بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۸۰ /۹/ ۱۰

بسم ا... الرحمن الرحیم

سالیتونهای ایزوبرداری خودگراننده

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران

توسط

حسن نیاد

پایان نامه

ارائه شده به دانشکده تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی

از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

فیزیک

از

دانشگاه شیراز

شیراز، ایران

014548

ارزیابی وتصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه : عالی

امضاء اعضاء کمیته پایان نامه :

دکتر نعمت ا... ریاضی ، دانشیار (استاد راهنما) .....

دکتر محمد حسین دهقانی ، استادیار .....

دکتر محمد مهدی گلشن ، استادیار .....

شهریور ماه ۱۳۸۰

۳۸۴۱۳

قدردانی

ضمن سپاس از همه عزیزانی که مرا در تهیه این رساله یاری داده اند، در اینجا لازم می دانم که از استاد عزیزم دکتر ریاضی بخاطر زحمات بی دریغ و لطف و عنایتی که همواره نسبت به اینجانب روا داشته اند، تشکر و قدردانی نموده و این تلاش ناچیز را به این استاد علم و اخلاق تقدیم نمایم. امید که بتوانم رسالت شاگردی ایشان را آنچنانکه شایسته است بجا آورم.

از آن قبل که سر عالم بقا دارم — بدین سرای فنا سر فرو نمی آرم
هزار شکر کنم فیض و فضل یزدان را — که داد دانش و دین گر نداد دینارم
ز کس خجل نیستم بحمد الله — مگر ز ایزد و استاد صدر احرارم
به شکر ایزد و استاد در مقام سجود — نهاده سر بزمین همچو کلك و پرگارم

چکیده

سالیتونهای ایزوبرداری خودگراننده

توسط

حسن نیاد

ما در این رساله، با تعمیم مدل سالیتون ایزوبرداری، از فضای تخت (اقلیدسی) به فضای خمیده، تأثیر گرانش را بر طیف جوابهای این مدل مورد مطالعه قرار داده ایم. یک باور پذیرفته شده عمومی وجود دارد مبنی بر اینکه گرانش ضعیفتر از آن است که بتواند تغییرات کیفی قابل توجه بر طیف جوابهای میدان بگذارد. ما این باور را در مدل خویش آزموده و نشان داده ایم که گرانش در ناحیه جفت شدگیهای قوی، می تواند تاثیرات اساسی بر پاسخهای سالیتونی مدل ایزوبرداری بگذارد و بطور کامل هندسه فضا-زمان را تغییر دهد. ما تعدادی از جوابهای سالیتونی مدل ایزوبرداری خودگراننده را در محدوده جفت شدگی ضعیف بدست آورده ایم. درنهایت نیز با پیروی از فرمولبندی تلمن، جرم متناظر با پاسخهای سالیتونی مذکور را در فضای خمیده محاسبه نموده و بازاء مقادیر مختلف ثابت جفت شدگی، این جرمها را با هم مقایسه کرده ایم.

فهرست عناوین

عنوان	صفحه
قدردانی	الف
چکیده	ب
فهرست	ج
فصل اول: مقدمه	۱
فصل دوم: سالیتونها	۷
۲-۱ تعریف سالیتون	۷
۲-۲ بررسی چند مدل غیرخطی با جوابهای سالیتونی	۱۱
۲-۳ مدل ϕ^4	۱۵
۲-۴ مدل Sine-Gordon	۱۸
فصل سوم: میدانهای جفت شده و سالیتونها در ابعاد فضایی بالاتر	۲۲
۳-۱ میدانهای نرده ای جفت شده در (۱+۱) بعد	۲۲
۳-۲ اندیسهای توپولوژیک	۲۵
۳-۳ پاسخهای سالیتونی در ابعاد بالاتر	۲۶
۳-۴ مدل غیرخطی σ	۲۸
۳-۵ جوابهای خوددوگان در مدل غیرخطی σ	۳۳
فصل چهارم: مدل ایزوبرداری	۳۷
۴-۱ فرمولبندی هموردای الکترودینامیک	۳۷

