چکیده

تحلیل رفتار سیستم های وابسته به زمان در اغلب موارد بسیار مشکل و یا حتی غیر ممکن است. در این پایان نامه روش هایی مبتنی بر برنامه ریزی خطی و غیرخطی برای سه مسئله در ارتباط با این سیستم‌ها ارائه شده است. این سه مسئله عبارتند از:

۱—کنترل پذیری سیستم‌های خطی و غیرخطی وابسته به زمان،

۲—کنترل پذیری سیستم‌های غیرخطی پارامتری،

۳—مسئله کنترل بهینه حداقل زمان برای سیستم‌های خطی وابسته به زمان.

در واقع به کمک گسسته سازی، سیستم‌های کنترل‌پذیر وابسته به زمان را در حالتی که سیستم خطی باشد، با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) و در حالتی که سیستم غیر خطی است، با یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) تقریب می‌زنیم . با حل مسئله برنامه ریزی خطی یا غیرخطی به‌دست آمده، تابع مسیر و کنترل بهینه به دست می آیند.

در مورد هر روش، عملکرد آن با ارائه چند مثال عددی ارزیابی شده است.

فهرست

پیشگفتار

زمانی که پارامترهای یک مدل سیستم دینامیکی با زمان تغییر می‌کنند، مدل را وابستهٔ زمانی می‌نامند. از آنجا که حل تحلیلی این نوع مسائل دشوار است، روش‌های حل عددی می‌تواند کمک شایانی در تجزیه و تحلیل این مسائل باشد.

در این پایان‌نامه، در فصل اول مروری بر مسئله کنترل بهینه داریم و روش‌های حل عددی آن را ارائه می‌دهیم.در ادامه، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را بیان می‌کنیم. مسئله برنامه ریزی غیرخطی را می‌توان به دو گروه نامقید و مقید تقسیم‌بندی کرد که در هر گروه روش‌های حل عددی آن ارائه شده است.

در فصل دوم روشی را بیان می‌کنیم که به کمک آن، سیستم‌های کنترل‌پذیر وابسته به زمان را در حالتی که سیستم خطی باشد، با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) و در حالتی که سیستم غیر خطی است، با یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) تقریب می‌زنیم . حل مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) و یا برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) متناظر و نتایج عددی حاصل از آن به ما کمک می‌کند که بتوانیم سیستم کنترلی را تجزیه و تحلیل کنیم. برای این منظور ابتدا یک مسئله جدید متناظر با مسئله اولیه در نظر می‌گیریم و به کمک گسسته‌سازی، آن را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (یا غیرخطی) با بعد متناهی تبدیل می‌کنیم. سرانجام وقتی مسئله برنامه‌ریزی خطی (یا غیر خطی) را حل کنیم می‌توانیم کنترل‌پذیری سیستم اصلی را بررسی کنیم. چنان‌چه جواب بهینه مسئله LP (یا NLP) به دست آمده صفر (و یا نزدیک به صفر) باشد، در این صورت می‌توان سیستم را از یک وضعیت اولیه به یک وضعیت نهایی معین هدایت کرد. به علاوه جواب حاصل از مسئله LP (یا NLP) تقریبی مناسب از مسیر و کنترل مطلوب را نیز فراهم می‌سازد.

در فصل سوم ، روش گسسته‌سازی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی تعمیم می دهیم. در واقع یک سیستم غیرخطی پارامتری (NPUP) را در نظر می گیریم و آن را به کمک گسسته‌سازی به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) تبدیل می‌کنیم. با این کار جواب بهینه ای برای سیستم غیرخطی (NLP) و جواب تقریبی برای سیستم غیرخطی پارامتری (NPUP) به دست می آوریم .
در فصل چهارم ، مسئله کنترل بهینه حداقل زمان برای سیستم‌های خطی وابسته به زمان را بیان می‌کنیم. برای این منظور، مسئله مورد نظر را با گسسته‌سازی به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی مختلط (MILP)، تبدیل می‌کنیم. با حل مسئله برنامه ریزی خطی مختلط به دست آمده، تقریب‌هایی از زمان بهینه و همچنین تابع مسیرو کنترل بهینه به دست آوریم. در بیشتر روش‌های عددی، باید یک مسئله مقدار اولیه را حل نمود و مسیر بهینه را بعد از یافتن تابع کنترل بهینه، پیدا کرد. در حالی که در این روش با حل مسئله برنامه‌ریزی مختلط، تابع مسیر و کنترل بهینه به طور همزمان به دست می آیند.

