بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیر خطی مرتبه کسری با استفاده از موجک‌های کسینوس و سینوس

استاد راهنما:

دکتر مهدی قاسمی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا احمدی دارانی

پژوهشگر:

سیده زهرا جزائری سورشجانی

مهر ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه شهرکرد است.

تقدیم به

پدر بزرگوارم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم.

مادر مهربانم

که وجود پر مهر و عطوفت خود را شمع راه زندگانیم قرار داده است.

و استاد گرانقدرم دکتر قاسمی.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می داری.

تو می دانی و همه می دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته ام می درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه هایم احساس می کنم. نمی توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله های ضعیف و افتاده، پنهان کرده ام دریاب، دریاب.

تو می دانی و همه می دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، قناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، روزی کن.

---
[1] مناجاتي از دكتر علي شريعتي.

سپاس گزاری...

خداوند متعال را سپاس گزارم که لطف و کرم خود را به بنده عنایت فرمود تا بتوانم در راهی قدم نهم که هر چند برای غبار کوچکی چون من بسیار بزرگ می نماید ولی انکار ناپذیر است که غروب نیز شکوه دل انگیزش را مدیون تلاطم ذرات غباری است که هر چند کوچک و بی مقدار منعم سفره خویش ساخته اند.

سپاس گزار کسانی هستم که سرآغاز تولد من هستند. از یکی زاده شدم و از دیگری جاودانه. پدری که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار موی از او بپای من سیاه نماند. سپاس گزارم از خواهران و برادران عزیزم که همیشه خالصانه محبت شان را نثارم کرده اند و همدم همیشگی ام بوده اند.

صمیمانه ترین مراتب سپاس خود را به جناب آقای دکتر مهدی قاسمی تقدیم نموده که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمودند و همواره راهنما و راه گشای اینجانب در اتمام و اکمال پایان نامه بوده اند.

بسی شایسته است که از جناب آقای دکتر محمدرضا احمدی دارانی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با مشاوره های کارساز و سازنده بارور ساختند، تقدیر و تشکر نمایم.

از کلیه دوستان و همکلاسی های عزیز و مهربانم که در هر عنوان و سمتی صمیمانه یاریم نمودند، هزاران بار سپاس گزارم.

به امید موفقیت روز افزون و جاودان برای تمامی این عزیزان

سیده زهرا جزائری سورشجانی

مهر ماه ۱۳۹۱

چکیده

موجک‌های کسینوس و سینوس مجموعه‌ای از توابع متعامداند که برای تقریب توابع به کار می‌روند. در این پایان‌نامه، از موجک‌های کسینوس و سینوس در بازه $[0, 1]$ برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی نوع دوم استفاده می‌کنیم.
این روش بر پایه تبدیل معادله انتگرال-دیفرانسیل به دستگاه معادلات جبری بوسیله بسط جواب بر حسب موجک‌های کسینوس و سینوس با ضرایب مجهول است. مشخصه اصلی این روش مؤثر، تبدیل یک معادله انتگرال-دیفرانسیل به یک معادله جبری معادل است.
برای حل این معادلات، توابع مجهول و معلوم را توسط موجک‌های کسینوس و سینوس تقریب می‌زنیم، سپس این تقریب‌ها را در معادلات جای‌گذاری می‌کنیم. در این مسئله یک دستگاه معادله غیرخطی به‌دست می‌آوریم که با حل این دستگاه از معادلات یک جواب تقریبی برای جواب معادله انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری از نوع دوم به‌دست می‌آید.

کلمات کلیدی : معادلات انتگرال-دیفرانسیل، محاسبات کسری، موجک‌های کسینوس و سینوس، تابع بلاک پالس.

فهرست مطالب

مقدمه

عمومیت دادن مشتق $D^\alpha f(x)$ به مقادیر ناصحیح α به آغاز مبحث حساب دیفرانسیل بر می‌گردد. در سال ۱۶۹۵ لیبنیز [۲] چندین نکته درباره‌ی محاسبه‌ی $D^{\frac{1}{2}} f(x)$ در نامه‌ای به برنولی [۳] ، هوپیتال [۴] و والز [۵] بیان کرده بود. اما پیشرفت تئوری انتگرال و مشتقات کسری مدیون اویلر [۶] و لیوویل [۷] و آبل [۸] (۱۸۲۳) است. در ده سال اخیر مطالعه‌ی محاسبات کسری با توجه بیشتر فیزیکدانان و ریاضیدانان شروع شده است.
چندی از ریاضیدانان پدیده‌هایی را فرمول‌بندی کرده‌اند که شامل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی با مرتبه کسری هستند. چندین تکنیک برای این قبیل معادلات مثل روش آدمین [۱۰]، [۱۳] و روش کالوکیشن [۱۲] وجود دارد که بیشتر روش‌ها در مسائل خطی استفاده شده و تعداد کمی از آثار به مسائل غیرخطی توجه دارد. در حالی که پدیده غیرخطی از اهمیت زیادی در رشته‌های مختلف علوم و مهندسی برخوردار است. اخیراً توجه بیشتر برای جستجوی روش‌های مؤثرتر تعیین یک جواب تقریبی یا دقیق برای مدل‌های غیرخطی اختصاص داده‌اند [۶] ، [۱۷]، [۱۸].

