بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکدهٔ علوم- بخش فیزیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد فیزیک

تحت عنوان:

بررسی تابش چرنکوف نسبیتی در حضور دی الکتریک جاذب و مغناطیده

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا مطلوب

مؤلف:

مریم محمدی خشوئی

شهریور ۸٦

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش فیزیک

دانشکده علوم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو: مریم محمدی خشوئی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا مطلوب

داور ۱: دکتر جعفر جهانپناه

داور ۲: دکتر محمد شجاعی

شجاعی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده: دکتر مجید تراز

تراز

تقدیم به:

پدرم، اسوه تلاش زندگی‌ام

مادرم، کانون مهربانی خانواده‌ام

۱۳۸۷ /۱۲/ ۲۱

تشکر و قدردانی:

بدین وسیله مراتب امتنان و سپاس بی‌پایان خود را از دکتر محمدرضا مطلوب که راهنماییها و پشتیبانیهای همه جانبه ایشان در طول دوران تحصیل و به خصوص زمان انجام پایان‌نامه همواره راهگشای من بوده و هست، اعلام می‌دارم. بی‌گمان شاگردی ایشان برای همیشه مایه فخر و مباهات من خواهد بود.

وظیفه خود می‌دانم از آقایان دکتر مجید تراز، رییس بخش فیزیک دانشگاه شهید باهنرکرمان، دکتر محمد شجاعی و دکتر جهان‌پناه که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و با حسن‌ظن خویش متن را مورد بازبینی قرار دادند، تشکر کنم.

از دوستان عزیزم که همیشه لحظات با آنها بودن برایم از زیباترین لحظات زندگی‌ام بوده نیز تشکر می‌کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه میدان الکترومغناطیسی در حضور دی‌الکتریک مغناطیده همگن کوانتیزه شده است. پس از آن تابش چرنکوف نسبیتی را در این محیط بررسی و نتایج حاصله را با نتایج آنچه پیش از این محاسبه شده (آهنگ اتلاف انرژی در محیط دی‌الکتریک که در آن الکترون با سرعت غیرنسبیتی حرکت می‌کند) مقایســه کرده‌ایم. به طور کلی هدف از انجام این پایان‌نامه بهبود بخشیدن به روابط گذشته با تصحیحات نسبیتی است. به بررسی این اثر در محیط با ضریب شکست منفی نیز پرداخته شده است.

فهرست مطالب

مقدمه

مقدمه

تابش چرنکوف[1] اولین بار در آزمایشات ماری و پیر کوری هنگامی که پرتوزایی مواد رادیواکتیویته را بررسی می‌کردند دیده شد. طبیعت پدیدهٔ جدید به صورت تشعشع، اما نامشخص بود. اولین تلاش برای درک ماهیت این پدیدهٔ جدید در سال ۱۹۲٦ میلادی توسط مالت[2] انجام شد. او مشاهده کرد مواد شفافی که در نزدیکی چشمه‌های بسیار قوی رادیو اکتیو قرار دارند، نور آبی ضعیفی از خود گسیل می‌کنند. این نور همیشه به صورت آبی فام – سفید و طیف آنها پیوسته است. به همین دلیل این خاصیت فلورسانس[3] نبود. زیرا در خاصیت فلورسانس در بین رنگ‌ها در طیف ماده گسستگی وجود دارد. او همچنین فهمید که این پدیده از نوع پرتوزایی است اما از طبیعت آن چیزی درنیافت.

این مسئله مسکوت ماند تا در سال ۱۹۳٤ پائول آلکسی ویچ چرنکوف آزمایشهایی را جهت ارائه پایان نامه دکترای خود تحت نظر پروفسور وایلوف شروع کرد که تا سال ۱۹۳۸ ادامه داشت. وی با آزمایشهایش نشان داد که منشاء این پدیده که بعدها به نام خود او مشهور شد، الکترونی پرانرژی است که در محیط دی‌الکتریک با سرعتی بیش از سرعت نور در محیط حرکت می‌کند. در همان سالها دو دانشمند دیگر به نامهای آی. ای. تام[4] و آی. ام. فرانک[5] نظریه کلاسیک تابش چرنکوف را ارائه دادند. به دلیل توافق بسیار خوبی که بین نتایج آنها و آزمایشهای چرنکوف وجود داشت، این سه دانشمند موفق به اخذ جایزه نوبل شدند. در سال ۱۹٤۰ فیزیکدان دیگری به نام وی– ال– گینزبرگ نظریهٔ کوانتومی تابش چرنکوف را ارائه داد

