بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان پایان نامه:

رسته های بسته ضربی و بعضی مثالهای مهم در رسته فضاهای توپولوژیکی

استاد راهنما:

دکتر قاسم میر حسین خانی

دانشجو:

سمیه کشاورز

اسفندماه ۱۳۸۸

پیشکش دلسوزی پدرم

فداکاری مادرم

همسر مهربانم و خواهر عزیزم که دشواری های راه را برایم هموار نمودند.

تشکر و قدردانی

خوشحالم که این برگ از پایان نامه فرصتی فراهم نمود تا از افرادی که در انجام این پروژه بنده را یاری نموده‌اند تشکر نمایم.

از جناب آقای دکتر میرحسین خانی بواسطه‌ی راهنمایی‌های ارزنده قبول زحمت راهنمایی این رساله و حمایت‌های همه جانبه ایشان در کمال صبر و متانت در طول انجام پروژه کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از خانواده‌ی عزیزم که همواره در تمام مراحل تحصیل و زندگی‌ام از همراهی و تشویق‌هایشان برخوردار بوده ام بینهایت سپاسگزاری می نمایم.

از همسر مهربانم و پدر همسر گرامیم بواسطه‌ی حمایت‌های همه جانبه و از سپهر عزیزم برای همراهی در تحمل دشواری‌ها قدردانی می‌نمایم.

و در پایان برخود لازم می دانم از جناب آقای دکتر سبزواری و سرکار خانم دکتر قائدی بخاطر همراهی‌هایشان در طول تحصیل تشکر نمایم.

سمیه کشاورز

چکیده

هدف این پایان نامه ارائه پژوهشی در اثبات مسئله‌ی مهمی در نظریه‌ی رسته می باشد. رسته A که حدهای متناهی را دارد بسته ضربی (بسته‌ی دکارتی) می نامیم هر گاه فانکتور ضرب $-\times X : A \to A$ دارای الحاق راست باشد.

رسته‌ی فضاهای توپولوژیک (Top) بسته ی ضربی نمی باشد اما دارای زیر رسته‌های کاملی است که بسته‌ی ضربی اند. از جمله این زیر رسته‌ها می توان به فضاهای گسسته، فضاهای موضعاً فشرده – تولید شده که خارج قسمتی از فضاهای موضعاً فشرده است، فضاهای فشرده – تولید شده که خارج قسمتی از فضاهای فشرده و هاسدورف می باشد و ... اشاره کرد که این زیر رسته‌ها در حالت کلی تشکیل زیر رسته‌ی کاملی از رسته های فضاهای توپولوژیک (Top) می‌دهند که آن را Top نامیده و Top رسته‌ی نگاشت های پیوسته بین فضاهای – تولید شده است و در حالت خاصی برای (ضربی بودن) رسته‌ی Top بسته ی ضربی است.

همچنین در این پژوهش به بررسی جزئی‌تر ضرب و فضاهای تابعی در رسته‌ی Top پرداخته‌ایم.

کلمه های کلیدی:

رسته‌ی بسته دکارتی (ضربی)، توابع C- پیوسته، رسته‌ی نگاشت‌های پیوسته بین فضاهای - تولید شده (Top) و رسته‌ی نگاشت‌های C- پیوسته بین فضاهای توپولوژیک دلخواه (Map_C)، فضاهای - تولید شده.

فهرست

عنوان	صفحه

مقدمه

این پایان نامه برگرفته از [3] است. ضمن اینکه مفاهیم اولیه توپولوژی عمومی و نظریه رسته دانسته فرض شده است.

همچنین رسته‌ی بسته دکارتی (ضربی)، فضاهای $\mathcal{C}$- تولید شده، توابع C- پیوسته، رسته‌ی نگاشت‌های پیوسته بین فضاهای $\mathcal{C}$- تولید شده ($\mathbf{Top}_{\mathcal{C}}$) و رسته‌ی نگاشت‌های C- پیوسته بین فضاهای توپولوژیک دلخواه ($\mathrm{Map}_{\mathrm{C}}$) زمانی که C- گردایه‌ی دلخواهی از فضاهای توپولوژیک باشد مفاهیم کلیدی می باشند که در طول پایان نامه تعریف شده‌اند.