عنوان	صفحه
۲-۴ فرمولبندی ایزوبردای الکترودینامیک	۴۰
۳-۴ چگالی لاگرانژی میدان ایزوبرداری	۴۳
۴-۴ نتایج حل معادلات دینامیکی سیستم	۴۸
فصل پنجم: سالیتون ایزوبرداری خودگراننده	**۵۰**
۱-۵ مقدمه	۵۰
۲-۵ معرفی انتگرال کنش و اجزاء آن	۵۳
۳-۵ معادلات دینامیکی مدل	۵۵
۴-۵ جوابهای مجانبی معادلات میدان	۵۸
۵-۵ تحلیل عددی معادلات میدان	۶۲
۶-۵ جرم سالیتون خودگراننده	۶۶
فصل ششم: نتایج حاصل از محاسبات	**۷۱**
پیوست ۱	**۸۶**
پیوست ۲	**۸۸**
پیوست ۳	**۹۱**
پیوست ۴	**۹۶**
پیوست ۵	**۱۰۱**
پیوست ۶	**۱۱۱**
پیوست ۷	**۱۱۷**
مراجع	**۱۲۱**

فصل اول: مقدمه

تئوری میدان متحد در فیزیک ذرات تلاشی برای توصیف تمام نیروهای بنیادی و رابطه بین ذرات بنیادی از طریق ارائه یک چارچوب نظری واحد است. نیروها می توانند به وسیله میدانهایی که واسط برهم کنش بین ذرات مجزا هستند توصیف شوند. مراد ما از مفهوم برهم کنش، جاذبه، دافعه و هرگونه تبادل انرژی بین ذرات یا میدانها است.

در اواسط قرن نوزدهم جیمز کلرک ماکسول اولین تئوری میدان و در واقع اولین تئوری اتحاد میدانها را با فرمول بندی الکتریسیته و مغناطیس در قالب یک نظریه واحد موسوم به الکترومغناطیس بنا نهاد. سپس در اوائل قرن بیستم آلبرت اینشتین با بسط تئوری نسبیت عام یک تئوری میدان را از گرانش ارائه کرد. پس از آن اینشتین و دیگران تلاش کردند تا یک تئوری میدان متحد را بنا کنند که در آن الکترومغناطیس و گرانش به عنوان جنبه های مختلفی از یک میدان بنیادی واحد نمایان شوند اما آنها ناکام ماندند و تا به امروز هرگونه تلاشی برای قرار دادن گرانش درون یک تئوری میدان متحد بدون نتیجه مانده است. [W.1] و [W.2][1]

در ابعاد اتمی نیروها توسط تئوری میدان کوانتومی توصیف می شوند. تئوری میدان کوانتومی در واقع اعمال ایده های کوانتوم مکانیکی به میدانهای بنیادی است. اوج شکوفایی این تئوری در حدود دهه چهل قرن بیستم بود هنگامی که تئوری کوانتوم الکترودینامیک (QED)[2] به عنوان یک تئوری میدان کوانتومی از برهم کنش الکترومغناطیس بنا نهاده شد. [W.3] در این تئوری برهم کنش ذرات باردار از طریق جذب و تابش فوتونها توجیه می شد و فوتونها به عنوان حاملهای نیرو نقش اساسی را در این تئوری ایفا می کردند. استحکام نظری این تئوری و موفقیتهای آن در حوزه

---

[1] در نوشتن قسمت عمده ای از مطالب این فصل از منابع اینترنتی که در انتهای فصل آدرس آنها ذکر شده است، استفاده نموده ایم.

[2] Quantum Electrodynamics

کاربردی باعث شد که به عنوان نمونه و الگوی کاملی برای ارائه تئوری های میدان از برهم کنش های بنیادی مورد توجه قرار گیرد.[W.1]