نظریه موجک‌ها یک رویداد نسبتاً جدید در ریاضیات کاربردی است. موفقیت کنونی این موضوع دو دلیل عمده دارد. از یک طرف فرضیه موجک‌ها را می‌توان تلفیقی از علوم مهندسی، فیزیک و ریاضیات محض در نظر گرفت و از طرف دیگر موجک‌ها یک ابزار نسبتاً ساده‌ی ریاضی هستند که کاربردهای گوناگونی دارند. موجک‌ها به عنوان یک سیستم متعامد به دلیل قابلیت نمایش توابع در سطوح مختلف تجزیه، جایگاه خاصی را در بین سیستم های متعامد دیگر به خود اختصاص داده‌اند.
در سال‌های اخیر سیستم‌های متعامد جهت تحلیل سیستم‌های کنترل بهینه، معادلات انتگرال، دیفرانسیل و ...مورد توجه خاص پژوهشگران قرار گرفته است. ویژگی اصلی روش‌های مبتنی بر سیستم‌های متعامد آن است که ابتدا پاسخ سیستم را به صورت بسطی از توابع متعامد در نظر

[۲] Leibniz
[۳] Bernoulli
[۴] L'Hopital
[۵] Wallis
[۶] Euler
[۷] Liouville
[۸] Abel

گرفته و سپس با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی مناسب، معادلات مورد نظر را به دستگاه معادلات جبری تبدیل و به حل دستگاه می‌پردازیم.
موجک‌ها به عنوان جایگزینی مناسب برای پایه‌های کلاسیک نظیر بلاک پالس، فوریه، لژاندر و ... پیشنهاد می‌شود. دو دلیل عمده برای اینکار وجود دارد. اول اینکه در بسط یک تابع یا یک سیگنال با استفاده از موجک‌ها، ضرایب اولیه در بسط موجک، شامل اکثر اطلاعات مربوط به تابع یا سیگنال می‌باشد. لذا در موجک‌ها نسبت به بقیه پایه‌ها با جملات کمتری از پایه می‌توان به دقت مناسبی دست یافت. [۵] دومین و عمده‌ترین مزیت استفاده از موجک این است که ماتریس عملیاتی انتگرال، مشتق و ... تنک می‌باشد که باعث می‌شود دستگاه معادلات جبری حاصل، به‌سادگی حل گردد.

این پایان‌نامه در پنج فصل تنظیم شده است. در فصل اول مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند مطرح می‌شود. در فصل دوم به معرفی توابع بلاک پالس و موجک کسینوس وسینوس و ویژگی‌های آن‌ها پرداخته و ماتریس عملگرهای آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. در فصل‌های سوم، چهارم و پنجم با استفاده از موجک کسینوس و سینوس به ترتیب به حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی فردهلم، ولترا و فردهلم-ولترا می‌پردازیم.

فهرست نمادها

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

این فصل را به مرور برخی مفاهیم پایه و مقدماتی که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند، اختصاص می‌دهیم. در بخش اول بعضی از مفاهیم ابتدائی آنالیز حقیقی را یادآوری می‌کنیم، سپس تابع پله‌ای واحد و گاما اویلر را معرفی می‌کنیم. در بخش چهارم بعد از تعریف تبدیلات لاپلاس چند خاصیت مورد نیاز در فصل‌های بعدی را بیان و اثبات می‌کنیم. سپس به معرفی محاسبات کسری و در آخر به معرفی معادلات انتگرال می‌پردازیم.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه ناتهی X را یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ گویند هرگاه توابع $+ : X \times X \longrightarrow X$ و $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ وجود داشته باشند به طوری که در شرایط زیر صدق کنند:

۱) $\forall x, y \in X;\ x + y = y + x,\ x \cdot y = y \cdot x$

۲) $\forall x, y, z \in X;\ (x + y) + z = x + (y + z)$

۳) $\exists \circ \in X,\ \forall x \in X;\ x + \circ = \circ + x = x$

۴) $\forall x \in X\ \exists -x \in X;\ x + (-x) = \circ$

۵) $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R};\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