فصل ۱

مقدمات

۱—۱ مقدمه

زمینهٔ رشد نظریهٔ کنترل به سال ۱۹۵۰ به خاطر فعالیت‌های آمریکا و روسیه (شوروی سابق) در رابطه با کشفیات در منظومهٔ شمسی برمی‌گردد. در واقع هدف، تعیین مسیرهایی است که در راستای آن مسیرها، یک فضاپیما در کمترین زمان ممکن و یا با کمترین سوخت مصرفی، به هدف مورد نظرش برسد. این نوع مسائل با روش‌هایی که تا آن زمان ابداع شده بودند قابل حل نبودند و یک نظریهٔ جدید که ریشهٔ آن به قرن هجدهم بازمی‌گردد، می‌باید توسعه می‌یافت تا بتواند با مسائل جدید هماوری کند. به این ترتیب موضوع نظریه کنترل شکل گرفته و توسعه یافت .

مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی در یک دسته‌بندی کلی به دو گروه نامقید و مقید تقسیم می‌شوند. برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی نامقید چند روش وجود دارد. این روش‌ها را می‌توان در دو طبقهٔ گسترده دسته بندی کرد که عبارتند از روش‌های جستجوی مستقیم و روش‌های گرادیان . همچنین برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی مقید نیز روش‌های زیادی موجود است. این روش‌ها را می‌توان در دو گروه یعنی روش‌های مستقیم و روش‌های غیر مستقیم دسته‌بندی کرد. در این فصل، ابتدا به بیان مسئله حساب تغییرات می‌پردازیم . سپس مسئله کنترل بهینه را بیان می‌کنیم و روش‌های حل آن را شرح می‌دهیم. در ادامه حل عددی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱ــ۲ حساب تغییرات

حساب تغییرات[۱] با حل مسئله می نیمم زمان، توسط ریاضیدان سوئیسی، جان برنولی[۲] (۱۷۴۸ - ۱۶۶۷) به عنوان یک شاخه از ریاضیات ارائه شده است.او به یک منحنی بین دو نقطهٔ ثابت A و B در صفحهٔ قائم احتیاج داشت که جسمی بر روی آن تحت نیروی ثقل و بدون اصطکاک بلغزد و در مینیمم زمان به پایین برسد. جواب این مسئله، بدیهی نبود و خط مستقیم بین نقاط A و B جواب مسئله نیست. نیوتن حدس زده بود که مسیر بهینه قسمتی ازیک دایره است و مدتی تلاش کرد تا نظریهٔ خود را اثبات کند اما موفق نشد. بعدها توسط برنولی راه حلی برای آن ارائه شد[۱۸]. مسئله فوق حالت خاصی از پیدا کردن مقدار اکسترمم تابعی هایی به صورت زیر است:

$$I = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \qquad (۱ــ۱)$$

که در آن $y = y(x)$ یک مسیر بین نقاط $A(a, \alpha)$ و $B(b, \beta)$ است، یعنی:

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta.$$

همچنین اگر در مسئله فوق شرط $y(b) = \beta$ را حذف کنیم، آنگاه مسئله را با شرط انتهایی آزاد می‌نامند [۱۵] . مسئله فوق را می‌توان برای حالتی که $y(x)$ تابعی برداری به صورت

$$y(x) = [y_۱(x), y_۲(x), ..., y_n(x)],$$

می‌باشد، نیز تعمیم داد.

یکی از روش‌های کلاسیک موجود برای حل مسئله فوق روش اویلر می‌باشد. جهت آشنایی، این روش را به اختصار شرح می‌دهیم.

