بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

تحدب تعمیم یافته ونامساوی ها

فاطمه نورمحمدی

مرکز آموزشهای نیمه حضوری
دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

۱۳۸۸

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر رسول آقالاری

پایان نامه ~~آقای~~/خانم فاطمه نورمحمدی به تاریخ ۸۸/۱/۲۱

شماره مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه و نمره

قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر رسول آقالاری

۲- استاد مشاور : دکتر

۳- داور خارجی : دکتر شهرام نجف زاده

۴- داور داخلی : دکتر سعید استادباشی

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر علی عبادیان

تقدیم به

گل پیرایان بوستان عشق

پدر بزرگوارم

مادر مهربانم

همسر عزیزم

شکر آن بود که نعمت نبینی ،

منعم را بینی .

بار پروردگارا سپاسگزارم

خدا را شکر می گویم از اینکه فرصتی دوباره برای آموختن دانستنیهای نو و تمرین تفکر ریاضی وار به من عطا کرد. از استاد راهنمای گرامی دکتر آقالاری که تکمیل این پایان نامه بدون کمک های ایشان ممکن نبود کمال تشکر را دارم. از داوران محترم آقایان دکتر نجف زاده و دکتر استاد باشی بخاطر راهنمایی های ارزشمند بسیار سپاسگزارم. قدردانی خود را از اساتید گروه ریاضی دانشگاه ارومیه که افتخار شاگردیشانم را داشتم اعلام می دارم. همچنین از اعضای خانواده ام که در این مدت محیطی مناسب برای مطالعه فراهم آوردند بسیار ممنونم. از خانواده همسرم و عمویم و خانواده نعمتی نیز متشکرم.

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید $\mathcal{R}_+=(0,\infty)$ و فرض کنید $\mathcal{M}$ خانواده تمام توابع میانگین در $\mathcal{R}_+$ (مانند میانگین های هندسی، حسابی و هارمونیک)، باشد.

m_2 و m_1 را از $\mathcal{M}$ در نظر می گیریم، گوییم تابع $f:\mathcal{R}_+ \longrightarrow \mathcal{R}_+$ ، (m_1,m_2)—محدب است اگر برای هر $x,y \in \mathcal{R}_+$، $f\Big(m_1(x,y)\Big) \leq m_2\Big(f(x),f(y)\Big)$. تحدب معمولی حالت خاصی است که در آن هر دو تابع میانگین، میانگین حسابی فرض شده است.

مادر این پایان نامه ارتباط مفهوم (m_1,m_2)—محدب و m_2 و m_1 را مطالعه کرده و شرایط کافی را برای (m_1,m_2)—محدب بودن توابعی که با سری مکلورن تعریف می شوند ، ارائه می دهیم

این شرایط از بررسی ضرایب مکلورن حاصل می شود. در نهایت این مباحث یک سری جدید از نامساوی ها را برای توابع خاص گوناگونی مانند: تابع فوق هندسی گاوس و نوع خاصی از تابع بسل تعمیم یافته، تولید می کند.

در ادامه M را یک میانگین اکید اختیاری در بازه J فرض کرده و $M_p^{[\varphi]}$ یک میانگین شبه—حسابی با وزن $p \in (0,1)$ و مولد $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{R}$ در نظر می گیریم .

اگر برای هر زیر بازهٔ $I \subset J$، $M_p^{[\varphi]}$—آفین بودن همه توابع پیوسته $f : I \longrightarrow J$، M—محدب بودن f را ایجاب کند، آنگاه نشان می دهیم که M یک میانگین شبه—حسابی است .

پیشگفتار

این پایان بر اساس مرجع [۴] و [۱۴] در چهار فصل نوشته شده است.

در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز برای فصول بعدی آورده شده است. این فصل در چهار بخش نوشته شده است که در بخش اول مطالبی در مورد تابع بتا و گاما و در بخش دوم صورت ساده انتیگرالی تابع فوق هندسی بیان شده و بخش سوم اشاره به چگونگی ارتباط تابع فوق هندسی گاوس و چند جمله ای لژاندر دارد.

فصل دوم شامل یک بخش است. در این فصل تعریف تابع میانگین و تحدب تعمیم یافته و برخی مثال ها همراه قضیه هایی اساسی مورد نیاز جهت اثبات نتایج اصلی این پایان نامه در فصل سوم بیان شده است.

در فصل سوم که مهم ترین فصل پایان نامه است، به بیان کاربرد تحدب تعمیم یافته در سری های توانی پرداخته ایم. مطالب این فصل نامساوی های جالب و شگفت انگیزی را در برخی سری های توانی نتیجه می دهد. از جمله سری های توانی که نامساوی ها برای آن بررسی می شود، توابع فوق هندسی گاوس هستند. این توابع در حالات خاص و محدود بسیاری از توابع مقدماتی را تولید می کنند، لذا نامساوی های بیان شده از اهمیت و ارزش زیادی برخوردار می باشند.