بعد از مقدماتی در فصل اول ابتدا فانکتورهای الحاق راست و الحاق چپ و برخی از خواص آن را بیان کرده و نشان دهیم که رسته‌ی توابع بین مجموعه‌های دلخواه (set) بسته‌ی دکارتی می‌باشد اما رسته‌ی نگاشت‌های پیوسته بین فضاهای توپولوژیک دلخواه (Top) بسته‌ی دکارتی نمی‌باشد.

در فصل سوم بدنبال یافتن زیر رسته‌هایی از Top می‌باشیم که خود بسته‌ی دکارتی باشند. بدین منظور ابتدا تعاریف توپولوژی $\mathcal{C}$ تولید شده و فضاهای $\mathcal{C}$ تولید شده و برخی روابط مهم آن را ارائه داده و سپس زیر رسته‌ی نگاشت‌های پیوسته بین فضاهای $\mathcal{C}$- تولید شده از Top را تعریف می‌کنیم و آن را $\mathbf{Top}_{\mathcal{C}}$ می‌نامیم.

در ادامه حالت خاص ضربی بودن برای $\mathfrak{C}$ تعریف کرده و نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{C}$ ضربی باشد آنگاه طبق روند زیر $\mathbf{Top}_{\mathcal{C}}$ بسته‌ی دکارتی است.

تابع $f: X \to Y$ را C- پیوسته گوییم اگر برای هر تابع پیوسته $P: C \to X$ نگاشت ترکیب $fop: C \to Y$ پیوسته باشد.

رسته‌ی نگاشت های C- پیوسته بین فضـاهای توپولوژیـک دلخـواه را Map_C مـی‌نـامیم و برای اثبات بسته ی دکارتی بودن $Top_{\mathcal{C}}$ از رسته‌ی Map_C کمک می‌گیریم.

نشان می‌دهیم $Top_{\mathcal{C}}$ و Map_C هم ارزند و سپس با کمک روابط و قضایا نشـان مـی‌دهـیم Map_C بسته‌ی دکارتی است و بنابراین $Top_{\mathcal{C}}$ بسته ی دکارتی می‌باشد.

و در ادامه چند حالت خاص برای گردایـه‌ی $\mathcal{C}$ بطـور مثـال زمـانی کـه فشـرده‌ی کـر یـا هاسدورف و فشرده یا فشرده‌ی موضعی باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این نتیجه ابتدا توسط Day بررسی شد. اما روش کار او بجای اسـتفاده از رسـته‌ی کمکـی Map_C استفاده از روابط و مسائل انعکاسی می‌باشد.

در این پایان نامه سعی شده است که روش بهتر و ساده تری در اثبات این مطلب ارائه شود زیرا روش بکار برده شده بر هم ارزی تکیه دارد تا انعکاس .

در ضمن اثبات های دیگری برای این مطلب در [2] و [4] یافت می شود کـه البتـه توجـه آن‌ها بیشتر معطوف به فضاهایی با توپولوژی فشرده – باز می‌باشد.

در فصل چهارم به بررسی جزئی‌تر ، مفهوم ضرب در رسـته‌ی $Top_{\mathcal{C}}$ مـی‌پـردازیم و نشـان می‌دهیم که ضرب متناهی در رسته‌ی $Top_{\mathcal{C}}$ با تغییر $\mathcal{C}$ ، تغییـر نمـی‌کنـد امـا در مـورد ضـرب نامتناهی (حتی شما را) این تغییر ناپذیری برقرار نمی‌باشد، [5] .