در خلال دهه شصت تا هفتاد فیزیکدانان ذرات بنیادی دریافتند که مواد عالم از دو گونه اصلی ذرات بنیادی یعنی لپتونها و کوارکها ساخته شده اند. کوارکها همیشه به صورت مقید و هم بسته درون ذرات بزرگتر قابل مشاهده یعنی هادرونها وجود دارند. این کوارکها که تاکنون به صورت آزاد و غیر مقید در هیچ آزمایشی مشاهده نشده اند بوسیله نیرویی قوی و با برد کوتاه به هم متصل شده اند که این نیرو در فواصل زیراتمی بسیار قوی تر از نیروی الکترومغناطیس بوده و مانع از گسستن هسته اتمها در اثر دافعه کولمبی پروتونها می شود. لپتونها یعنی الکترون ، میون ، تاو و نوترینوهای این ذرات $(e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ و همچنین پادذرات متناظر با این شش ذره، تحت تاثیر نیروی هسته ای قوی قرار نمی گیرند. در عوض هم لپتونها و هم کوارکها تحت تاثیر نیروی هسته ای دیگری موسوم به نیروی هسته ای ضعیف قرار می گیرند. این نیرو که عهده دار گونه خاصی از تابش رادیواکتیو موسوم به تابش بتا است از برهم کنش الکترومغناطیس ضعیفتر می باشد. در جدول ۱-۱ چهار نیروی بنیادی به همراه برخی ویژگیهای آنها از جمله قدرت نسبی آنها آورده شده است.[۲۴] و[W.4]

برهم کنش	قدرت نسبی	برد تاثیر	ذره واسط
هسته ای قوی	1	کوتاه	گلوئون
الکترومغناطیس	0.0073	بسیار بلند	فوتون
هسته ای ضعیف	10^{-9}	بسیار کوتاه	$W^{\pm}, Z$
گرانشی	10^{-38}	بسیار بلند	گراویتون

جدول ۱ـ۱ : نیروهای بنیادی

در همان زمان که تصویر کوارکها و لپتونها به عنوان مصالح اصلی سازنده عالم در حال شکل گیری بود، پیشرفتهای عمده ای در زمینه امکان دستیابی به یک تئوری میدان متحد حاصل شده بود. نظریه پردازان توجه خود را عطف به مفهوم ناوردایی پیمانه ای

موضعی کرده بودند. این نظریه اولین بار با کار هرمان ویل درسال ۱۹۱۸ بوجود آمد. ویل تلاش کرد تا گرانش و الکترومغناطیس را با هم متحد کند با این الزام که فیزیک نباید به پیمانه های موضعی از فضا زمان وابسته باشد. اگر چه رهیافت او برای این اتحاد به نتیجه نرسید و متروک ماند اما مفهوم ناوردایی پیمانه ای که در کار او وجود داشت، مورد توجه قرار گرفت و در قالب تئوریهای دیگری به حیات خود ادامه داد. [W.5] در این تئوریها تقارنهای موجود در معادلات میدان در هر نقطه از فضا و زمان به عنوان مبنا و اساس کار پذیرفته می شد. هم الکترومغناطیس و هم نسبیت عام چنین تقارنهایی را در برداشتند و به همین خاطر تلاشهای زیادی برای تلفیق این دو تئوری در قالب یک تئوری واحد با تقارن پیمانه ای موضعی صورت گرفت و علیرغم سعی زیاد این تلاشها بی نتیجه ماند. اما گام مهم در این زمینه کشف یک تئوری میدان کوانتمی با ناوردایی پیمانه ای از نیروهای هسته ای ضعیف بود که این تئوری برهم کنش الکترومغناطیسی را هم شامل می شد. شلدن گلاشو، عبدالسلام و استیون واینبرگ هر کدام جداگانه یک تئوری میدان متحد از این دو نیرو موسوم به الکتروضعیف پیشنهاد کردند که این تئوری مبتنی بود بر تبادل چهار ذره در برهم کنشهای الکتروضعیف یعنی فوتون برای برهم کنشهای الکترومغناطیس و دو ذره باردار W^+ و W^- و یک ذره بدون بار Z ، برای برهم کنشهای هسته ای ضعیف.[W.1]

در طی دهه هفتاد با ایده گرفتن از تئوری الکتروضعیف، یک تئوری میدان کوانتومی مشابه برای برهم کنش قوی به وجود آمد و به سرعت گسترش یافت. این تئوری که با اصرار بر تشابه با کوانتوم الکترودینامیک (QED) بنا شده بود تئوری کوانتوم کرودینامیک (QCD)[2] نام گرفت. در این تئوری حاملهای نیرو گلوئونها بودند که برهم کنش بین کوارکها از طریق تبادل این گلوئونها صورت می گرفت. بر مبنای این تئوری کوارکها و گلوئونها حائز خاصیتی موسوم به بار رنگی شدند. و بدین ترتیب در این تئوری مفاهیم کوارک، گلوئون و رنگ، در تناظر با ذره باردار، فوتون و بار الکتریکی ساخته شد.