فصل چهارم و در واقع آخرین فصل، فصل اصلی دیگری است که در آن تعریف میانگین شبه-حسابی و چگونگی ارتباط این میانگین با میانگین های دیگر، بواسطه استفاده از مفهوم تحدب

تعمیم یافته بررسی شده است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ حاصل‌ضرب نامتناهی

در این فصل قضایا و تعاریفی بیان می‌شوند که در فصول بعد از آن‌ها استفاده می‌گردد و با توجه به نقش مهم این مباحث در مطالعه‌ی فصول بعد، در برخی از موارد به اثبات قضایا نیز اشاره گردیده است.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید a_k به‌ازای هر k از اعداد صحیح مثبت، یک دنباله باشد. حاصل‌ضرب متناهی

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) = (1 + a_1) \cdots (1 + a_k) \qquad (1)$$

را در نظر بگیرید، اگر $\lim_{n\to\infty} P_n$ موجود و برابر $P \neq 0$ باشد، گوییم حاصل‌ضرب نامتناهی

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \qquad (2)$$

همگرا به P می‌باشد. حال اگر حاصل‌ضرب نامتناهی (۲)، عامل صفر داشته باشد و با حذف تعداد متناهی از عوامل صفر آن، حاصل‌ضرب همگرا به $P \neq 0$ شود، گوییم که حاصل‌ضرب (۲) به صفر همگراست. اگر حاصل‌ضرب همگرا نباشد گوییم واگراست.

قضیه ۲.۱.۱ اگر حاصل‌ضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ به $P \neq 0$ همگرا باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

برهان : با در نظر گرفتن $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ خواهیم داشت:

$$1 = \frac{P}{P} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}(1+a_n)$$

لذا $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ خواهد بود. □

قضیه ۳.۱.۱ اگر به‌ازای هر n، $a_n \neq -1$، آن‌گاه $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ همگرا باشد.

برهان : فرض کنید $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگرا به P باشد و $a_n \neq -1$. داریم:

$$\log \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = \sum_{k=1}^{n}\log(1+a_k)$$

لذا

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\log\left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)\\ &= \log\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\right) = \log\ P\end{aligned}$$

و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ همگرا خواهد بود.

بر عکس، فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ همگرا به l باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\log\left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)\\ &= \log\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\right)\end{aligned}$$

و در نتیجه $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگرا خواهد بود. □

تعریف ۴.۱.۱ گفته می‌شود حاصل‌ضرب $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ (که عوامل صفر آن حذف شده است) همگرای مطلق است اگر و فقط اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ همگرای مطلق باشد.

قضیه ۵.۱.۱ حاصل‌ضرب $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ که عوامل صفر آن حذف شده است، همگرای مطلق است، اگر و فقط اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرای مطلق باشد.

برهان : ابتدا جملات a_n ی را که صفر هستند کنار می‌گذاریم زیرا تأثیری در نتیجه‌ی اثبات نخواهند داشت. می‌دانیم که برای همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و نیز حاصل‌ضرب $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$، لازم است که $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. در نتیجه می‌توان n_0 یی یافت که به‌ازای $n\geq n_0$ داشته باشیم: $|a_n|<\frac{1}{2}$. می‌دانیم:

$$\frac{\log(1+a_n)}{a_n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(a_n)^k}{(k+1)!}$$

و با توجه به این‌که $|a_n|<\frac{1}{2}$ ، خواهیم داشت :

$$\left|\frac{\log(1+a_n)}{a_n}-1\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_n|^k}{(k+1)!}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}<\frac{\log(1+a_n)}{a_n}<\frac{3}{2}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left|\frac{\log(1+a_n)}{a_n}\right|<\frac{3}{2}\quad,\quad\left|\frac{a_n}{\log(1+a_n)}\right|<2$$

لذا با در نظر گرفتن نامساوی‌های بالا و آزمون مقایسه‌ی همگرایی، همگرایی هر یک از سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$، همگرایی دیگری را نتیجه خواهد داد. □

قبل از شروع قسمت دوم، سعی می‌کنیم مطالبی مربوط به توابع فوق هندسی که در مطالعه‌ی این رساله مفید است، بیاوریم:

لم ۶.۱.۱ اگر z عدد صحیح نامنفی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n-1)!n^z}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}$$

موجود است.