۱ــ۲ــ۱ روش اویلر

روش اویلر را برای حل مسئله (۱ــ۱) همراه با شرط انتهایی $y(b) = \beta$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید مسیری مانند $y = y(x)$ را چنان ببینیم که تابعی (۱ــ۱) را اکسترمم کند. همچنین فرض کنید $y_\varepsilon(x)$ را به

[۱] Calculus of Variation

[۲] John Bernouli

صورت زیر تعریف کنیم:

$$y_\varepsilon(x) = y_\circ(x) + \varepsilon\eta(x), \qquad (۱-۲)$$

که در آن ε پارامتر و $\eta(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر دلخواه از x می باشد که

$$\eta(a) = \eta(b) = \circ.$$

شرایط بالا بدین منظور است که شرایط $y_\varepsilon(a) = \alpha$ و $y_\varepsilon(b) = \beta$ برقرار باشند. واضح است که تابع بهینه به ازای $\varepsilon = \circ$ به دست می‌آید. حال تابعی (۱−۲) را در تابع (۱−۱) قرار می‌دهیم:

$$I = \int_a^b F(y_\circ + \varepsilon\eta, y'_\circ + \varepsilon\eta', x)dx.$$

حال می‌خواهیم تابعی I اکسترمم شود. از I نسبت به ε مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b [\eta F_{y_\varepsilon}(y_\circ+\varepsilon\eta, y'_\circ+\varepsilon\eta', x)+\eta' F_{y'_\varepsilon}(y_\circ+\varepsilon\eta, y'_\circ+\varepsilon\eta', x)]dx.$$

برای محاسبهٔ اکسترمم I، به ازای $\varepsilon = \circ$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \circ,$$

در نتیجه داریم :

$$\int_a^b [\eta F_y(y_\circ, y'_\circ, x) + \eta' F_{y'}(y_\circ, y'_\circ, x)]dx = \circ,$$

پس

$$\int_a^b \eta F_y(y_\circ, y'_\circ, x)dx + \int_a^b \eta' F_{y'}(y_\circ, y'_\circ, x)dx = \circ.$$

اگر انتگرال دوم را به روش جزء به جزء حل کنیم، داریم:

$$\int_a^b [\eta F_y(y_\circ, y'_\circ, x) - \eta\frac{d}{dx}F_{y'}(y_\circ, y'_\circ, x)]dx + \eta F_{y'}(y_\circ, y'_\circ, x)\Big|_a^b = \circ,$$

و در نتیجه:

$$\int_a^b [\eta(F_y(y_\circ, y'_\circ, x) - \eta\frac{d}{dx}F_{y'}(y_\circ, y'_\circ, x)]dx = \circ.$$

چون تابع η بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر است و $\left(f = F_{y_\circ} - \frac{d}{dx}F_{y'_\circ} \right.$ و $F_y(y_\circ, y'_\circ, x)$ و $F_{y'}(y_\circ, y'_\circ, x)$ را به اختصار با $F_{y_\circ}$ و $F_{y'_\circ}$ نمایش می‌دهیم) پیوسته است داریم:

$$F_{y_\circ} - \frac{d}{dx}F_{y'_\circ} = \circ.$$

معادلهٔ بالا به معادلهٔ اویلر معروف است و مسیرهایی که معادلهٔ I را اکسترمم می‌کنند، در آن معادله صدق می‌کنند.

۱ــ۳ کنترل بهینه

فرض کنیم وضعیت دستگاه در زمان t، بردار $x(t)$ در فضای nــبعدی اقلیدسی (یعنی $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$) باشد که ما این فضا را فضای حالت [۳] X می‌نامیم. همچنان که دستگاه تحت تأثیر زمان است انتظار داریم $x(t)$ یک مسیر پیوسته را در فضای حالت رسم کند. یک ابزار هدایتی یا کنترلی برای این دستگاه را تابع برداری rــبعدی از t همانند u (یعنی $u \in U \subseteq \mathbb{R}^r$) طراحی می‌کنیم و مؤلفه‌های u مجاز هستند که توابعی قطعه به قطعه پیوسته بوده و مقادیرشان محدود باشند به طوری که در هر زمان t، u در ناحیهٔ محدود U از فضای کنترل واقع شود. به عنوان مثال اگر $r = ۲$ به طوری که $u = (u_۱, u_۲)$ و محدودیت $|u_i| \leq ۱$، $i = ۱, ۲$، را تحمیل کنیم، آنگاه U مربع واحد در صفحه است. چنین کنترل‌هایی تحت عنوان قابل قبول [۴] بررسی می‌شوند. در اینجا سیستم‌هایی را مطالعه می‌کنیم که رفتارشان را می‌توان با مجموعهٔ n معادله دیفرانسیل معمولی مدل‌بندی نمود:

$$\dot{x}_i = f_i(x(t), u(t), t), \qquad i = ۱, ..., n.$$

که می‌توان به صورت برداری به صورت زیر نیز نوشت :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t).$$