۶) $\forall x \in X,\ \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R};\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

۷) $\forall x \in X,\ \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R};\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x)$

۸) $\forall x \in X;\ ۱ \cdot x = x \cdot ۱ = x$

تعریف ۲.۱.۱. تابع حقیقی $\|\cdot\|$ تعریف شده بر فضای برداری X را یک نرم نامند اگر در سه خاصیت زیر صدق نماید:

۱) $\forall x \in X;\ \|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

۲) $\forall x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R};\ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

۳) $x, y \in X;\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

خاصیت (۳) را نامساوی مثلثی می‌نامیم.

فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار یا فقط یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. تابع $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای برداری یک عملگر خطی یا تبدیل خطی است اگر $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ برقرار باشد. توجه کنید که هر عملگر خطی T، در $T(0) = 0$ صدق می‌کند.

تعریف ۴.۱.۱. یک ضرب داخلی روی فضای برداری X، یک نگاشت از $X \times Y$ به یک میدان اسکالر K (حقیقی یا مختلط) است به طوری که برای هر جفت از بردارهای $x, y \in \mathbb{R}$ یک اسکالر $\prec x, y \succ$ از K وجود دارد که آن را ضرب داخلی x, y می‌نامیم. برای همه بردارهای x, y, z و اسکالر α شرایط زیر برقرار می‌باشد:

۱) $\prec x + y, z \succ = \prec x, z \succ + \prec y, z \succ$

۲) $\prec x, y \succ = \prec y, x \succ$

۳) $\prec \alpha x, y \succ = \alpha \prec x, y \succ$

۴) $\prec x, x \succ \geq 0,\ x = 0 \Longleftrightarrow \prec x, x \succ = 0$.

فضای برداری X با یک ضرب داخلی تعریف شده بر روی آن را فضای ضرب داخلی X می‌نامیم. روی این فضای ضرب داخلی یک نرم را به صورت $\|x\| = \sqrt{\prec x, x \succ}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۱.۱. عنصر x از فضای ضرب داخلی X را نسبت به عنصر $y \in X$ متعامد گویند هرگاه $\prec x, y \succ = 0$.

تعریف ۶.۱.۱. زیر مجموعه‌ای از فضای ضرب داخلی X که هر دو عضو متمایز آن نسبت به هم متعامد باشند را مجموعه متعامد M گویند.

یک زیر مجموعه متعامد یکه $M \subset X$، مجموعه‌ای متعامد در X است که هر عضو آن دارای نرم یک باشد. به عبارت دیگر برای هر x, y در M

$$\prec x, y \succ = \begin{cases} 0 & x \neq y, \\ 1 & x = y. \end{cases}$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. گردایه‌ی S از زیر مجموعه‌های X را نیم حلقه نامیم اگر در سه خاصیت زیر صدق کند:

۱) مجموعه تهی متعلق به S باشد، یعنی $\emptyset \in S$.

۲) هرگاه $A, B \in S$، آن‌گاه $A \cap B \in S$.

۳) به ازای هر دو مجموعه از S، تفضل آن‌ها را بتوان به صورت اجتماعی متناهی از اعضای از هم جدای S نوشت. یعنی به‌ازای هر $A, B \in S$، مجموعه‌هایی چون $C_۱, C_۲, ..., C_n$ در S وجود داشته باشند که $A - B = \bigcup_{i=۱}^{n} C_i$ و اگر $i \neq j$ ، $C_i \cap C_j = \emptyset$.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید S نیم حلقه‌ای از مجموعه‌ی X باشد. تابع $\mu : S \longrightarrow [۰, \infty]$ را یک اندازه بر S نامیم اگر از خواص زیر بهره‌مند باشد:

۱) $\mu(\emptyset) = ۰$

۲) هرگاه $\{A_n\}$ دنباله ای از هم جدا از S با $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \in S$ باشد، آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n)$$

باشد. (یعنی μ، σ-جمعی است.)

سه‌تایی (X, S, μ) را که در آن X یک مجموعه‌ی ناتهی، S نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X و μ یک اندازه روی S است، یک فضای اندازه نام دارد.