سپس مفهوم رابطه $<<_C$ و برخی خواص آن را بیان کرده و نشان می‌دهیم که اگر گردایه‌ی C شامل فضاهای فشرده ی موضعی باشد آن گاه رابطه $<<_C$ و توپولوژی فشـرده – بـاز معـادل است.

و در پایان فصل چهارم به بیان قضیه اساسی زیر در مورد فضاهای تابعی می‌پردازیم.

فرض کنید X و Y فضاهای $\mathcal{C}$- تولید شده باشند آن گاه

$$[X \underset{\mathcal{C}}{\Rightarrow} Y] = C\,[X \underset{I}{\Rightarrow} Y] = C\,[X \underset{N}{\Rightarrow} Y]$$

فصل اول

نظریه‌ی رسته

اکنون به معرفی مفهوم رسته پرداخته و برخی از خواص مهم آن را بررسی می‌کنیم.

اطلاعات بیشتر را می‌توان در منبع [1] یافت. بهمین دلیل در اثبات برخی از قضایا تنها به ذکر منبع اکتفا کرده‌ایم.

تعریف 1-1- یک رسته (که معمولاً با نماد $C,D,...$) نشان خواهیم داد عبارت است از

1) گردایه‌ی C_o یا $ob(C)$ که رده ای از شی‌ها نامیده می‌شود.

2) گردایه‌ی C_1 یا $Mor(C)$ که رده‌ای از ریخت‌ها یا فلش‌ها (پیکان‌ها) نامیده می‌شود که به هر ریخت f دوشی b,a مربوط می‌شوند که به ترتیب دامنه و هم دامنه F نامیده می‌شوند.

اگر a دامنه f و b هم دامنه f باشد f را ریختی از a به b می‌نامیم و با $f:a\to b$ نشان می‌دهیم. مجموعه تمام ریخت‌ها از a به b را با $hom(a,b)$ یا $C(a,b)$ نشان می‌دهیم.

3) قانون ترکیب: که به هر جفت ریخت $a\xrightarrow{f}b$ و $c\xrightarrow{g}b$ ریخت $a\xrightarrow{h}c$ را مربوط می‌سازد که $h=gof:a\to c$ به طوری که شرکت پذیری برای آنها برقرار باشد.

برای ریخت‌های دلخواه $a\xrightarrow{f}b$ و $b\xrightarrow{g}c$ و $c\xrightarrow{h}d$ داریم

$$ho(gof)=(hog)of$$

4) برای هر شی a از C_o ریختی از a به a موجود است که با $1_a:a\to a$ یا $id_a=a\to a$ نشان داده می‌شود که مانند همانی عمل می‌کند یعنی برای هر ریخت دلخواه $f:a\to b$ و $g:b\to a$ داریم $1_a og=g$ و $fo1_a=f$.

تعریف 1-2- در رسته‌ی C ریخت $g:b\to a$ را وارون ریخت $f:a\to b$ نامیم اگر $gof=1_a$ و $fog=1_b$ ریخت f را که دارای وارون است یکریختی می‌نامیم.

شی a را با b یکریخت می‌نامیم اگر ریخت $f:a\to b$ یکریختی باشد.

مثال1-3- رسته set : رسته ایست که اشیاء آن همه‌ی مجموعه‌ها و ریخت‌های آن را همه‌ی توابع بین مجموعه‌ها تشکیل می‌دهند. ترکیب ریخت‌ها، ترکیب توابع و ریخت همانی همان تابع همانی می‌باشد. یکریختی در این رسته معادل یک به یک و پوشا بودن است.

مثال 1-4- رسته‌ی Top رسته‌ی نگاشت‌های پیوسته بین فضاهای توپولوژیک دلخواه است. یکریختی در این رسته معادل هومیومورفیسم بودن است.

