کد رهگیری ثبت پروپوزال: ۱۱۳۲۱۳۱

کد رهگیری ثبت پایان نامه:

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکدهٔ علوم پایه
گروه آموزشی ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی گرایش آنالیز

عنوان:

قاب‌ها در فضای کرین

استاد راهنما:
دکتر قربان خلیل زاده رنجبر

استاد مشاور:
دکتر حجت اله سامع

نگارش:
رقیه زهره‌وند حاجی آبادی

۲۰ بهمن ۱۳۹۳

کلیه امتیازهای این پایان‌نامه به دانشگاه بوعلی سینا تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب این پایان‌نامه در مجلات، کنفرانس‌ها و یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه بوعلی سینا و استاد راهنمای پایان‌نامه و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت. درج آدرس‌های ذیل در کلیه مقالات خارجی و داخلی مستخرج از تمام یا بخشی از مطالب این پایان‌نامه در مجلات، کنفرانس‌ها و یا سخنرانی‌ها الزامی می‌باشد.

مقالات خارجی

……………………..……, **Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.**

مقالات داخلی

..................، گروه ....، دانشکده ....، دانشگاه بوعلی سینا، همدان.

دانشگاه بوعلی سینا
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی
مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

صورت‌جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش آنالیز

با عنوان:

قاب‌ها در فضای کرین

جلسه دفاع از پایان‌نامه خانم **رقیه زهره‌وند حاجی‌آبادی** به ارزش ۶ واحد در روز **دوشنبه** مورخ ۱۳۹۳/۱۱/۲۰ ساعت ۱۰ در محل **آمفی تئاتر ۱** دانشکده **علوم پایه** در حضور هیأت داوران برگزار گردید که پس از بررسی‌های لازم، پایان‌نامه نامبرده با نمره به عدد **۱۸/۹۴** به حروف **هیجده و نود و چهار صدم** و با درجه **بسیار خوب** مورد ارزیابی قرار گرفت.

ردیف	نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر قربان خلیل زاده رنجبر	استاد راهنما	استادیار	
۲	دکتر حجت اله سامع	استاد مشاور	استادیار	
۳	دکتر محمد موسایی	داور داخلی	استادیار	
۴	دکتر اسماعیل فیضی	داور داخلی	استادیار	
۵	دکتر بهروز رفیعی	★ مسئول تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

★ بدون حق رأی

تقدیم به پدر و مادر دلسوزم و همسر مهربانم

آخرین تاریخ ویرایش: (Wednesday) ۲۹ بهمن ۱۳۹۳
زمان: ۱۶:۵۲
وب سایت [۱]

تشکر...

سپاس **خداوندگار حکیم** را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. باز فرصتی شد که ژرفتر بنگریمش. تلاشمان در راه علم چیزی نبود جزء ستایش او و حجتی دیگر بر وحدانیتش. بار خدایا تو را شکر می‌کنم که همواره امید و دلگرمی من بودی و در هر حال کمک و یار بودی، بار خدایا تلاشمان را اعتنای رحمتت قرار ده.

ابتدا وظیفه خود می‌دانم از آموزشها و زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای فرهیخته و فرزانه خود، جناب آقای **دکتر قربان خلیل‌زاده** [۲] صمیمانه تشکر و قدردانی کنم، که با صبر فراوان و صرف وقت زیاد، همواره آموزگار، راهنما و راه‌گشای بنده در طول تحصیل و تکمیل این رساله بوده است. از جناب آقای **دکترحجت‌اله سامع**[۳] که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و نکته‌های ارزنده خود را نسبت به بنده در دوران تحصیل رواداشتند، کمال امتنان را دارم. از اساتید محترم گروه ریاضی خصوصا داوران محترم این پایان نامه آقایان **دکتر محمد موسایی**[۴]، **دکتر اسماعیل فیضی**[۵] **دکتر اسماعیل سامعی**[۶] به خاطر بیان نکات ارزنده، راهنمایی و دلگرمی در طول تحصیل کمال تشکر را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، **پدر** و **مادر** عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و نیز تشکر می‌کنم از **همسر عزیزم** به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این ایام، بهترین پشتیبان من بود. در چنین موقعیتی نمی‌توان از عنصر بسیار مهمی یاد نکرد که قسمت بزرگی از تاریخچه علمی و پژوهشی پایان نامه و ارائه پاسخهای متعدد مرهون جستجو و تفحص در آن است: **اینترنت**