تعریف ۹.۱.۱. اندازه لبگ [۱] λ ، اندازه‌ای است که بر نیم حلقه‌ی $S = \{[a, b): \ a \leq b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$ با $\lambda([a, b)) = b - a$ تعریف شده است.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیر مجموعه‌ی E از X را اندازه‌پذیر (یا به طور دقیق‌تر، μ-اندازه‌پذیر) نامیم اگر

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$$

به ازای هر $A \subseteq X$ برقرار باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری باشد و E زیر مجموعه‌ای از X باشد. نقطه‌ی p یک نقطه‌ی درونی E است هرگاه یک همسایگی از p مانند N باشد به طوری که $N \subset E$. هم‌چنین E باز است هرگاه هر نقطه‌ی E یک نقطه درونی‌اش باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. هرگاه $f^{-۱}(\Omega)$ به‌ازای هر زیر مجموعه‌ی باز Ω از $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد، f را یک تابع اندازه‌پذیر می‌نامیم.

[۱] Lebesgue's measune

تعریف ۱۳.۱.۱. برای هر $1 \leq p < \infty$ ، فضای متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر لبگ $f : [a, b] \longrightarrow C$ که

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

را فضای $L^p[a, b]$ گوئیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. برای هر $m \geq 0$، فضای سوبولف را با نماد H^m نشان می‌دهیم و به صورت

$$H^m([a, b]) = \left\{ f \in L^2([a, b]) \mid \frac{d^n f}{dt^n} \in L^2([a, b]), \ 0 \leq n \leq m \right\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. تابع w، که بر بازه‌ی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر بوده و بر (a, b) در $w(x) \geq 0$ صدق کند ولی بر هر زیر بازه از (a, b)، $w(x) \neq 0$ باشد، یک تابع وزن نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید توابع حقیقی یا مختلط f و g بر بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشند، ضرب داخلی توابع f و g در L^2 را به صورت:

$$\prec f, g \succ = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

تعریف می‌کنیم. هم‌چنین ضرب داخلی وزن‌دار توابع f و g با تابع وزن w را در L^2 به صورت:

$$\prec f, g \succ = \int_a^b w(x) f(x) \overline{g(x)} dx$$

تعریف می‌کنیم. نماد $\overline{z}$، مزدوج z است. برای تابع حقیقی f داریم: $\overline{f} = f$.

گزاره ۱۷.۱.۱. *اگر $\{x_i\}$ یک مجموعه متعامد نرمال (یکه) از توابع L^2 باشد، آن‌گاه این مجموعه متعامد، مستقل‌خطی است.*

برهان. فرض کنید $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعه متعامد یکه از توابع L^2 باشد. ثابت می‌کنیم:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = 0 \implies \forall i \ \ c_i = 0.$$

فرض کنید $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = 0$. اگر طرفین رابطه را در x_i ضرب کنیم و روی بازه‌ی $[a, b]$ انتگرال بگیریم به‌دست می‌آوریم:

$$c_1 \int_a^b x_i(t) x_1(t) dt + ... + c_i \int_a^b x_i(t) x_i(t) dt + ... + c_n \int_a^b x_i(t) x_n(t) dt = 0$$

چون مجموعه‌ی x_i متعامد یکه است پس $\prec x_i, x_j \succ = 0$ برای $i \neq j$ و $\prec x_i, x_i \succ = 1$ پس $\forall i \ \ c_i = 0$. □

تعریف ۱۸.۱.۱. مجموعه متعامد یکه $\{\phi_i\}$ کامل است هرگاه فقط یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) برای هر تابع ψ در L^2 داریم:
$$\psi = \sum_i \prec \psi, \phi_i \succ \phi_i = \sum_i a_i \phi_i.$$
به $\prec \psi, \phi_i \succ$ ضریب فوریه گویند.

۲) برای هر تابع ψ در L^2 داشته باشیم:
$$\|\psi\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} | \prec \psi, \phi_i \succ |^2.$$
رابطه‌ی فوق اتحاد پارسوال [2] است.

۳) اگر ضرایب فوریه یک تابع برابر صفر باشد آن تابع صفر است.

۴) تابع ψی در L^2 وجود ندارد به طوری که $\{\psi, \phi_1, ..., \phi_k, ...\}$ مجموعه متعامد یکه باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازه باشند. نیم‌حلقه‌ی حاصل ضربی $S \times \Sigma$ از زیر مجموعه‌های $X \times Y$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$S \times \Sigma = \{A \times B \ : \ B \in \Sigma, A \in S\}.$$

تابع مجموعه‌ای $\mu \times \nu : S \times \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ را با $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ به ازای هر $A \times B \in S \times \Sigma$ تعریف می‌کنیم. این تابع مجموعه‌ای یک اندازه بر نیم حلقه‌ی حاصل ضربی $S \times \Sigma$ به نام اندازه‌ی حاصل ضربی μ و ν است.