برهان : حاصل‌ضرب نامتناهی را طوری تشکیل می‌دهیم که عبارت

$$P_n = \frac{(n-1)!n^z}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}, \quad z \neq 0, 1$$

یک حاصل‌ضرب جزئی آن باشد. ثابت می‌کنیم که حاصل‌ضرب نامتناهی همگراست و بنابراین نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} P_n$ موجود است. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \frac{n!(n+1)^z}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \\
&= \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \cdot \frac{2^z}{1^z} \cdot \frac{3^z}{2^z} \cdot \cdots \cdot \frac{n^z}{(n-1)^z} \cdot \frac{(n+1)^z}{n^z} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{(z+k)} \cdot \frac{(k+1)^z}{k^z}\right] = \prod_{k=1}^{n} \left[(1+\frac{z}{k})^{-1}(1+\frac{1}{k})^z\right]
\end{aligned}$$

حال حاصل‌ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[(1+\frac{z}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^z\right]$$

را ملاحظه کنید. با فرض $n = \frac{1}{\beta}$، چون

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2 \left[(1+\frac{z}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^z - 1\right] &= \lim_{\beta\to 0} \frac{(1+z\beta)^{-1}(1+\beta)^z - 1}{\beta^2} \\
&= \lim_{\beta\to 0} \frac{(1+\beta)^z - 1 - z\beta}{\beta^2} \\
&= \lim_{\beta\to 0} \frac{z[(1+\beta)^{z-1} - 1]}{2\beta}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\beta \to 0} \frac{z(z-1)(1-\beta)^{z-2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} z(z-1) \neq 0$$

دقت داشته باشید که تساوی‌های سوم و چهارم در عبارت بالا بنابر قاعده‌ی هوپیتال برقرار است. لذا بنا به حالت حدی آزمون مقایسه، در مقایسه با $\sum \frac{1}{n^2}$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(1+\frac{1}{n})^z(1+\frac{z}{n})^{-1} - 1\right]$ همگراست لذا بنابه قضیه‌ی ۵.۱.۱، $\prod_{n=1}^{\infty} \left[(1+\frac{z}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^z\right]$ همگراست. بنابراین $\lim_{n\to\infty} P_n$ موجود است. □

۲.۱ تابع گاما و بتا

تذکر ۱.۲.۱ ثابت اویلر یا مسچرونی[1] γ:

ثابت اویلر با نماد γ نمایش داده شده و به‌صورت $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \log\ n)$ تعریف می‌شود که در آن طبق معمول $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. ثابت می‌کنیم γ موجود است و $0 \leq \gamma < 1$ قرار دارد. در حقیقت به‌طور تقریبی $\gamma = 0/5772$.

برهان : قرار می‌دهیم $A_n = H_n - \log\ n$. در این صورت A_n یک دنباله‌ی نزولی است. زیرا:

$$A_{n+1} - A_n = H_{n+1} - H_n - \log(n+1) + \log\ n$$

$$= \frac{1}{n+1} + \log\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \log(1 - \frac{1}{n+1}) \qquad (1)$$

با توجه به این‌که

$$\frac{-1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \qquad |x| < 1$$

---

[1] Euler or Mascheroni

در نتیجه داریم:

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

و چون $1 > \frac{1}{n+1} > 0$ لذا با فرض $x = \frac{1}{n+1}$، خواهیم داشت:

$$\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(1+n)^{k+1}}$$

لذا با این مفروضات در ادامه‌ی (۱) داریم:

$$A_{n+1} - A_n = \frac{1}{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(n+1)^{k+1}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(n+1)^{k+1}} < 0$$

پس A_n نزولی است. به‌علاوه چون $\frac{1}{t}$ برای $t > 0$ نزولی است، لذا به‌ازای $k-1 < t < k$ داریم:
$\frac{1}{k} < \frac{1}{t} < \frac{1}{k-1}$ و در نتیجه:

$$\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{k-1}, \quad k \geq 2 \qquad (2)$$

حال نامساوی (۲) را برای k از ۲ تا n جمع کرده و بنابراین

$$H_n - 1 < \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} < H_{n-1}$$

را به‌دست می‌آوریم. یا

$$H_n - 1 < \log\ n < H_{n-1}$$

و در نتیجه:

$$-1 < -H_n + \log\ n < -\frac{1}{n}$$

و یا

$$\frac{1}{n} < A_n < 1$$

پس دنباله‌ی A_n نزولی و کراندار است و لذا به عددی بزرگتر از صفر یا مساوی با صفر همگراست، یعنی γ موجود، نامنفی و کمتر از ۱ است. □

تعریف ۲.۲.۱ **(تابع گاما)** در تبعیت از وایرشتراس تابع گاما را به صورت

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \right] \qquad (1)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن γ همان ثابت اویلر است.

طرف راست (۱) برای تمام z های متناهی تحلیلی است و تنها صفرهای آن در $z = 0$ (صفر ساده) و در هر عدد صحیح منفی است.

لم ۳.۲.۱ اگر c یک عدد صحیح نامنفی باشد،

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{cn}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right) \right]$$

به‌ازای هر z متناهی به‌طور مطلق همگراست.