که درآن $x = (x_۱, ..., x_n)$ و $f = (f_۱, ..., f_n)$. فرض می‌شود که توابع تعریف شدهٔ f_i نسبت به متغیرهای $x_۱, x_۲, ..., x_n$ به‌ازای هر $x \in X$ و تمام کنترل‌های قابل قبول u، پیوسته و مشتق‌پذیر باشند. این فرضیات

[۳] State space
[۴] Admisible

تضمین می‌کنند که با شرایط داده شدهٔ $x(t_0) = x_0$، یک جواب پیوسته و منحصر به فرد از معادلات حالت وجود دارد که در شرایط اولیهٔ $x = x_0$ به ازای $t = t_0$ صدق می‌کند. متذکر می‌شویم جواب $x(t)$ پیوسته است اگرچه کنترل قطعه به قطعه پیوسته می‌باشد. اکنون می‌خواهیم دستگاه را از x_0 در $t = t_0$ به x_1 در $t = t_1$ طوری کنترل کنیم که تابع هزینه

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt,$$

کمینه گردد.

اکنون همواره فرض می‌کنیم که کنترل‌هایی قابل قبول که دستگاه را از x_0 به x_1 هدایت می‌نمایند، موجود هستند و در میان این زیرمجموعه از کنترل های قابل قبول، در جستجوی آن تابع کنترلی هستیم که J را کمینه می‌کند. چنین کنترلی را کنترل بهینه[5] خواهیم نامید. بنابراین یک مسئله کنترل بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\min \quad J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt \\
&s.t. \\
&\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \\
&x(t_0) = x_0, \qquad x(t_1) = x_1.
\end{aligned}$$

به عنوان مثال مدل تصوری زیر را که مکانیسم سطح گلوکز جریان خون در بدن را نمایش می‌دهد در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x(t)$ مقدار گلوکز در خون را در زمان t نمایش می‌دهد و فرض می‌کنیم که این گلوکز متناظر با مقدارش در هر زمان از جریان خون خارج می‌شود. در یک اقدام برای رساندن مقدار آن به مقدار از پیش تعریف شده $x = c$، گلوکز به نسبت $u(t)$ به جریان خون وارد می‌گردد. بنابراین $\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t)$ که α عدد مثبت مشخصی است.

بررسی‌های عملی نشان می‌دهند که ما تنها به مقادیر مثبت x علاقمند هستیم و این که $u(t)$ تجویز شده، مقادیرش را از بازهٔ $0 \leq u(t) \leq m$ می‌گیرد که m عددی مثبت و متناهی است. اکنون فرض کنیم که در ابتدا $x(0) = a$ و این سؤال را بررسی می‌کنیم که آیا با کنترلی که مجاز هستیم، می‌توانیم همیشه سطح

[5] Optimal control

گلوکز را از $x(\circ) = a$ به $x(T) = c$ در زمان $t = T$ هدایت کنیم؟
حال به عنوان مثال می‌توانیم سعی کنیم مسئله را از a تا c به نحوی کنترل کنیم که مجموع گلوکزهای تولید شده را کمینه سازد یعنی $\int_\circ^T u dt$ را کمینه نماید. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۶] رجوع کنید.
یک مسئله کنترل بهینه را می‌توان به روش های مختلفی از جمله هامیلتونی[۶]، اصل بیشینهٔ پونتریاگین[۷] و تئوری اندازه[۸] حل کرد که در زیر به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

۱—۳—۱ روش هامیلتونی

برای حل یک مسئله کنترل بهینه به روش هامیلتونی ابتدا تابعی افزودهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$J^* = \int_{t_a}^{t_b} [f_\circ(x(t), u(t), t) + \lambda(f(x(t), u(t), t) - \dot{x})]dt.$$

تابعی انتگرال $F = f_\circ + \lambda(f - \dot{x})$ تابعی از دو متغیر u و x است و در نتیجه دو معادلهٔ اویلر زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = \circ, \quad (۱—۳)$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}) = \circ. \quad (۱—۴)$$