[1] Cherenkov Radiation
[2] mallet
[3] Fluorescence
[4] I.E.Tamm
[5] I.M.Frank

و روابطی را که تام و فرانک در نظریه شان آورده بودند، با تصحیحات کوانتومی بهبود بخشید[۱].

قبل از معرفی تابش چرنکوف باید این مطلب را ذکر کرد که این تابش هیچ ارتباطی با تابش ترمزی[۶] ندارند. در تابش ترمزی ذره با هسته یک اتم منفرد برهم‌کنش می‌کند ولی تابش چرنکوف حاصل از برهم کنش ذرهٔ باردار با کل محیط است، یعنی اگر درون دی الکتریک استوانه‌ای باریک و توخالی تعبیه شود، هنگامی که ذرهٔ باردار را به گونه‌ای هدایت کنیم که از درون این استوانه حرکت کند، به علت عدم برخورد ذره با هستهٔ اتم تابش ترمزی نخواهیم داشت ولی تابش چرنکوف همچنان مشاهده می‌شود.

در فصل اول این پایان‌نامه روشهای مختلف کوانتش را به اختصار توضیح داده و سپس پتانسیل برداری را به روش توابع مد کوانتیزه می‌کنیم. در ادامه کوانتش مرتبهٔ دوم را بررسی می‌کنیم.

در فصل دوم میدان الکترومغناطیسی را در حضور دی‌الکتریک مغناطیدهٔ همگن سه‌بعدی کوانتیزه می‌کنیم.

در فصل سوم پتانسیل برداری به دست آمده در فصل اول را به حالت سه‌بعدی تعمیم داده و سپس به بررسی تابش چرنکوف نسبیتی می‌پردازیم.

در فصل چهارم تابش چرنکوف نسبیتی را در حضور دی‌الکتریک مغناطیدهٔ همگن سه‌بعدی بررسی می‌کنیم.

در نهایت در فصل پنجم با استفاده از تابع گرین انرژی اتلافی را به دست می‌آوریم.

[۶] Bremsstrahlung

فصل ۱

کوانتش میدان الکترومغناطیسی

۱–۱ مقدمه

در گذار از الکترودینامیک کلاسیک به الکترودینامیک کوانتومی اولین گام کوانتیزه کردن میدان است. روشهای متفاوتی برای کوانتش میدانهای الکترومغناطیسی وجود دارد. از آن جمله می‌توان کوانتیزه کردن میدان بر حسب توابع مد، استفاده از معادلات اویلر- لاگرانژ و تابع گرین را نام برد. در بخش (۱–۲) به اختصار به معرفی آنها می‌پردازیم. سپس میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی را به روش توابع مد کوانتیزه می‌کنیم. در ادامه به کوانتش میدان الکترومغناطیسی در محیط همگن پاشندهٔ غیراتلافی می‌پردازیم. در بخش (۱–٤) کوانتش مرتبهٔ دوم را بررسی می‌کنیم.

۱–۲ روشهای مختلف کوانتش میدان الکترومغناطیسی

در کوانتش میدان بر حسب توابع مد با اطلاعاتی که از مسئله نوسانگر هارمونیک ساده داریم، پتانسیل برداری را به دست می‌آوریم. سپس یک مجموعه از مختصات تعمیم یافته را به یک دسته از عملگرهای کوانتومی تبدیل می‌کنیم[۲]. از معایب این روش آن است که به سادگی قابل تعمیم به مسائل با هندسه‌های مختلف نمی باشد.