رقیه زهره‌وند حاجی آبادی
همدان - ایران

---

[۱] zafari@yahoo.com
[۲] khalilzadeh@yahooo.com
[۳] samee2000@yahoo.com
[۴] m.mosaii@yahoo.com
[۵] efeizi@basu.ac.ir
[۶] esameii@gmail.com

دانشگاه بوعلی سینا مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی		
عنوان: قاب‌ها در فضای کرین		
نام نویسنده: رقیه زهره‌وند حاجی آبادی		
نام استاد/اساتید راهنما: دکتر قربان خلیل زاده رنجبر		
نام استاد/اساتید مشاور: دکتر حجت اله سامع		
دانشکده: علوم پایه	گروه آموزشی: ریاضی	
رشته تحصیلی: ریاضی محض	گرایش تحصیلی: آنالیز	مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
تاریخ تصویب پروپوزال: ۱۳۹۲/۰۴/۲۶	تاریخ دفاع: ۱۳۹۳/۱۱/۲۰	تعداد صفحات: ۸۱

چکیده:

هدف ما در این پایان نامه بیان یک تعریف برای قاب ها در فضای کرین است، که یک اجتماع از پایه های J- متعامد از فضای کرین می‌باشد. یک J- قاب برای فضای کرین $(H,[.,.])$، یک قاب برای فضای هیلبرت است. اما با ضرب داخلی نامعین $[.,.]$ بدست می آید، به این معنی که بوسیله یک زوج از زیرفضاهای J معین یکنواخت ماکزیمال حساب می شود. همچنین، هر J - قاب شامل یک فرمول سازماندهی شده نامعین برای بردارها در H می باشد، که بوسیله پایه های J- متعامد ساز بازسازی می شود.

واژه‌های کلیدی: فضای کرین، قاب ها، زیرفضاهای J- معین یکنواخت

فهرست مطالب

چکیده

هدف مادر این پایان نامه بیان یک تعریف برای قاب ها در فضای کرین است ،که به اجتماعی از پایه های J-متعامد از فضای کرین است .یک J -قاب برای فضای کرین $(H, [,])$ ،یک قاب برای فضای هیلبرت است ،اما با ضرب داخلی نامعین $[,]$ بدست می‌آید، به این معنی که بوسیله یک زوج از زیر فضاهای J معین یکنواخت ماکزیمال حساب می‌شود.همچنین ،هر J-قاب شامل یک فرمول سازماندهی شده نامعین برای بردارها در H می‌باشد،که بوسیله پایه‌های J متعامد ساز بازسازی می‌شود.

واژگان کلیدی: فضای کرین،قاب‌ها،زیر فضای J -معین یکنواخت

پیشگفتار

ساحل افتاده گفت: "گرچه بسی زیستم — هیچ نه معلوم شد، آه که من کیستم."
موج ز خود رفته‌ای، تیز خرامید و گفت: — "هستم اگر می‌روم گر نروم نیستم."

اقبال لاهوری

شاید بتوان گفت مهمترین گام برای پیشبرد ریاضیات، وحدت بخشیدن و تعمیم دادن مفاهیم شناخته شده در آن است. معمولاً تعاریف بسیار پیچیده در ریاضیات از ایده‌های بسیار آسانِ نهفته در مفاهیم مقدماتی حاصل شده است. از آنجاکه ذکر نام بنیان‌گذاران، محققان و پژوهشگران برجسته به دلیل اینکه علوم اولیه را کسب کرده و با گذشت زمان آنها را در اختیار ما قرار داده‌اند، ضروری است، لذا در این مجموعه برای اشاره به جزئیات مسائل علمی و تاریخی پیرامون موضوع، منابع متعددی عنوان شده‌اند. با توجه به اینکه برای برخی مطالب بسیار معروف تعیین منبعی خاص به عنوان مرجع تقریبا غیرممکن است، با این وجود؛ اهتمام کافی به عمل آمده است تا موضوعات اشاره شده با ذکر منبع چاپی، الکترونیکی، منزلگاه اینترنتی و ماخذ مناسب ارائه گردند تا خواننده را برای دستیابی به اطلاعات تکمیلی به درستی راهنمایی نماید.