تعریف 1-5- دوگان رسته‌ی مفروض C رسته ی C^{op} می‌باشد که اشیاء آن همان اشیاء C و برای هر شی a,b در C^{op} ریخت $f:a\to b$ در C^{op} است اگر $f:a\to b$ ریختی در C باشد. برای هر دو ریخت g,f در C^{op} ترکیب o^{op} در C^{op} بصورت $fo^{op}g=gof$ و برای هر شی A از C^{op} همانی روی a در C^{op} همان همانی روی a در C تعریف می‌شود.

تعریف 1-6- فانکتور

برای دو رسته‌ی C , D فانکتور F از C به D که با $F:C\to D$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از یک جفت تابع $F_0: C_0\to D_0$ و $F_1:C_1\to D_1$ بطوری که F حافظ دامنه، هم دامنه، ترکیب و همانی می‌باشد.

حفظ کردن دامنه و هم دامنه بدین معنی است که اگر $f:a\to b$ ریختی در C_1 باشد آنگاه $F_1(f):F_0(a)\longrightarrow F_0(b)$ ریختی در D_1 می‌باشد، (از این پس $F_0(a)$ را با F(a) و $F_1(f)$ را با F(f) نشان می‌دهیم) .

حفظ کردن ترکیب بدین معنی است که برای ریخت‌های دلخواه f,g از C،

$$F(fog)=F(f)oF(g)$$

حفظ کردن همانی یعنی برای هر شی a از C_0 ، $F(1_a)=1_{F(a)}$.

تبصره 1-7- فانکتور $F:C\to D$ را فانکتور همورد از رسته‌ی C به D و فانکتور $F:C^{op}\to D$ را فانکتور ناهمورد از C به D می‌نامیم .

مثال 1-8- در این مثال به بررسی چند فانکتور قابل توجه در نظریه رسته می‌پردازیم:

الف) برای هر رسته‌ی C فانکتور همانی از C به C وجود دارد که با $1_C : C \to C$ نشان داده می‌شود که روی اشیاء و مورفیسم‌ها بصورت همانی عمل می‌کند $1_C(C) = C$ و $1_C(f) = f$

ب) فانکتور باوفا $V : Top \to set$ وجود دارد که هر فضای توپولوژی (X, τ) را به مجموعه زمینه اش X می‌برد و هر تابع پیوسته f را به خودش (به عنوان تابع) انتقال می‌دهد.

ج) برای هر رسته‌ی C و هر شی $c \in C$ فانکتور همورد $hom(c,-) : C \to set$ وجود دارد که روی شی a بصورت

$$hom(c,-)(a)=hom(c,a)$$

و روی ریخت $f : a \to b$ بصورت

$$hom(c,-)(f)=hom(c,f)$$

که

$$hom(c,f) = hom(c,a) \to hom(c,b)$$

و بصورت

$$hom(c,f)(g)=fog$$

تعریف می‌شود.

د) برای هر رسته‌ی C و هر شی $c \in C$ فانکتور ناهمورد $hom(-,c) : C \to set$

وجود دارد بطوری که فانکتور همورد $hom(-,c) : C^{op} \to set$ وجود دارد که روی شی a بصورت

$$hom(-,c)(a)=hom(a,c)$$

و روی ریخت $f : a \to b$ بصورت

$$hom(-,c)(f)=hom(f,c)$$

که

$$\hom(f,c)=\hom(a,c)\to\hom(b,c)$$

و بصورت

$$\hom(f,c)(g)=gof$$

تعریف می‌شود.

قضیه 1-9- اگر $F:C\to D$ یک فانکتور باشد آن گاه F یکریختی را حفظ می‌کند.

اثبات : طبق تعریف فانکتور واضح است.

تعریف 1-10- فرض کنید $F:A\to B$ یک فانکتور باشد:

الف) F را نشاننده نامیم هر گاه F روی مورفیسم‌ها یک به یک باشد. بعبارتی

$$F(f)=F(g)\Rightarrow f=g$$

ب) F را باوفا هر گاه F روی مورفیسم‌های موازی یک به یک باشد.