روش دیگر کوانتش میدان الکترومغناطیسی، استفاده از معادلات اویلر- لاگرانژ و اصل کمترین کنش است. این در واقع یک روش استاندارد برای بررسی تمامی مسائل فیزیکی است. در این روش ابتدا یک چگالی لاگرانژی مؤثر برای سیستم در نظر می‌گیریم که تابعی از متغیرهای دینامیکی سیستم و سرعتهای متناظر آنهاست (در اینجا منظور از سیستم، محیط دی‌الکتریک و میدان الکترومغناطیسی می‌باشد). این چگالی لاگرانژی نهایتاً منجر به لاگرانژی کل سیستم می‌شود که تابعی حقیقی است. سپس با استفاده از اصل کمترین کنش و تعریف هامیلتونی سیستم که تابعی از متغیرهای دینامیکی و اندازه حرکتهای تعمیم یافته است،

می‌توانیم معادلات حاکم بر تحول سیستم یا همان معادلات ماکروسکوپی ماکسول را به دست آوریم. بعد از آن برای اطمینان از صحت محاسبات روابط جابه‌جایی کانونیک را محاسبه می‌کنیم [۳] .

روش تابع گرین یکی از روشهای کوانتش میدان الکترومغناطیسی است و در آن از معادلات ماکروسکوپی ماکسول استفاده می‌شود. مزیت استفاده از معادلات ماکروسکوپی این است که برای هر نوع محیط مادی قابل استفاده‌اند. در این روش بدون در نظر گرفتن مدل خاصی برای تابع دی‌الکتریک، آن را کمیت مختلطی در نظر می‌گیریم که از روابط کرامرز-کرونیک پیروی می‌کند. از مزایای این روش قابلیت تعمیم آن برای هندسه‌های مختلف از قبیل فضای همگن، نیم فضا، تیغه و کاواک است[٤،٥]. در روش تابع گرین بدون درنظر گرفتن مدل خاصی برای تابع دی‌الکتریک می‌توان یک چگالی لاگرانژی مؤثر برای سیستم در نظر گرفت و هماهنگی این روش را با روش استاندارد لاگرانژی نشان داد[٦].

۱-۳ کوانتش میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی به روش توابع مد

در این روش ابتدا از معادلات میکروسکوپی ماکسول در غیاب منبع خارجی شروع می‌کنیم و در پیمانهٔ کولن با فرض اینکه پتانسیل نرده‌ای صفر است، معادلهٔ موج حاکم بر پتانسیل برداری را به دست می‌آوریم. سپس جواب این معادلهٔ دیفرانسیل را برحسب توابع مد یک مکعب بسط می‌دهیم. آنگاه جواب به دست آمده را با استفاده از شرط کوانتش دیراک به حالت کوانتومی می‌بریم. در واقع میدان الکترومغناطیسی مجموعه‌ای از نوسانگرهای هماهنگ در نظر گرفته می‌شود. در کوانتش میدان، هر مد میدان الکترومغناطیسی هم ارز یک نوسانگر هماهنگ ساده در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در نظریهٔ

کوانتومی، میدان الکترومغناطیسی عملگری شبیه بسط فوریهٔ میدان الکترومغناطیسی کلاسیک است. با این تفاوت که دامنهٔ آن عملگرهای خلق و فنا خوانده می‌شوند.

بدیهی است از این پتانسیل برداری کوانتیزه شده می‌توانیم کلیهٔ میدانهای لازم را به دست آوریم. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به شکل زیر به پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای مرتبط می‌شوند[۷].

$$E=-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\phi \qquad (۱-۱)$$
$$B=\nabla\times A$$

در غیاب منبع خارجی، معادلات ماکسول به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (۲-۱)$$
$$\nabla\times B=\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}\frac{\partial E}{\partial t}$$

با توجه به این که در پیمانه کولن $\nabla\cdot A=\circ$ با استفاده از معادلات بالا هنگامی که $\varphi=0$ به معادلهٔ زیر برای پتانسیل برداری خواهیم رسید.

$$\nabla^{۲}A-\frac{۱}{c^{۲}}\frac{\partial^{۲}A}{\partial t^{۲}}=\cdot \qquad (۳-۱)$$