[2] Quantum Chromodynamics

هدف فیزیکدانان اکنون دستیابی به یک تئوری بزرگ وحدت میدانها (GUT)[1] است که درآن نیروی قوی بتواند با نیروی الکتروضعیف متحد شود.[W.6] این تئوری پیش بینی می کند که در انرژیهای بسیار بالا (حدود 10^{14} گیگا الکترون ولت) و در فواصل بسیار کوتاه (حدود 10^{-31} متر)، برهم کنشهای الکترومغناطیس، قوی و ضعیف جنبه های مختلفی از یک نیروی بنیادی واحد هستند. در این شرایط تفاوت بنیادی بین کوارکها و لپتونها از بین می رود.[۷] و[۲۴]

اما فیزیکدانان رویای بزرگتری را هم در سر می پرورانند و آن دستیابی به یک تئوری بزرگتر موسوم به (TOE)[2] یا تئوری اتحاد همه میدانها می باشد. مانع اساسی در این زمینه گرانش است. این میدان دارای تفاوتهای بنیادی با سه میدان الکترومغناطیس، ضعیف و قوی است که در زیر اجمالاً به آن اشاره خواهد شد. میدان گرانش بوسیله تئوری نسبیت عام توصیف می شود. کوانتش این تئوری مسائل زیادی را به دنبال دارد. ما این مشکلات را با مقایسه ای بین میدان گرانش و میدان الکترومغناطیس ذکر می کنیم.[W.7]

مساله اول مشکل ریاضی است. معادلات میدان اینشتین بسیار پیچیده تر از معادلات ماکسول هستند و اساساً غیرخطی می باشند. با توجه به اینکه بیان ریاضی دوگانگی موج-ذره که از نتایج کوانتش میدان است احتیاج به وجود یک فضای برداری خطی دارد به نظر می رسد که غیرخطی بودن معادلات میدان ما را با مشکل روبرو کند.

مسأله دوم مشکلات مفهومی این تئوری است. مطابق تئوری نسبیت عام گرانش به عنوان یک خمیدگی فضا-زمان آشکار می شود یعنی علیرغم اینکه در الکترومغناطیس، میدان به عنوان هنرپیشه اصلی بر روی صحنه فضا-زمان ظاهر می شود، در گرانش فضا-زمان خود بازیگر صحنه نمایش خواهد بود و به این ترتیب ما با کوانتش فضا-زمان مواجه هستیم که به لحاظ مفهومی بسیار پیچیده و دور از ادراک ذهنی است.

---

[1] Grand Unified Theory
[2] Theory Of Everythings

مساله نهایی مشکلات عملی این تئوری است. معادلات ماکسول تابش الکترومغناطیس را پیشگوئی کرد و این تابش اولین بار توسط هرتز مشاهده شد. کوانتش میدان امکان مشاهده فوتونهای مجزا و متمایز را پیشگویی کرد و این نیز اولین بار در آزمایش اثر فوتوالکتریک و با تحلیل کلاسیکی که اینشتین از این آزمایش ارائه داد مشاهده شد. متناظرا معادلات اینشتین برای میدان گرانشی تابش گرانشی را ایجاب می کند. بنابراین می بایست اساسا امکان مشاهده گراویتونهای مجزا و متمایز به عنوان کوانتم های میدان وجود داشته باشد، اما علیرغم ادعای برخی مبنی بر مشاهده تابشهای گرانشی هنوز اجماع و اتفاق نظر کلی پذیرفته شده در این زمینه وجود ندارد و مشاهده گراویتونها به عنوان مساله مهم نسل آینده مطرح می شود، چرا که هم به لحاظ تئوریک وهم به لحاظ تکنولوژیک هنوز نسل کنونی امکان دستیابی به چنین مشاهداتی را ندارد. شاید علت اصلی و مشکل اساسی در این زمینه ضعف بسیار زیاد گرانش نسبت به نیروهای دیگر موجود در طبیعت باشد.[W.7] بر همین اساس غالب فیزیکدانان ذرات بنیادی ازاین ذره چشم پوشی می کنند و این ذره تنها در تئوریهای فیزیکدانان نظری امکان ایفای نقش پیدا می کند. به هر حال، ذکر این نکته لازم است که اخیرا روشهایی برای کوانتش میدانهای پیمانه ای غیرآبلی ابداع شده و گسترش یافته است که هم برای فهم نیروهای هسته ای قوی و ضعیف مناسب است و هم به نظر می رسد که برای کوانتش میدان گرانشی مناسب باشد.[W.2]