یعنی برای هر دو شی a' و a از رسته ی A، $F_1:\hom(a,a')\to\hom(F(a),F(a'))$ یک به یک باشد.

ج) F را کامل نامیم هر گاه برای هر b,a متعلق به A، تحدید F به hom(a,b) پوشا باشد،

بعبارتی اگر $f: F(a)\to F(b)$ ریختی در D باشد ریخت $g:a\to b$ در C موجود است که F(g)=f.

تعریف 1-11- فانکتور $F:A\to B$ را هم ارزی نامیم هر گاه F کامل و باوفا و همچنین یکریخت – چگال باشد بدین معنی که برای هر شی b از B شی a از A موجود است که b با F(a) یکریخت است.

تعریف 1-12- فانکتور $G: B \to A$ را وارون فانکتور $F: A \to B$ می‌نامیم، هرگاه $FoG = 1_B$ و $GoF = 1_A$. فانکتور F را یکریختی گوئیم اگر دارای وارون باشد. در این حالت رسته‌های A وB را یکریخت گوییم و با نماد $A \cong B$ نمایش می‌دهیم.

گزاره 1-13- اگر $F: A \to B$ یکریختی باشد آن گاه F هم ارزی است.

اثبات : رجوع شود به منبع [1].

تعریف 1-14- رسته A را زیر رسته‌ی C نامیم اگر

الف) $A_. \subseteq C_.$ ب) $A_1 \subseteq C_1$

ج) برای هر شی $a \in A$ عمل همانی روی a در رسته‌ی C همان عمل همانی روی a در رسته‌ی A می‌باشد .

د) عمل ترکیب ریخت‌ها در A همان عمل ترکیب در C می‌باشد.

تعریف 1-15- A را یک زیر رسته‌ی کامل از C گوییم اگر یک زیر رسته از C باشد هر ریخت از رسته‌ی C با دامنه و هم دامنه در A متعلق به رسته‌ی A باشد.

مثال 1-16- اگر C یک رسته‌ی دلخواه و $A_. \subseteq C_.$ آنگاه رسته‌ی A که شامل ریخت‌ها در C با دامنه و هم دامنه در A_o یک زیر رسته‌ی کامل از C است.

تعریف 1-17- اگر A یک زیر رسته‌ی C باشد، آنگاه فانکتور $E: A \to C$ موجود است که آن را فانکتور شمول می‌نامیم .

گزاره 1-18- اگر $E: A \to C$ فانکتور شمول باشد، آن گاه E کامل است اگر و فقط اگر A زیر رسته‌ی کامل C باشد.

اثبات : رجوع شود به [1].

تعریف 1-19- فرض کنید A یک زیر رسته از B و b شی ای از B باشد.

الف) یک A- انعکاس (یا یک ریخت A- انعکاس) برای b ریخت $r:b\to a$ همراه با خاصیت جهانی زیر می باشد:

برای هر ریخت $f:b\to a'$ در B ریخت منحصر به فرد $f':a\to a'$ در A موجود است بطوری که $f'or=f$ و گوییم a یک A- انعکاس برای b است.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[dl, "f'"] \\ a' & \end{tikzcd} \qquad f'or=f$$

ب) A را زیر رسته‌ی انعکاس B گوییم اگر هر شی b دارای A- انعکاس باشد.

تعریف 1-20- فرض کنید $G:A\to B$ و $F:A\to B$ دو فانکتور باشد. انتقال طبیعی τ از F به G که با $\tau:F\to G$ نمایش داده می‌شود تابعی است که به هر شی a از A ریخت $\tau_a:F(a)\to G(a)$ در B_1 را نسبت می‌دهد به طوری که به هر ریخت $f=a\to a'$ در A شرط زیر برقرار است.

$$G(f)o\tau_a=\tau_{a'}oF(f)$$

که به این شرط طبیعی گوییم. بعبارتی برای هر ریخت $f:a\to a'$ در A دیاگرام زیر جابجا شود

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ Fa' \arrow[r, "\tau_{a'}"] & Ga' \end{tikzcd}$$

مثال 1-21- رسته‌ی دلخواه A و ریخت $f:a\to b$ در A مفروض است.