فصل اول

بیشینه تحقیق

در سال ۱۹۵۲ دافین[۱] و شیفر[۲] که در زمینه سری‌های فوریه کار می‌کردند، مفهوم قاب[۳] را برای فضاهای هیلبرت[۴] معرفی کردند و برخی از ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار دادند. در واقع قاب برای یک فضای هیلبرت توسیع پایه‌ی متعامد یکه برای فضای هیلبرت است ولی انعطاف پذیری قاب خیلی بیشتر از یک پایه متعامد یکه است و در بسیاری از مواقع می‌توان یک قاب با شرایط اضافی مورد نیاز پیدا کرد. قاب‌ها قبل از دهه ۸۰ نقش زیادی را در آنالیز ایفا نمی‌کردند تا اینکه در سال ۱۹۸۶ دابیچز[۵]، گراسمان[۶] و می‌یِر[۷] با انتشار مقاله‌ای، قاب‌ها را به عنوان یک ابزار مفید در نظریه‌ی موجک‌ها مطرح کردند که خود نظریه موجک‌ها از یافته‌های جدید ریاضیدانان است که هم در تحقیقات ریاضی و هم در کاربردها جایگاه بسیار مهمی دارد و در سالهای اخیر پیشرفت های بسیار خیره کننده‌ای داشته است. بعد از انتشار این مقاله، نظریه قاب‌ها در سطح وسیعی مورد مطالعه قرار گرفت. معرفی قاب‌های زیرفضاها به عنوان تعمیمی از قاب‌ها توسط کاسازا[۸] و کاتینیوک[۹] راه را برای تعمیم خواص قاب‌ها و معرفی مفاهیم جدید باز کردند. همچنین تعمیم جامع از قاب‌ها که در بر گیرنده‌ی قاب‌های زیرفضاها است توسط وینچنج سان[۱۰] معرفی شده است. در سال ۱۹۶۹مارک گریگوویچ کرین [۱۱]،ریاضی‌دان یهودی اهل شوروی ،یکی از چهره‌های اصلی از مدرسه اتحاد جماهیر شوروی که در زمینه آنالیز تابعی کارمی‌کرد،با قرار دادن ویژگی خاصی برروی فضای هیلبرت و بررسی خواص آن فضای جدیدی را معرفی نمودو آن را فضای کرین نامگذاری کرد.

تی آندو[۱۲] ریاضیدان مشهور ژاپنی در سال ۱۹۷۹کتاب عملگرهای خطی در فضای کرین را به چاپ رساند.واگنر[۱۳] و

---

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer
[۳] Frame
[۴] Hilbert space
[۵] Daubechies
[۶] Grassmann
[۷] Meyer
[۸] Casazza
[۹] Kutyniok
[۱۰] Vinchench sun
[۱۱] Mark Grigovich Krein
[۱۲] T.Ando
[۱۳] Wagner

گارسیا[۱۴] مفهوم قاب و ویژگی های آن رابرای فضای کرین معرفی کردند. هدف ما از این پایان‌نامه معرفی فضای کِرین و همچنین قاب‌ها در این فضاست. در فصل دوم تعاریف و مفاهیم اولیه را بیان خواهیم کرد و در فصل سوم قاب‌ها در فضای هیلبرت و زاویه بین زیرفضاها را معرفی می‌کنیم. در فصل چهارم فضای کرین و J-قاب‌ها[۱۵]، سازماندهی و هندسه‌ی J-قاب‌ها و در فصل پنجم عملگر مرکزی شده از J-قاب‌ها را معرفی می‌کنیم .