قضیه ۲۰.۱.۱. (فوبینی) *فرض کنید $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع $\mu \times \nu$-انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت، هر دو انتگرال مکرر موجودند و*
$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f d\mu d\nu = \int \int f d\nu d\mu$$
برقرار است.

برهان. به مرجع [۱] رجوع شود. □

قضیه ۲۱.۱.۱. (صورت دیگر قضیه فوبینی) *فرض کنید f بر مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشد. هرگاه $g \in \mathbb{R}$ بر $[a, b]$ و $h \in \mathbb{R}$ بر $[c, d]$ باشد، آن‌گاه*
$$\int_a^b \int_c^d g(x)h(y)f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)f(x, y)dxdy$$

برهان. به مرجع [۲] رجوع شود. □

[2] Parseval's identity

۲.۱ تابع پله‌ای واحد

تعریف ۱.۲.۱. تابع پله‌ای واحد یا هوی ساید [۳] ، $H(t)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

هر تابع پیوسته قطعه‌ای را می توان بر حسب توابع پله‌ای واحد با یک فرمول بیان نمود.

مثال ۲.۲.۱. تابع $f(x)$ را که بر بازه $0 \leq t < \infty$ به صورت زیر تعریف شده است، در نظر بگیرید:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t & 1 \leq t < 2, \\ 1 & 2 \leq t. \end{cases}$$

می‌توان نوشت:

$$f(t) = [H(t) - H(t-1)]t + [H(t-1) - H(t-2)](2-t) + H(t-2)$$

یا چون $f(t)$ را برای $t \geq 0$ بررسی می‌کنیم، می‌نویسیم:

$$f(t) = [1 - H(t-1)]t + [H(t-1) - H(t-2)](2-t) + H(t-2).$$

۳.۱ تابع گاما-اویلر

یکی از توابع مورد نیاز تابع گاما-اویلر [۴] $\Gamma(z)$، که تعمیم $n!$ است، می‌باشد و اجازه می‌دهد که n مقادیر غیرصحیح و یا حتی مختلط بگیرد.

تعریف ۱.۳.۱. تابع گاما-اویلر با نماد $\Gamma(z)$ نشان داده می‌شود و توسط انتگرال

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

تعریف می‌شود. این انتگرال در نیم صفحه راست مختلط $Re(z) > 0$ همگراست.

یکی از خواص اصلی تابع گاما-اویلر است که در معادله تابعی $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ صدق می کند، زیرا با استفاده از انتگرال‌گیری جزبه‌جز داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt \\ &= \left[-e^{-t} t^z\right]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

[۳] Howisd

[۴] Euler-gamma

۴.۱ تبدیلات لاپلاس

تابع $F(s)$ از متغیر مختلط s که با رابطه

$$F(s) = L\{f(x); s\} = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x) \quad (۱.۱)$$

تعریف شده است تبدیل لاپلاس [۵] از تابع $f(x)$ نامیده می‌شود. شرط لازم برای وجود انتگرال (۱.۱) این است که ثابت‌های مثبت M و X موجود باشد به طوری که برای هر $x > X$ داشته باشیم:

$$e^{-\alpha x}|f(x)| \leq M.$$

اگر تبدیل لاپلاس $f(x)$ موجود و برابر $F(s)$ باشد در این صورت می‌توان f را با کمک تبدیل لاپلاس معکوس به‌دست آورد یعنی:

$$f(x) = L^{-1}\{F(s); x\}.$$

قضیه ۱.۴.۱. *فرض کنید توابع f_1، f_2 و f_3 روی $[0, \infty)$ به گونه‌ای که تبدیل لاپلاس آن‌ها، F_1، F_2 و F_3 برای هر $s \geq s_0$ با $s_0 \in \mathbb{R}$ مناسب موجود است، مفروض باشد. در این صورت:*

۱) *(خاصیت خطی تبدیل لاپلاس) اگر $f_3(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ با ثابت‌های حقیقی دلخواه a_1 و a_2 باشد آن‌گاه:*

$$F_3(s) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s).$$

برهان. با توجه به خاصیت خطی بودن انتگرال بدیهی است. □

۲) *(تبدیل لاپلاس ضرب پیچشی) اگر f_3 پیچش f_1 و f_2 باشد یعنی:*

$$f_3(x) = \int_{0}^{x} f_1(x-t) f_2(t) dt = \int_{0}^{x} f_1(t) f_2(x-t) dt$$

آن‌گاه

$$F_3(s) = F_1(s) F_2(s).$$

برهان.

$$F_3(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} \int_{0}^{x} f_1(x-t) f_2(t) dt dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{x} e^{-sx} f_1(x-t) f_2(t) dt dx$$

[۵] Laplace transform