بـــرای دو فـــانکتور $\hom(a,-):A\to set$ و $\hom(b,-):A\to set$ نشـــان مـــی‌دهـــیم

$\tau:\hom(b,-)\to\hom(a,-)$ که به صورت $\tau_c:\hom(b,c)\to\hom(a,c)$ ، $\tau_c(g)=gof$ تعریف

می‌شود یک انتقال طبیعی است.

اثبات : فرض کنید $h:c\to c'$ ریختی در A باشد.

$$\hom(a,h)o\tau_c(b\xrightarrow{g}c)=\hom(a,h)(a\xrightarrow{gof}c)=ho(gof)$$
$$\tau_{c'}o\hom(b,h)(b\xrightarrow{g}c)=\tau_{c'}o(hog)=(hog)of$$

بعبارتی دیاگرام زیر جابجا می‌شود.

$$\begin{tikzcd}
\hom(b,c) \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "\hom(b,h)"'] & \hom(a,c) \arrow[d, "\hom(a,h)"] \\
\hom(b,c') \arrow[r, "\tau_{c'}"] & \hom(a,c')
\end{tikzcd}$$

بنابراین $\hom(a,h)o\tau_c=\tau_{c'}o\hom(b,h)$

تعریف 1-22- فرض کنید $G:A\to B$ و F دو فانکتور باشد. انتقال طبیعی $F\xrightarrow{\tau}G$

را یکریختی طبیعی گوییم اگر برای هر شی a از A ، $F(a)\xrightarrow{\tau_a}G(a)$ یکریختی باشد.

در این حالت GوF را یکریخت طبیعی گویند و با $F\cong G$ نشان می‌دهند.

مثال 1-23- رسته‌ی A ، یکریختی $f:a\to b$ و دو فـانکتور $\hom(-,a):A^{op}\to set$ و

$\hom(-,b):A^{op}\to set$ مفروض است.

برای هر شی C از A انتقال طبیعی $\tau_c:\hom(c,a)\to\hom(c,b)$ یکریختی طبیعـی مـی

باشد. $\tau_c(g)=fog$

اثبات : بررسی یک به یک بودن

$$\tau_c(g_1)=\tau_c(g_2)\Rightarrow fog_1=fog_2\Rightarrow f^{-1}ofog_1=f^{-1}ofog_2\Rightarrow g_1=g_2$$

و τ_c پوشاست زیرا

اگر فرض کنیم ریخت $h:c\to b$ به $\hom(c,b)$ متعلق است طبق یکریختی بودن f داریم

$$f^{-1}oh \in hom(c,a)$$

آن گاه $\tau_c(f^{-1}oh) = fof^{-1}oh = h$

تعریف 1-24- الف) فرض کنید $g:a\to b$ و $f:a\to b$ جفتی از ریخت‌ها در رسته‌ی

a

A باشد. ریخت $h:b\to c$ هم معادل ساز f و g باشد اگر hof=hog و همچنین خاصیت جهانی زیر برقرار باشد:

اگر $h':b\to c'$ ریختی باشد که $h'of=h'og$ ریخت منحصر بفرد $\bar{h}:c\to c'$ وجود دارد که $\bar{h}oh=h'$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h'"'] & c \arrow[dl, "\bar{h}"] \\ & c' & \end{tikzcd} \qquad (h'f = h'g) \Rightarrow \bar{h}oh = h'$$

دوگان تعریف بالا مفهوم معادل ساز می باشد.

تعریف 1-25- الف) ریخت $f:a\to b$ را تکریختی گوییم اگر برای هر جفت ریخت $h:c\to a$ و $g:c\to a$ که fog=foh، آن گاه g=h . (قانون حذف از سمت چپ برقرار می باشد.)