[۱۴] García

[۱۵] J-frames

فصل دوم

مفاهیم مقدماتی

۱.۲ پیش نیاز هایی از آنالیز

در این بخش، تعاریف و مفاهیم اولیه را جهت استفاده در فصل های بعدی بیان می کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم X یک *فضای برداری* روی $\mathbb{R}$ باشد. یک نیم‌نرم [۱] روی X، نگاشت p از X به $\mathbb{R}$ است، به طوری که برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم :

الف) $p(x) \geq 0$

ب) $p(\alpha x) = \mid \alpha \mid p(x)$

پ) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

یک نرم روی X، نیم‌نرم p روی X است به گونه ای که:

ت) اگر $p(x) = 0$ آن گاه $x = 0$.

تعریف ۲.۱.۲. زوج (X, p) را که در آن x یک فضای برداری و p یک نرم روی X است، یک فضای نرم دار گویند.

تعریف ۳.۱.۲. نگاشت T از فضای برداری X به فضای برداری Y را یک نگاشت خطی یا یک عملگر خطی [۲] می نامند در صورتی که برای هر $x_1, x_2 \in X$ و اسکالر α داشته باشیم:

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2).$$

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید X و Y فضاهای خطی نرمدار و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد. T را کران دار گویند در صورتی که عددی ثابت مانند M موجود باشد که برای هر $x \in X$، $\| T(x) \| \leq M \| x \|$.

[۱] seminorm

[۲] Linner operator

نرم T را با $\| T \|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\| T \| = \sup\{\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} : \| x \| \neq 0\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \| T(x) \| .$$

نماد گذاری: مجموعه نگاشت های خطی از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را با نماد $L(X, Y)$ نمایش می دهیم. $T \in L(X, Y)$ را نگاشت خطیوکران دار از X به Y گویند، چنانچه $X = Y$ باشد، در این صورت بجای $L(X, X)$، از $L(X)$ استفاده می کنیم.

نکته ۵.۱.۲. *فرض کنید X و Y فضاهای نرم دار باشد.*

الف) $L(X, Y)$ ، با جمع و ضرب نقطه وار، یک فضای برداری است.

ب) $B(X, Y)$ زیر فضایی از $L(X, Y)$ می باشد.

تعریف ۶.۱.۲. (X, d)را که در آن Xمجموعه ای غیر تهی و d یک تابع حقیقی $d : X \times X \to \mathbb{R}$ می باشد یک فضای متریک[۳]گویند هر گاه برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

(الف) $d(x, y) \geq 0$؛

(ب) $d(x, y) = 0 x = y$؛

(ج) $d(x, y) = d(y, x)$؛

(د) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$؛

تعریف ۷.۱.۲. دنباله $\{x_n\}$ را در یک فضای متریک (X, d) کوشی[۴]گوئیم هر گاه :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in N, \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

تعریف ۸.۱.۲. فضای متریک (X, d) را کامل[۵]گویند اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید $(X, \| . \|)$ یک فضای نرمدار باشد، فضای نرم دار X را فضای باناخ گویند، هرگاه متر القا شده از نرم آن، X را به فضای متریک *کامل* تبدیل کند.

[۳]Metric space
[۴]cushy
[۵]complate

تعریف ۱۰.۱.۲. هرگاه $T : X \to Y$ یک تابع باشد آنگاه زیر مجموعه $G = \{(x, Tx) \ : \ x \in X\}$ از $X \times Y$ ، گراف T نام دارد .اگر T خطی و X و Y فضاهای برداری باشند، G زیر فضای از $X \times Y$ است و اگر T کراندار باشد آنگاه G زیر فضای بسته $X \times Y$ است.