با تعریف هامیلتونی به صورت

$$H = f_\circ + \lambda f,$$

معادله‌های (۱—۳) و (۱—۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (۱—۵)$$

[۶] Hamiltonian manner
[۷] Ponteryagin maximum principle
[۸] Measure theory

و

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \circ. \qquad (۱-۶)$$

مسیر بهینه باید در این معادلات صدق کند. چون دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول داریم، برای انتگرال‌گیری و کامل کردن جواب به دو شرط نیاز داریم. یکی $x(t_a) = x_a$ و $x(t_b) = x_b$. اگر x در $t = T$ معین نباشد، از شرط «انتهای آزاد» استفاده می‌کنیم (به مرجع [۱۵] مراجعه شود). مثال زیر مطالب بالا را تکمیل می‌نماید.

مثال ۱.۱ — با استفاده از روش هامیلتونی، کنترل بهینهٔ u را به قسمی بیابید که تابعی زیر را اکسترمم سازد:

$I = \int_{\circ}^{۱} (x^{۲} + u^{۲})dt$

$s.t.$

$\dot{x} = u,$

$x(\circ) = ۱,$

$x(۱) =$ آزاد.

حل. [توجه کنید که متغیر کنترل را می‌توان حذف کرده و به یک مسئله حساب تغییرات رسید.]

هامیلتونی عبارت است از:

$$H = x^{۲} + u^{۲} + \lambda u.$$

بنابراین (۱—۶) به صورت زیر در می آید:

$$\lambda = -۲u \Longrightarrow ۲u + \lambda = \circ.$$

همچنین (۱—۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{\lambda} = -۲x.$$

پس از حذف λ و با توجه به رابطهٔ $\dot{x} = u$ داریم:

$$\ddot{x} - x = 0.$$

از حل این معادله نتیجه می‌شود که

$$x = a \sinh t + b \cosh t.$$

با توجه به شرط ابتدایی و شرط انتهایی آزاد، مقادیر a و b به دست می‌آید. پس متغیر کنترل بهینه و مسیر وضعیت متناظر عبارت است از:

$$u = \frac{\sinh(1 - t)}{\cosh 1},$$
$$x = \frac{\cosh(1 - t)}{\cosh 1}.$$

۱–۳–۲ اصل بیشینهٔ پونتریاگین

در اوایل سال‌های ۱۹۶۰، پونتریاگین و همکاران روسی او یک اصل کلی (به نام اصل بیشینه یا کمینه) را به چاپ رساندند که نه تنها دربارهٔ کنترل‌های پیوسته بلکه دربارهٔ کنترل‌های محدود و احتمالاً ناپیوسته نیز بحث می‌گردد. دستگاه کنترلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u), \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u).$$

می‌خواهیم دستگاه را از (x_1^0, x_2^0) در زمان $t = t_0$ به (x_1^1, x_2^1) در زمان غیر مشخص t_1 و با استفاده از توابع کنترل قابل قبول $u(t)$ که قطعه به قطعه پیوسته و کران‌دار هستند، هدایت کنیم به طوری که تابعی زیر را کمینه سازد:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, u)dt.$$

نظریهٔ کلاسیک پیشنهاد می‌کند که ما رفتار تابع عددی

$$H = \psi_0 f_0(x_1, x_2, u) + \psi_1 f_1(x_1, x_2, u) + \psi_2 f_2(x_1, x_2, u),$$

را مورد بررسی قرار دهیم که ψ_i ها در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = ۱, ۲. \qquad (۷-۱)$$

با مفروضات بالا می‌توان اصل بیشینهٔ پونتریاگین را به این صورت بیان نمود:
فرض کنیم u^* یک کنترل بهینه باشد و مسیر متناظر آن نیز $x^* = (x_۱^*, x_۲^*)$ باشد که دستگاه را از $x^۰$ در زمان $t = t_۰$ به $x^۱$ در زمان غیر مشخص $t_۱$ هدایت می‌کند. برای اینکه u^* و x^* بهینه باشند (یعنی J را کمینه کنند)، لازم است که بردار غیر صفر $\psi = (\psi_۰, \psi_۱, \psi_۲)$ که در (۱—۷) صدق می‌کند و نیز تابع عددی

$$H(\psi, x, u) = \psi_۰ f_۰(x, u) + \psi_۱ f_۱(x, u) + \psi_۲ f_۲(x, u),$$

موجود باشند به طوری که
الف) به ازای هر $t_۰ \leq t \leq t_۱$، H به بیشینهٔ خود نسبت به u در $u = u^*(t)$ برسد.
ب) در $t = t_۱$ ، $H(\psi^*, x^*, u^*) = ۰$ و $\psi_۰ \leq ۰$ که $\psi^*(t)$ جواب (۱—۷) به ازای $u = u^*(t)$ می‌باشد.
برای اثبات می‌توانید به [۱٦] مراجعه کنید.