ب) $f:a\to b$ را بروریختی گوییم اگر برای هر جفت ریخت $g:b\to c$ و $h:b\to c$ که gof=hof، آن گاه g=h. (قاعده حذف از سمت راست برقرار می‌باشد.)

قضیه 1-26- هر هم معادل ساز بروریختی می‌باشد.

اثبات : طبق تعریف بروریختی برقرار است.

حال به بررسی هم معادل ساز در رسته set و رسته‌ی Top می‌پردازیم.

مثال1-27- در رسته‌ی set هم معادل ساز $g:X\to Y$ و $f:X\to Y$ تابع $q:Y\to C$

با ضابطه $q(y)=[y]$ که در آن $C=Y/\sim=\{[y]\ \ y\in Y\}$ و ~ کوچکترین رابطه‌ی هم ارزی

است که شامل رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$y_1 \sim y_2 \quad \text{iff} \quad \exists x\in X:\ y_1=f(x)\ ,\ y_2=g(x)$$

زیرا $f(x)\sim g(x)$، پس برای هر $x\in X$ ،q(f(x))=q(g(x)) در نتیجه qf=qg بنـابراین

شرط اول هم معادل ساز برقرار است.

فرض کنیم تابع $h:Y\to Z$ وجـود داشــته باشـد بـه طـوری کـه hf=hg. بنـابراین تـابع $h':C\to Z$ با ضابطه $h'([y])=h(y)$ موجود و خوش تعریف است. زیرا اگـر $[y]=[y']$، آنگـاه $y\sim y'$. پس $x\in X$ای موجود است که $g(x)=y'$ و $f(x)=y$. از طرفی طبق فرضhf=hg،

پس برای هر $x\in X$،

$$hf(x)=hg(x)\Rightarrow h(f(x))=h(g(x))\Rightarrow h(y)=h(y')$$

هم چنین مثلث جابجایی می باشد، زیرا

$$h'q(y)=h'([y])=h(y)\Rightarrow h'q=h$$

تابع h' منحصر به فرد است، زیرا اگر $h'':C\to Z$ موجود باشد که $h''oq=h$، آنگاه $h''oq=h=h'oq$. چون q بروریختی است بنابراین قانون حـذف از سـمت راسـت برقـرار است، پس $h''=h'$. لذا h' منحصر بفرد است.

مثال 1-28- در رسته‌ی Top (نگاشت‌های پیوسته بین فضاهای توپولوژیک دلخواه) هم معادل ساز $f:X\to Y$ و $g:X\to Y$ همان $q:Y\to C$ مثال قبل می باشد همراه با توپولـوژی خارج قسمتی یا توپولوژی القایی توسط q $(G\in\tau_{Y/\sim}\Leftrightarrow q^{-1}G\in\tau_Y)$.

فرض کنید $h:Y\to Z$ پیوسته باشـد.در مثـال قبـل ثابـت کـردیم کـه تـابع $h':\frac{Y}{\sim}\to Z$ موجود است. کافی است ثابت کنیم h' پیوسته است . یعنی اگر $G\in\tau_Z$ آیا $h'^{-1}(G)\in\tau_{\frac{Y}{\sim}}$.

طبق جابجایی دیاگرام

$$q^{-1}(h'^{-1}(G)) = q^{-1}h'^{-1}(G) = h^{-1}(G) \in \tau_Y$$

بنابراین طبق تعریف توپولوژی خارج قسمتی داریم

$$h'^{-1}(G) \in \tau_{Y/\sim}$$

بنابراین در رسته‌ی Top هم معادل سازها نگاشت‌های خارج قسمتی می‌باشند.

تعریف 1-29- الف) یک منبع زوج $(a,\{f_i\}_{i\in I})$ می‌باشد که $\{f_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از ریخت‌ها با دامنه a است. دوگان این تعریف مفهوم چاهک است.