قضیه ۱۱.۱.۲. **(گراف بسته)**[۶] *: فرض کنید که X و Y دو فضای باناخ بوده و T یک عملگر خطی باشد. هرگاه G زیر فضای بسته ای از $X \times Y$ آنگاه T یک عملگر کراندار است.*

تعریف ۱۲.۱.۲. فضای برداری X را یک فضای ضرب داخلی[۷] گویند اگر تابع $\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ موجود باشد به‌طوریکه به ازای هر $x, y \in X$

الف) $\langle x, x\rangle \geq 0$

ب) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ج) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

د) به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $x, y, z \in X$ $\quad \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

ه) به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $x, y, z \in X$ $\quad \langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$

تعریف ۱۳.۱.۲. فضای *ضرب داخلی* H را فضای هیلبرت گویند ،اگر H با نرم القا شده از ضرب داخلی یک فضای باناخ باشد.

لم ۱۴.۱.۲. *نابرابری کوشی شوارتز*[۸]*: اگر $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ آنگاه به ازای هر $x, y \in H$ داریم*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

تعریف ۱۵.۱.۲. گردایه τ از زیر مجموعه های ، مجموعه X را یک *توپولوژی* بر X گوییم اگر در خواص زیر صدق کند ؛

الف) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$ ؛

ب) هرگاه به ازای $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ، $V_i \in \tau$ آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \ldots \cap V_n \in \tau$ ؛

[۶] closed Graph Theorem

[۷] Inner product

[۸] cushy-shoartz

پ) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه دلخواهی از اعضای τ باشد، آنگاه $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$ ؛

هرگاه τیک توپولوژی در X باشد آنگاه (X,τ) را فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه های باز در X می نامند.

تعریف ۱۶.۱.۲. فرض کنید که $X \neq \emptyset$ باشد در این صورت $\mathcal{B} = \{B_\alpha \;:\; \alpha \in I\}$ یک پایه است هرگاه $\tau = \{\bigcup\limits_{\alpha\in J} B_\alpha \;:\; J \subseteq I\} \cup \{\emptyset\}$ یک توپولوژی روی X باشد.

تعریف ۱۷.۱.۲. اگر (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. $\mathcal{L} = \{O_\alpha \;:\; \alpha \in I\}$ یک زیر پایه است هرگاه برای مجموعه اندیس متناهی $J \subseteq I$ ، $\mathcal{B} = \{\bigcap\limits_{\alpha\in J} O_\alpha\}$ یک پایه باشد. $(\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau)$

تعریف ۱۸.۱.۲. فرض کنید که $\mathcal{B}$ گردایه ای از زیر مجموعه های باز در فضای توپولوزیک (X,τ) باشد هرگاه برای هر x در یک مجموعه باز و دلخواه V ، $B \in \mathcal{B}$ای باشد به‌طوریکه $x \in B \subseteq V$. آنگاه $\mathcal{B}$ یک پایه برای τ است . به عبارت دیگر گردایه $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه های نا تهی X را یک *پایه* برای τ گوییم هرگاه

۱) $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B = X$.

۲) به زای هر جفت $A,B \in \mathcal{B}$ و $x \in A \cap B$ ، C ی متعلق به $\mathcal{B}$ باشد به‌طوریکه $x \in C \subseteq A \cap B$.

تعریف ۱۹.۱.۲. دنباله $\{x_i\}_{i\in I}$ از فضای باناخ X یک پایه شودر[۹] برای X نامیده می شود.اگر برای هر $f \in X$ اسکالرهای منحصر بفرد $\{c_i(f)\}_{i\in I}$ موجود باشند به طوری که:

$$f = \sum_{i\in I} c_i(f) x_i$$

که اغلب رابطه بالا را بسط f در پایه $\{x_i\}_{i\in I}$ می نامند.

تعریف ۲۰.۱.۲. خانواده $\{e_i\}_{i\in I}$را یک پایه متعامد یکه در فضای هیلبرت H گوئیم هرگاه :

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

و برای هر $i \in I$ ، $\|e_i\| = ۱$

[۹] Shouder bisis

تعریف ۲۱.۱.۲. دنباله ی $\{f_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت H، یک پایه ریس[۱۰] نامیده می شود اگر یک *پایه متعامد* یکه $\{e_i\}_{i\in I}$ برای H و یک نگاشت خطی وکراندار $T : H \to H$ موجود باشد به طوری که برای هر $i \in I$داشته باشیم:

$$Te_i = f_i$$

تعریف ۲۲.۱.۲. خانواده $\{\psi_j\}_{j\in I}$ در یک فضای هیلبرت H ،خانواده بسل نامیده می شود اگر وجود داشته باشد $B > 0$ به‌طوریکه به ازای هر $f \in H$ داشته باشیم : $\sum_{j\in I} |\langle f, \psi_j\rangle|^2 \le B\|f\|^2$.