۱—۳—۳ نظریهٔ اندازه

یکی از روش‌های نسبتاً جدید برای حل مسئله کنترل بهینه، مبتنی بر تعویض مسئله کنترل بهینه با مسئله‌ای در فضای اندازه است. این ایده‌ای است که اولین بار توسط ریاضیدانی فرانسوی به نام گوئیلا آئوری[۹] ارائه شد، پس از او یانگ[۱۰] از آن برای حل مسئله کنترل بهینه استفاده نمود. این روش توسط روبیو[۱۱] در کتابش [۱۳] در سال ۱۹۸٦ به صورت کلاسیک ارائه و منتشر شد.
در روش نظریهٔ اندازه ابتدا مسئله کنترل بهینه به یک مسئله در فضای بی‌نهایت بعدی اندازه‌ها تبدیل می‌شود. مسئله به دست آمده را با در نظر گرفتن تعدادی متناهی از قیود تقریب می‌زنیم. در دومین گام تقریب، مسئله را به یک مسئله غیرخطی با بعد متناهی و در انتها به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با بعد

[۹] A. Ghoila Houri
[۱۰] L. C. Young
[۱۱] J. E. Rubio

متناهی تبدیل می‌کنیم. یکی از مزایایی که این روش جدید دارد این است که ما برای کلیهٔ مسائل خطی و غیرخطی در فضای کنترل کلاسیک، تنها با مسئله برنامه‌ریزی خطی سر و کار داریم. این روش برای حل مسائل مختلف ریاضی مورد استفاده واقع شده است. برای آشنایی بیشتر با این روش، به مرجع [۱۴] و [۱۹] و [۲۰] مراجعه کنید.

۱—۴ مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی

۱—۴—۱ بیان مسئله

فرم کلی یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی به شکل زیر است:

$x \in R^n$ را به گونه‌ای بیابید که تابع

$$f(x),$$

را به شرایط

$$g_j(x) \leq \circ, \qquad j = ۱, ۲, ..., m.$$

کمینه کند.

باید توجه داشت که در یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی، تابع هدف و یا حداقل یکی از قیود، غیرخطی هستند.

۱—۵ مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی نامقید

همان‌طور که ذکر شد، دو روش کلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی نامقید وجود دارد. روش‌های جستجوی مستقیم در یافتن کمینه، تنها به ارزیابی تابع هدف نیاز دارند و از مشتق‌های جزئی تابع استفاده نمی‌کنند. بنابراین غالباً آنها را روش‌های بدون گرادیان می‌نامند. این روش‌ها برای مسائل ساده‌ای که تعداد نسبتاً کمی متغیر دارند مناسب هستند. عموماً کارایی این روش‌ها کمتر از روش‌های شیبی است.

روش‌های شیبی، علاوه بر ارزیابی تابع به ارزیابی مشتق‌های اول و احتمالاً مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر تابع هدف نیاز دارند، چون در این روش‌ها از اطلاعات بیشتری دربارهٔ تابع مورد کمینه‌سازی استفاده می‌شود. معمولاً روش‌های شیبی در مقایسه با روش‌های جستجوی مستقیم کاراتر هستند. روش‌های شیبی را روش‌های گرادیان هم می‌نامند. برای توضیح بیشتر به مرجع [۱۷] مراجعه کنید.

برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی نامقید الگوریتم‌ها و روش‌های متعددی وجود دارد که در زیر به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

۱—۵—۱ روش‌های جستجوی مستقیم (که نیاز به مشتق ندارند.) [۱۲]

- روش جستجوی تصادفی[۱۳]
- روش یک متغیره [۱۴]
- روش‌های جستجوی نمونه[۱۵]
  - (i) روش پاول[۱۶]
  - (ii) روش هوک و جیوز[۱۷]
- روش مختصات چرخان روزنبراک[۱۸]
- روش سیمپلکس

۱—۵—۲ روش‌های گرادیان (که نیاز به مشتق دارند.)