جواب این معادله را می‌توان بر اساس توابع مد یک مکعب نوشت.

$$A=\sum_{k}a_{k}(t)e^{ik\cdot r} \qquad (۴-۱)$$

چون برای هر بردار موج، دو بردار پلاریزاسیون عمود بر آن تعریف می‌شود، می‌توانیم جواب بالا را به صورت کلی‌تر زیر بازنویسی کنیم:

$$A(r,t)=\sum_{\sigma=۱,۲}\sum_{k}U_{k\sigma}a_{k\sigma}(t)e^{ik\cdot r} \qquad (۵-۱)$$

که درآن $U_{k\sigma}$ بردار یکه در جهت بردار پلاریزاسیون می‌باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که با اعمال شرایط مرزی مناسب [۷] بر روی این جواب، به عبارت زیر می‌رسیم.

$$A(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k>0}\sum_{\sigma=1,2}\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_o L^3\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}}\times U_{k\sigma}\left\{a_{k\sigma}(t)e^{ik\cdot\boldsymbol{r}}+a^*_{k\sigma}(t)e^{-ik\cdot\boldsymbol{r}}\right\} \tag{۱-۶}$$

که در آن L اندازهٔ ضلع مکعب و عبارت داخل پرانتز ضریب بهنجارش است. از آنجا که محیط خلاء می‌باشد، رابطهٔ k و ω به صورت زیر خواهد بود.

$$\omega=kc \tag{۱-۷}$$

در نوشتن پتانسیل برداری آن را به صورت ترکیبی از یک عبارت و مزدوج مختلط آن نوشته‌ایم تا حقیقی بودن آن تضمین شود. برای به دست آوردن وابستگی زمانی $a_{k\sigma}$ کافی است عبارت (۱-٤) را در معادلهٔ موج (۱-۳) جایگذاری کنیم، بدین ترتیب وابستگی زمانی $a_{k\sigma}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$a_{k\sigma}(t)=a_{k\sigma}(0)e^{-i\omega_k t} \tag{۱-۸}$$

در الکترومغناطیس کلاسیک، انرژی الکترومغناطیسی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$H_{rad}=\frac{\varepsilon_o}{2}\int_{L^3}d^3\boldsymbol{r}\left(|E|^2+c^2|B|^2\right) \tag{۱-۹}$$

که با توجه به رابطه (۱-۱) می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{H_{rad}}=\frac{\varepsilon_o c^2}{2}\int_{L^3}d^3\boldsymbol{r}\left\{\frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|^2+|\nabla\times A|^2\right\} \tag{۱-۱۰}$$

با جایگذاری پتانسیل برداری و استفاده از رابطه (۱-٦) خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{H_{rad}}=\frac{1}{2}\sum_{k\sigma}\hbar\omega_k\left(\boldsymbol{a_{k\sigma}a^*_{k\sigma}}+\boldsymbol{a^*_{k\sigma}a_{k\sigma}}\right) \tag{۱-۱۱}$$

برای گذار از الکترودینامیک کلاسیک به الکترودینامیک کوانتومی از شرط کوانتش دیراک استفاده می‌کنیم. یعنی ابتدا مختصات تعمیم یافته به عملگرهای کوانتومی تبدیل می‌شوند و این عملگرها روی فضای حالت سیستم اثر می‌کند. از این پس به جای a و a^* از عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^+$ اسـتفاده می‌کنیم که علامت ^ نشانگر عملگر بودن کمیت مورد نظر می‌باشد. رابطهٔ جابه‌جایی بین این دو عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left[\hat{a}_{k\sigma},\hat{a}^{+}_{k'\sigma'}\right]=\delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'} \tag{۱۲-۱}$$

رابطهٔ انرژی به شکل زیر در می‌آید.

$$\hat{H}_{rad}=\sum_{k\sigma}\hbar\omega\left(\hat{a}^{+}_{k\sigma}\hat{a}_{k\sigma}+\frac{۱}{۲}\right) \tag{۱۳-۱}$$