آخرین مطلبی که در این فصل به آن می پردازیم بحثی کوتاه راجع به اهمیت سالیتونهاست.[1] مبحث سالیتونها هم به عنوان یک موضوع مطرح در فیزیک غیرخطی و هم به دلیل جاذبه ها و پیچیدگیهای ریاضی مورد توجه فیزیکدانهای نظری و ذرات بنیادی قرار گرفته است. فیزیکدانها همواره به دنبال مدلهایی برای توصیف ذرات بنیادی بوده اند. در این میان مدلهایی بیشتر مورد توجه قرار گرفته اند که علاوه بر قابلیت توصیف خواص گوناگون ذره نظیر بار، جرم، تکانه، اسپین و... ، مشکلات متداولی نظیر تکینگی و بینهایت بودن خود-انرژی میدان را نیز مرتفع نماید. چنین قابلیتی در

[1] در فصول آتی به تفصیل مبحث سالیتونها را مورد بررسی قرار می دهیم.

تئوریهای خطی یافت نشده است. اما نظریه میدانهای غیرخطی پیش بینی می کند که بتوان به چنین مدلهایی دست یافت. بنابراین به نظر می رسد که مدل سالیتون به دلیل قابلیتهایی نظیر جایگزیدگی، و پایداری توپولوژیکی و دینامیکی کاندید مناسبی برای توصیف ذرات باشد. مدلهایی نظیر مدل اسکیرم، مدل سینوسی گوردون، مدل سیگما و تک قطبیهای هوفت-پولیاکف از لحاظ تاریخی به دلیل کسب توفیقاتی در این زمینه داری اهمیت خاصی هستند. همچنین مبحث سالیتونها این قابلیت را بخوبی در خود دارد، که می تواند برای بررسی سیستمهای چند ذره ای و بر همکنشِ بین ذرات مورد استفاده قرار گیرد.

گرچه پایه و خواستگاه سالیتونها را باید در تئوریهای میدان کلاسیک جستجو کرد، لیکن مبحث سالیتونها را بدلیل غنای ساختاری که دارند می توان به تئوریهای کوانتومی نیز تعمیم داد. امروزه می دانیم که مبحث شناخته شده کوانتش بار در مکانیک کوانتومی از درون سالیتونهای توپولوژیک بیرون می آید. اخیراً نیز پیشرفت و توسعه در زمینه یافتن پاسخهای سالیتونی در تئوریهای با ابعاد بالا، و کوانتش این پاسخها انجام گرفته است. با رویکردی که هم اینک به سالیتونها شده است، پیش بینی می شود که در آینده، رابطه بین سالیتونها و مکانیک کوانتومی بسیار عمیق تر گردد.[۷] و [۲۱]

آدرس منابع اینترنتی استفاده شده در این فصل:

[W.1] http://zebu.uoregon.edu/~js/glossary/unified_field_theory.html.

[W.2] http://www.people.cornell.edu/pages/jag8/symtalk.html.

[W.3] http://p.w.nielsen.homepage.dk/intro/qftintro/qftintro.html.

[W.4] http://www.chembio.uoguelph.ca/educmat/chm386/fundment
/fundamnt.htm.