ب) منبع $S=\{f_i : a \to a_i \ \ i\in I\}$ را منبع – تکریخت گوییم اگر برای هر جفت منبع $f: b \to a$ و $g: b \to a$ که $Sof=Sog$ $(\forall i \in I \quad f_i of = f_i og)$ آن گاه داشته باشیم $f=g$.

تعریف 1-30- منبع $P=\{\pi_i : p \to p_i \ \ i\in I\}$ را ضرب خانواده‌ی $(p_i)_{i\in I}$ نامیم اگر برای هر منبع با هم دامنه‌ی $(p_i)_{i\in I}$ نظیر $S=\{f_i : q \to p_i\}_{i\in I}$ ریخت منحصر به فرد $f: q \to p$ موجود باشد که $S=pof$ ریخت منحصر به فرد f را با $<f_i>$ نشان می‌دهیم.

مثال 1-31- در رسته‌ی Top ضرب خانواده ای از فضاهای توپولوژیک همان توپولوژی حاصلضربی آنهاست.

تعریف 1-32- گوییم رسته‌ی C دارای ضرب دلخواه (متناهی) است اگر برای هر خانواده‌ی دلخواه (متناهی) $\{a_i\}_{i\in I}$ دارای ضرب باشد.

تبصره 1-33- دوگان تعریف 1-30 مفهوم هم ضرب در رسته را می‌رساند.

مثال 1-34- الف) در رسته‌ی set هم ضرب خانواده‌ای از مجموعه‌ها اجتماع از هم جدای آنهاست .

ب) در رسته‌ی Top هم ضرب خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک $\{A_i\}$ اجتماع از هم جدای آن‌ها همراه با توپولوژی القایی توسط $L_i: A_i \to \dot{\bigcup_i} A_i$ که $L_i(a)=(a,i)$ است.

(اجتماع از هم جدای $\{A_i\} i\in I$ را با $\dot{\bigcup\limits_i} A_i$ نشان می دهیم).

اثبات : منبع [1] را ببینید.

تعریف 1-35- الف) یک نمودار در رسته‌ی A فانکتور $D: I \to A$ با هم دامنه‌ی A می‌باشد. رسته‌ی I را طرح دیاگرام نامیم.

یک نمودار با طرح (متناهی، گسسته، تهی) را (متناهی، گسسته، تهی) می‌نامیم.

ب) فرض کنیم $D: I \to A$ یک نمودار باشد و برای $i \in I$ داشته باشیم $D(i) = d_i$. یک A- منبع $\{\theta_i : a \to d_i \ , i \in I.\}$ را برای D طبیعی گوییم اگر برای هر I – ریخت $f: i \to j$ داشته باشیم $D(f) o \theta_i = \theta_j$.

ج) منبع طبیعی $\{\theta_i : L \to d_i \ , i \in I.\}$ همراه با خاصیت جهانی زیر یک حد برای دیاگرام D است:

برای هر منبع طبیعی $\{\alpha_i : a \to d_i , \ i \in I.\}$ برای D ریخت منحصر بفرد $\alpha: a \to L$ موجود باشد که برای هر $i \in I.$ داشته باشیم $\theta_i o \alpha = \alpha_i$.

تبصره 1-36- دوگان تعریف بالا مفهوم هم حد در رسته می‌باشد.

قضیه 1-37- برای رسته‌ی دلخواه A شرایط زیر معادل است.

الف) رسته‌ی A دارای (هم) حد است.

ب) رسته‌ی A (هم) معادل ساز و (هم) ضرب دارد.

اثبات : منبع [1] را ببینید.

قضیه 1-38- نگاشت پیوسته و پوشای $p: X \to Y$ خارج قسمتی است اگر و تنها اگر برای هر فضای توپولوژی z و هر تابع $g: Y \to Z$ اگر $gop: X \to Y$ پیوسته باشد آن گاه $g: Y \to Z$ پیوسته است.