P \to N$ موجود است که نمودار را جابه جا می کند:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\theta"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "\vartheta"] & K \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

یعنی $\vartheta\theta = f$ یا $\bar{\vartheta}(\theta) = f$ چون $\theta \in Hom_{\mathrm{A}}(P,N)$، نشان دادیم که $\bar{\vartheta}$ پوشا است و در نتیجه $Hom_{\mathrm{A}}(P,-)$ دقیق است؛ پس P، A- مدولی پروژکتیو است. □

قضیه۱-۲ : شرایط زیر معادلند:

۱) P، A- مدولی پروژکتیو است.

۲) هر دنباله ی دقیق کوتاه $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \to 0$ شکافته می شود .

۳) A- مدول آزادی مثل F و A - مدولی مثل K موجود است که $F \approx K \oplus P$

اثبات : به قضیه ۸-۴ از[۳۶] مراجعه شود. □

تعریف۱-۲: A- مدولی مثل E انژکتیو[1] است اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله دقیق کوتاه از A- همریختی ها مثل

$$0 \to M \overset{\varphi}{\to} N \overset{\vartheta}{\to} K \to 0$$

دنباله ی

$$0 \to Hom_R(K,E) \overset{\bar{\vartheta}}{\to} Hom_R(N,E) \overset{\bar{\varphi}}{\to} Hom_R(M,E) \to 0$$

دنباله دقیق کوتاهی از $\mathbb{Z}$- همریختی ها باشد.

قضیه۱-۳ : شرایط زیر معادلند:

۱) E، A- مدولی انژکتیو است.

۲) به ازای هر A- همریختی مثل $\varphi: M \to N$ که یک به یک باشد، $\mathbb{Z}$- همریختی $\bar{\varphi}: Hom_A(N,E) \to Hom_R(M,E)$ پوشاست .

۳) به ازای هر نمودار از A- همریختی ها و A- مدول ها، A- همریختی ای مثل $\varphi: N \to E$ موجود است که نمودار را جابجا یی می کند:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

اثبات : ۲→۱) فرض کنید A- همریختی یک به یک $\varphi: M \to N$ داده شده باشد. واضح است که دنباله $0 \to M \overset{\varphi}{\to} N \overset{\pi}{\to} N/Im\varphi \to 0$ دنباله دقیق کوتاهی از A- همریختی هاست. چون E انژکتیو است دنباله

$$0 \to Hom_A(N/Im\varphi, E) \overset{\bar{\pi}}{\to} Hom_A(N,E) \overset{\bar{\varphi}}{\to} Hom_A(M,E) \to 0$$

دنباله دقیق کوتاهی از $\mathbb{Z}$- همریختی هاست. پس $\mathbb{Z}$- همریختی

$$\bar{\varphi}: Hom_A(N,E) \to Hom_A(M,E)$$

پوشاست.

1 Injective

۳⟵۲) فرض کنید نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \\ & E & \end{tikzcd}$$

از A- همریختی ها و A- مدول ها که سطر آن دقیق است داده شده باشد. دقیق بودن سطر ایجاب می کند که A- همریختی $g : M \longrightarrow N$ یک به یک باشد. پس $\mathbb{Z}$- همریختی $\bar{g}: Hom_A(N,E) \to Hom_A(M,E)$ پوشاست. چون $f \in Hom_A(M,E)$ عضوی از $Hom_A(N,M)$ مثل φ موجود است که $\bar{g}(\varphi) = f$ یا $\varphi g = f$. پس A- همریختی $\varphi : N \to E$ این ویژگی را دارد که $\varphi g = f$ و در نتیجه نمودار داده شده را جابه جا می کند:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

۱⟵۳) باید ثابت کنیم تابعگون پادورد $Hom_A(-,E)$ دقیق است، برای این منظور فرض کنید دنباله دقیق کوتاه $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\vartheta} K \to 0$ از A- همریختی ها داده شده باشد .

باید نشان دهیم

$$0 \to Hom_A(K,E) \xrightarrow{\bar{\vartheta}} Hom_A(N,E) \xrightarrow{\bar{\varphi}} Hom_A(M,E) \to 0$$

دنباله دقیق کوتاهی از $\mathbb{Z}$- همریختی هاست. ثابت کنیم

$$\bar{\varphi}: Hom_A(N,E) \to Hom_A(M,E)$$

پوشاست. فرض کنید f عضوی دلخواه از $Hom_A(M,E)$ باشد . نمودار

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & N \\
 & E &
\end{tikzcd}
$$

را در نظر بگیرید. A- همریختی ای مثل $\varphi: N \to E$ موجود است که نمودار را جابجا می کند:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\
 & E &
\end{tikzcd}
$$

یعنی $\theta\varphi = f$ یا $\bar{\varphi}(\theta) = \mathrm{f}$. چون $\theta \in Hom_{\mathrm{A}}(N, E)$ تساوی اخیر نشان می دهد که $\bar{\varphi}$ پوشاست و در نتیجه $Hom_A(-, E)$ دقیق است؛ پس E، A- مدولی انژکتیو است. □

قضیه ۱-۴: شرایط زیر معادلند:

۱) E، A- مدولی انژکتیو است.