[W.5] http://physics.about.com/gi/dynamic/offsite.htm.

[W.6] http://plabpc.csustan.edu/A3000/ASChapter11.htm.

[W.7] http://graham.main.nc.us/~bhammel/FCCR/qg.html.

فصل دوم: سالیتونها[1]

در نظریه های مختلف میدان، اغلب معادلات بدست آمده در حالت کلی غیرخطی هستند. تا نیم قرن پیش، یا اساسا این گونه معادلات بطور جدی مورد توجه قرار نمی گرفت و یا اینکه با تقریبهایی جملات غیرخطی معادلات حذف و یا به فرمی خطی تبدیل می شد. علت این امر بیشتر به خاطر پیچیدگی این معادلات و فقدان ابزار ریاضی لازم برای حل آنها بود. با ابداع روشهای دقیق حل معادلات خصوصا به طرق عددی و با بهره گیری از دقت و سرعت کامپیوترهای پیشرفته این مشکل تا حدود زیادی مرتفع شد، اما مشکلاتی نظیر پاشندگی و تکینگی و در یک کلمه عدم خوشرفتاری جوابها که بیشتر ناشی از ذات و جوهر معادلات غیرخطی است کماکان به عنوان مانعی اساسی در پیش روی فیزیکدانان قرار دارد. بنابراین به نظر می رسد که جوابهای جایگزیده، غیرپاشنده و غیرتکین از معادلات میدان غیرخطی در صورت وجود باید از اهمیت خاصی برخوردار بوده و به دلیل دارا بودن خواص مذکور برای فیزیکدانان و بیش از آن برای ریاضی-فیزیکدانان جالب توجه باشند.

۲-۱ تعریف سالیتون:

برای ورود به این مبحث، ابتدا ساده ترین معادله موج نسبیتی را در نظر می گیریم:

$$\Box\phi = \partial^{\mu}\partial_{\mu}\phi = (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\phi(x,t) = 0 \qquad (۲-۱)$$

در این معادله $\phi(x,t)$ میدان نرده ای در (۱+۱) بعد و c سرعت نور است. خواص این معادله کاملا شناخته شده است زیرا هم خطی و هم غیرپاشنده است. این جوابها دو ویژگی اصلی دارند که به بحث این فصل مربوط می شود:

اول اینکه هر تابع خوش رفتار به فرم $f(x\pm ct)$ یک جواب معادله (۲-۱) است. بنابراین می توانیم با انتخاب یک تابع جایگزیده به این فرم بسته موجی بسازیم که با سرعت

---

[1] ما در این فصل و فصل سوم عمدتا از مرجع [۲۱] استفاده کرده ایم. بنابراین هر جا که نام منبع ذکر نشده است به مفهوم استفاده از این مرجع خواهد بود.

یکنواخت c در جهت x+ یا x- منتشر می شود، بدون اینکه تغییری در شکل آن حاصل گردد. واضح است که امواج تخت $\cos(kx\pm\omega t)$ و $\sin(kx\pm\omega t)$ به همراه رابطه پاشندگی $\omega = kc$ یک مجموعه جواب کامل را برای این معادله تشکیل می دهند به طوری که می توان هر تابع جایگزیده به فرم $f(x-ct)$ را بر حسب آنها بسط داد:

$$f(x-ct) = \int dk[a_1(k)\cos(kx-\omega t) + a_2(k)\sin(kx-\omega t)] \qquad (۲-۲)$$

ویژگی دیگر این جوابها در واقع برقرار بودن اصل برهم نهی برای آنها است. یعنی اینکه چون معادله خطی است، اگر دو جواب جایگزیده به شکلهای $f_2(x+ct)$ و $f_1(x-ct)$ داشته باشیم، مجموع آنها یعنی $f_3(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$ نیز یک جواب معادله (۲-۲) خواهد بود. در حد $(t \to -\infty)$، $f_3(x,t)$ شامل دو بسته موج کاملا مجزا است که هر کدام بدون تغییر شکل به هم نزدیک می شوند و پس از برخورد هم بطور مجانبی $(t \to +\infty)$، دو بسته موج با همان شکل و همان سرعت قبلی از هم دور می شوند. این خاصیت برای بیش از دو بسته موج نیز برقرار است.