برهان : دقیقاً همانند ۶.۱.۱ اثبات می‌شود. □

حال با توجه به تذکر ۱.۲.۱ و لم ۳.۲.۱ مطمئن هستیم که تابع گاما با تعریف (۱) موجود است. کمی پیش‌تر ثابت می‌کنیم که

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \,, \quad Re(z) > 0 \,.$$

تذکر ۴.۲.۱ **حاصل‌ضرب اویلر برای $\Gamma(z)$.** از تعریف تابع $\Gamma(z)$، به‌دست می‌آوریم:

$$z\Gamma(z) = \frac{\exp(-\gamma z)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \right]}$$

بنابراین:

$$z\Gamma(z) = \exp(-\gamma z) \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} \exp\left(\frac{z}{n}\right)\right] \qquad (1)$$

اما:

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}(H_n - \log\ n)\\ &= \lim_{n\to\infty}(H_n - \log(n+1))\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[H_n - \sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}\right]\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\exp(-\gamma z) &= \lim_{n\to\infty}\exp\left[-zH_n + z\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\exp(-zH_n).\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\log(\frac{k+1}{k})^z\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\exp\left(-\frac{z}{k}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^z\\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\exp\left(-\frac{z}{k}\right)\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^z\right]\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان عبارت (۱) را به صورت

$$z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\exp\left(-\frac{z}{k}\right)\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^z\cdot\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right]$$

نوشت که از آن نتیجه می‌شود:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^z\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right]$$

که آن را حاصل‌ضرب اویلر تابع $\Gamma(z)$ می‌نامند. توجه کنید که برای $x > 0$، $\Gamma(x) > 0$.

حال روند اثبات لم ۶.۱.۱ نتیجه می‌دهد که

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \qquad (2)$$

و نیز

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{z\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z+n}{n} = 1 \;\Rightarrow\; \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (3)$$

و چون $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^z}{n^z} = 1$ به طور معادل، می‌توانیم (۲) را به‌صورت

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \qquad (4)$$

بنویسیم. □

قضیه ۵.۲.۱ اگر $Re(z) > 0$، آن‌گاه

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\, dt \qquad (1)$$

ما با ساختن چهار لم سعی داریم اثبات قضیه را به مراحل ساده‌تری تفکیک کنیم.

لم ۶.۲.۱ اگر $0 \le \alpha < 1$، آن‌گاه $1+\alpha \le \exp(\alpha) \le (1-\alpha)^{-1}$.

برهان : کافی است دو سری زیر را مقایسه کنیم:

$$\exp(\alpha) = 1+\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!} \quad , \quad (1-\alpha)^{-1} = 1+\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha^n$$

با توجه به این‌که

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n$$

حکم برقرار است. □

لم ۷.۲.۱ اگر $0 \leq \alpha < 1$ باشد، برای هر $n > 0$، خواهیم داشت: $(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$.

برهان : اثبات به استقرا روی n خواهد بود. برای $n = 1$ داریم:

$$(1-\alpha) = 1 - 1.\alpha$$

لذا استقرا برای $n = 1$ برقرار است. فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد(فرض استقرا)، یعنی:

$$(1-\alpha)^k \geq 1 - k\alpha$$

هر دو طرف فرض استقرا را در $(1-\alpha)$ ضرب می‌کنیم:

$$(1-\alpha)^{k+1} \geq 1 - (k+1)\alpha + k\alpha^2$$

بنابراین $(1-\alpha)^{k+1} \geq 1 - (k+1)\alpha$ و لذا لم از طریق استقرا ثابت می‌شود. □

لم ۸.۲.۱ اگر $0 \leq t < n$ و $n > 0$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n} \qquad (1)$$

برهان : اگر در لم ۶.۲.۱، $\alpha = t/n$ ، آنگاه :

$$1 + \frac{t}{n} \leq \exp\left(\frac{t}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1}$$

برای هر $n > 0$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-n}$$

یا

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} \qquad (2)$$

بنابراین

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} \geq 0 \qquad (3)$$

اما همچنین داریم:

$$0 \leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} = e^{-t}\left[1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right]$$

بنابراین با توجه به (۲) خواهیم داشت:

$$0 \leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} \leq e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{n}\right] \qquad (4)$$

و اما بنابر لم ۷.۲.۱ با t^2/n^2 داریم:

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{n} \geq 1-\frac{t^2}{n} \qquad (5)$$

اگر (۵) را در (۴) به‌کار بریم خواهیم داشت:

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} \leq \frac{e^{-t}t^2}{n} \qquad (6)$$

پس (۶) و (۳) نامساوی (۱) را نتیجه می‌دهند. □

لم ۹.۲.۱ اگر n متغیر صحیح و $Re(z) > 0$، آن‌گاه

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} t^{z-1}\,dt \qquad (1)$$