[۱۲] Direct search method

[۱۳] Random search methody

[۱۴] Univariate method

[۱۵] Patern search method

[۱۶] Pawell's method

[۱۷] Hooke and Jeeves's method

[۱۸] Rosenbraock's method of rotating coordinates

- روش تندترین شیب[۱۹]
- روش گرادیان مزدوج[۲۰] (فلچر– ریویس)
- روش نیوتن[۲۱]
- روش متریک متغیر[۲۲] (دیویدون– فلچر– پاول)

برای آشنایی بیشتر با هر روش به مرجع [۱۷] مراجعه کنید.

۱–۶ مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی مقید

همان‌طور که در مقدمه هم گفتیم، دو روش غیر مستقیم و مستقیم برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی مقید وجود دارد که در زیر به توضیح آنها می‌پردازیم.

۱–۶–۱ روش‌های غیر مستقیم

- تبدیل متغیرها

در برخی از مسائل کمینه‌سازی مقید، قیدها به صورت توابع ساده و صریحی از متغیرهای تصمیم بیان می‌شوند. در این حالات، امکان یک تغییر متغیر به گونه‌ای که قیدها خود به خود برآورده شوند، وجود دارد. در برخی حالات دیگر، ممکن است قیدهایی که در جواب بهینه فعال هستند، از قبل معلوم باشند. در این حالات، می‌توانیم از معادلهٔ قید مشخص $g_j(x) = ۰ \ , \ (j = ۱, ۲, ..., m)$ برای حذف برخی از متغیرهای مسئله استفاده کنیم. این هر دو حالت تحت عنوان تبدیل متغیرها قرار می‌گیرند.

- روش‌های تابع جریمه

(i) روش تابع جریمهٔ داخلی

[۱۹] Steepest method
[۲۰] Conjugate Gradient method
[۲۱] Newton's method
[۲۲] Variable metric

(ii) روش تابع جریمهٔ خارجی

دو نوع روش تابع جریمه، یعنی روش تابع جریمهٔ داخلی و روش تابع جریمهٔ خارجی وجود دارند. در هر دو نوع روش، مسئله مقید، به دنباله‌ای از مسائل کمینه‌سازی نامقید به گونه‌ای تبدیل می‌شود که بتوان کمینهٔ مقید را با حل دنباله‌ای از مسائل کمینه‌سازی نامقید به دست آورد.
در روش‌های تابع جریمهٔ داخلی، دنبالهٔ کمینه‌های نامقید در ناحیهٔ امکان‌پذیر قرار دارد. بنابراین از داخل ناحیهٔ امکان‌پذیر به کمینهٔ مقید همگرا می‌شود. در روش‌های خارجی، دنبالهٔ کمینه‌های نامقید در ناحیهٔ امکان ناپذیر قرار دارد و از خارج ناحیهٔ امکان‌پذیر به جواب مطلوب همگرا می‌شود. برای آشنایی بیشتر به مرجع [۱۷] مراجعه کنید.

۱−۶−۲ روش‌های مستقیم

- روش جستجوی هیوریستیک[۲۳]

این روش پشتوانهٔ تئوری زیادی ندارد. در این طبقه روش کمپلکس [۲۴] (که به روش سیمپلکس شباهت دارد) را می‌توان نام برد.

- روش‌های تقریبی[۲۵]

(i) روش صفحهٔ برش

(ii) روش برنامه‌ریزی تقریبی

در روش‌های تقریبی، تابع هدف و قیدهای غیرخطی، حول یک نقطه، خطی می‌شوند و مسئله برنامه‌ریزی خطی تقریبی با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی حل می‌شود. آنگاه از جواب بهینهٔ حاصل برای ساختن یک تقریب خطی جدید استفاده و دوباره با استفاده از روش‌های LP حل می‌شود. این فرآیند تا برقراری معیار همگرایی تعیین شده ادامه می‌یابد. در این جا دو روش وجود دارد که از این اصل استفاده

Heuristic methods[۲۳]

Complex[۲۴]

Constraint approximation method[۲۵]