تعریف ۲۳.۱.۲. فرض کنید X و Y و Z فضای نرم دار روی میدان باشند. نگاشت $\phi : X\times Y \to Z$ را دوخطی گوئیم هرگاه :

الف) برای هر $y \in Y$، نگاشت $x \mapsto \phi(x, y)$ روی X خطی باشد.

ب) به ازای هر $x \in X$، نگاشت $y \mapsto \phi(x, y)$ روی Y خطی باشد.

اگر $Z = \mathbb{C}$ ، ϕ را یک تابعک دوخطی یا فرم *دوخطی* می گوئیم.

نگاشت دو خطی $\phi : X \times Y \to Z$ را کران دار می گوئیم هرگاه $M > 0$ باشد که

$$\| \phi(x, y) \| \le M \| x \| \| y \| \qquad (x \in X, y \in Y).$$

نرم ϕ با دستور زیر تعریف می شود:

$$\| \phi \| = \sup\{\| \phi(x, y) \| : \| x \| \le 1, \| y \| \le 1\}$$

مجموعه نگاشت های دو خطی کران دار از $X \times Y$ به Z را با نماد $B(X, Y; Z)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۴.۱.۲. عملگر خطی $T \in B(X)$ را یک عملگر *پوچساز*می گوئیم اگر عدد صحیح مثبت nوجود داشته باشدبه‌طوریکه : $T^n = 0$

تعریف ۲۵.۱.۲. فرض کنیم A یک فضای خطی نرم دار باشد. مجموعه تشکیل شده از تابعک های خطی و پیوسته روی A را دوگان [۱۱] فضای A گویند و آن را با A^* نشان می دهیم.

دوگان را می توان برای حالت کلی تر که A یک فضای توپولوژیک برداری باشد نیز معرفی نمود. A^* با نرم

$$\| \Lambda \| = \sup\{| \Lambda x | : x \in A \ , \ \| x \| \le 1\}$$

[۱۰] Riss bisis

[۱۱] Dual

یک فضای باناخ است، که در آن $\Lambda \in A^*$. هم چنین دوگان A^* یا $(A^*)^*$ را با نماد A^{**} نشان می دهیم که یک فضای باناخ است.

تعریف ۲۶.۱.۲. اگر $T \in B(X, Y)$. $T^* \in B(Y^*, X^*)$ را عملگرالحاقی [۱۲] Tمی نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

.

نکته ۲۷.۱.۲. *فرض کنیم* $T \in B(X, Y)$ *و* $N(T)$ *و* $R(T)$ *به ترتیب عبارتند از* $N(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$ *و* $R(T) = \{Tx : x \in X\}$ *.در اینصورت داریم:*

(الف) $N(T^*) = R(T^{\perp})$

(ب) $N(T) = R(T^{*\perp})$

(ج) $R(T^*) = R(T)$

(د) $\|T^*\| = \|T\|$

(ت) $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

تعریف ۲۸.۱.۲. عملگر خطی$A : H \to H$ را متقارن [۱۳]می گوئیم اگر :

(الف) $\overline{D_A} = H$ که در آن D_A دامنه A تعریف می‌شود.

(ب) برای هر $f, g \in D_A$ داشته باشیم: $(Af, g) = (f, Ag)$

تعریف ۲۹.۱.۲. K یک فضای هاسدورف نامیم اگر

به ازای هر $x_1, x_2 \in K$ که $x_1 \neq x_2$. همسایگی های U_1, U_2 وجود داشته باشد به‌طوریکه$x_1 \in U_1$ و$x_2 \in U_2$ به‌طوریکه $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

[۱۲] Adjoint operator
[۱۳] symmetric