دو ویژگی فوق یعنی پایانی و عدم تغییر شکل موجها در اثر برخورد، چنانچه اشاره شد ناشی از خطی بودن و غیرپاشنده بودن معادله موج است. حال با اضافه کردن یک جمله ساده به معادله (۲-۱) خواص فوق را برای این معادله بررسی می کنیم:

$$(\Box + m^2c^2)\phi(x,t) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2c^2\right)\phi(x,t) = 0 \qquad (۲-۳)$$

این معادله که به معادله کلاین گوردون (حقیقی) مشهور است، معادله ای خطی است و امواج تخت $\cos(kx\pm\omega t)$ و $\sin(kx\pm\omega t)$ مجموعه کاملی برای جوابهای آن هستند با این الزام که رابطه پاشندگی آن عبارت است از: $\omega^2 = k^2c^2 + m^2c^4$. بنابراین طول موجهای مختلف با سرعتهای متفاوت $\frac{\omega(k)}{k}$ حرکت می کنند، از این رو معادله پاشنده است و بسته موج با گذشت زمان تغییر شکل می دهد. بنابراین ویژگی اول و به تبع آن ویژگی دوم معادله (۲-۱) برای معادله کلاین گوردون از بین می رود.

حال فرض کنیم یک جمله غیرخطی به معادله (۲-۱) اضافه کنیم:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t)+\phi^3(x,t)=0 \qquad (۲-۴)$$

محاسبات تقریبی عددی نشان می دهد که یک بسته موج دلخواه که با این معادله تحول می یابد، در فضا گسترده شده و در حین انتشار تغییر شکل می دهد و بنابراین خواص معادله (۱-۲) برای این معادله هم منتفی می شود.

با توجه به دو مثال فوق متوجه می شویم که خاصیت پاشندگی و خاصیت غیرخطی بودن هر کدام به طور جداگانه باعث از دست رفتن ویژگیهای مورد نظر معادلات خطی می شوند. با این وجود در بعضی از معادلات که هر دو خاصیت فوق وجود دارند ممکن است اثر یکدیگر را تعدیل کرده و بعضی از این پاسخها بتوانند ویژگی پایائی و عدم تغییر شکل موج در طول انتشار را پیدا کنند، که در این صورت به این پاسخها لفظ امواج انفرادی اطلاق می شود. در بین این امواج، تعداد بسیار اندکی این امکان را می یابند که در برابر برخورد مقاومت کنند و شکل خود را پس از برخورد هر چند به طور مجانبی بازیابی کنند. به این پاسخها سالیتون گفته می شود.

این نکته قابل ذکر است که معمولا یک چنین مرزبندی و تمایزی بین سالیتونها و امواج انفرادی رعایت نمی شود و اغلب برای امواج انفرادی هم، لفظ سالیتون به کار می رود.

تعاریف امواج انفرادی و سالیتونها به صورت کیفی و با توجه به خواص ذکر شده ارائه شد، اما برای بررسی دستگاههای فیزیکی احتیاج به یک تعریف دقیق و فرمولبندی کاربردی احساس می شود. این فرمولبندی بر مبنای چگالی انرژی قابل ارائه است:

ابتدا به میدان، چگالی انرژی $\varepsilon(x,t)$ را نسبت می دهیم بگونه ای که انتگرال فضایی آن یعنی $E[\phi]$، که یک "تابعی"[1] از میدان $\phi(x,t)$ است، انرژی کل سیستم را مشخص می کند. چون در سیستمهای فیزیکی انرژی دارای یک کران پایین است، بدون از دست دادن کلیت، کمینه انرژی $E[\phi]$ را برابر صفر در نظر می گیریم. در این پیکربندی صفت جایگزیده برای پاسخی به کار می رود که چگالی انرژی آن در هر زمان معین t در یک ناحیه مشخص فضا محدود باشد و در بینهایت با سرعت کافی به سمت صفر میل کند بطوری که انتگرال فضایی آن متناهی باشد.

---

[1] functional