۲) هر دنباله ی دقیق کوتاه $0 \to \mathrm{E} \overset{\varphi}{\to} M \overset{\psi}{\to} N \to 0$ شکافته می شود.

۳)به ازای هرتوسیع از E مانند E' زیرمدولی مثل K از E' موجود است که $E' = K \oplus E$

اثبات : به قضیه ۹-۱۱ از[۳۶] مراجعه شود. □

تعریف۱-۳: فرض کنید N یک A- مدول وM توسیعی ازآن باشد. می گوییم M یک توسیع اساسی[۱] N است اگر به ازای هر زیر مدول غیر صفر مثلK از M ، $N \cap K \neq 0$ باشد، در این حالت می نویسیم $N \trianglelefteq M$.

مثال۱-۱: مجموعه اعداد گویا ی $\mathbb{Q}$، بعنوان $\mathbb{Z}$- مدول یک توسیع اساسی از $\mathbb{Z}$ است.

1 essential

تعریف۱-۴: فرض کنید M یک A- مدول باشد. A- مدول مثل E را توسیع اساسی ماکسیمال[1] M می نامیم اگر E توسیع اساسی M باشد و اگر $M \leq E \lneqq K$، آنگاه K توسیع اساسی M نباشد.

تعریف۱-۵: A- مدولی مثل E را یک توسیع انژکتیو M می نامیم اگر E انژکتیو و توسیع M باشد.

تعریف۱-۶: A- مدول مثل E را توسیع انژکتیو مینیمال[2] M می نامیم اگر E توسیع انژکتیو M باشد و اگر $M \leq K \lneqq E$ آنگاه K انژکتیو نباشد.

قضیه۱-۵: فرض کنید M یک A- مدول و E توسیعی از M باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱) E یک توسیع اساسی و انژکتیو M است.

۲) E یک توسیع اساسی ماکسیمال M است.

۳) E یک توسیع انژکتیو مینیمال M است.

اثبات : به قضیه ۹-۱۴، از[۳۶] مراجعه شود. □

تعریف۱-۷: فرض کنید M یک A- مدول باشد. هر A- مدول مثل E را که در یکی از شرایط معادل قضیه ۱-۵ ، صدق کند پوش انژکتیو[3] M می نامیم.

قضیه۱-۶ : هر A- مدول مثل M پوش انژکتیو دارد و هر دو پوش انژکتیو M یکریخت هستند.

اثبات : به قضیه ۹-۱۵ از[۳۶] مراجعه شود. □

---

1 Maximal essential extension

2 Minimal injective extension

3 Injective hull

تذکر۱-۱ : بنابر قضیه قبل هر A- مدول مثل M ، پوش انژکتیو دارد که در حد یکریختی منحصر به فرد است. این پوش انژکتیو منحصر بفرد M را با $E(M)$ نمایش می دهیم .

تعریف ۱-۸ : A- مدول راست F را هموار[1] گویند اگر به ازای هر دنباله ی دقیق کوتاه از A همریختی های چپ مثل

$$0 \to M \overset{\varphi}{\to} N \overset{\vartheta}{\to} K \to 0$$

دنباله ی

$$0 \to F\otimes_A M \xrightarrow{1_f\ \otimes \varphi} F\otimes_A N \xrightarrow{1_f\ \otimes \vartheta} F\otimes_A K \to 0$$

دنباله دقیق کوتاهی از $\mathbb{Z}$- همریختی ها باشد.

قضیه۱-۷ : فرض کنید A حلقه باشد. دراین صورت A به عنوان A- مدول چپ (راست)، هموار‌است.

اثبات : به قضیه ۱۰-۲ از[۳۶] مراجعه شود. □

قضیه ۱-۸: شرایط زیر برای A- مدول راست F معادلند:

۱) F هموار است .

۲) F به عنوان ${}_{A}A$ مدول، هموار‌است.

۳) برای هر ایده آل $I \leq_A A$ ، $\mathbb{Z}$- بروریختی[2] $\alpha: F\otimes_A I \to FI$ با $\alpha(f\otimes a) = fa$ ، یک به یک است .

اثبات : به لم ۱۷-۱۹ از[۱۱] مراجعه شود. □

تعریف۱-۹ : فرض کنید M یک A- مدول باشد و $\lambda: A \to \mathrm{End}(M)$ یک همریختی حلقه ای باشد. بنابراین $K = Ker\lambda = \{\, a\epsilon A \mid ax = 0 \ \ (x\epsilon M)\}$ ایده الی دو طرفه از A است و به

---

1 flat

2 epimorphism