چون رابطهٔ فوق شبیه به انرژی مجموعه‌ای از نوسانگرهای هارمونیک ساده می‌باشد، با مقایسه با مسئلهٔ نوسانگر هارمونیک عملگر $\hat{a}$ را عملگر کاهنده یا نابودگر وعملگر $\hat{a}^+$ را عملگر افزاینده یا خلق‌کننده می‌نامیم. بنابراین عملگر پتانسیل برداری با توجه به وابستـگی زمانی آن به شکل زیر در می آید.

$$\hat{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k>o}\sum_{\sigma=۱,۲}\left(\frac{\hbar}{۲\varepsilon_o L^۳\omega_k}\right)^{\frac{۱}{۲}}\times U_{k\sigma}\left\{\hat{a}_{k\sigma}e^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}+\hat{a}^{+}_{k\sigma}(t)e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right\} \tag{۱٤-۱}$$

۱-٤ کوانتش میدان الکترومغناطیسی در محیط همگن پاشندهٔ غیراتلافی

در بخش قبل میدان را در خلاء کوانتیزه کردیم. چون برخی از پدیده‌ها از جمله تابش چرنکوف در خلاء امکان پذیر نیست. لذا در این بخش به بررسی کوانتش میدان در محیط

مادی می‌پردازیم. هر محیط مادی توسط تابع دی‌الکتریک $\varepsilon(\omega)$ توصیف می‌شود. ضریب شکست توسط رابطهٔ $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ و رابطهٔ بین ω,k به صورت زیر تعریف می‌شود[۹].

$$\omega=\frac{c}{n(\omega)}k=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}k \qquad (۱۵-۱)$$

یادآوری می‌کنیم که طبق اصل علیت، خاصیت اتلافی محیط همیشه همراه با خاصیت پاشندگی آن است. پس نمی‌توان کاملاً خاصیت اتلافی محیط را در محاسبات حذف کرد، اما می‌توانیم حالتی را بررسی کنیم که اتلاف بسیار ناچیز باشد. هنگامی که میدان الکترومغناطیسی در محیط دی الکتریک منتشر می‌شود، برای به دست آوردن انرژی الکترومغناطیسی وابسته به آن علاوه بر انرژی به دست آمده در بخش قبل باید انرژی ذرات بارداری که در واکنش با موج الکترومغناطیسی در محیط حرکت می‌کند را نیز به حساب آوریم. لاندائو ولیف- شیتز نشان داده‌اند در یک دی الکتریک، انرژی به صورت زیر تصحیح می‌شود[۱۰].

$$H_{rad}=\frac{\varepsilon_{\circ}}{۲}\int d^{۳}\boldsymbol{r}\left\{|E|^{۲}\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\varepsilon(\omega)+c^{۲}|B|^{۲}\right\} \qquad (۱۶-۱)$$

معادلهٔ (۱-۲) در فضای k,ω به شکل زیر در می‌آید.

$$ik\times E=i\omega B \qquad (۱۷-۱)$$

خواهیم داشت:

$$|B|^{۲}=\frac{|k\times E|^{۲}}{\omega^{۲}}=\frac{k^{۲}}{\omega^{۲}}|E|^{۲}=\frac{\varepsilon(\omega)}{c^{۲}}|E|^{۲} \qquad (۱۸-۱)$$

که با جایگذاری معادلهٔ (۱-۱۸) در رابطهٔ انرژی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}H_{rad}&=\frac{\varepsilon_{\circ}}{۲}\int d^{۳}\boldsymbol{r}\,|E|^{۲}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\varepsilon(\omega)+\varepsilon(\omega)\right]\\&=\frac{\varepsilon_{\circ}}{۲}\int d^{۳}\boldsymbol{r}\,|E|^{۲}\frac{۱}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^{2}\varepsilon(\omega)\right)\end{aligned} \qquad (۱۹-۱)$$

با مقایسهٔ انرژی به دست آمده در این بخش و بخش قبل که در واقع انرژی الکترومغناطیسی در خلاء بود، به این نتیجه می‌رسیم که ضریب تصحیح اضافه شده جمله زیر می‌باشد.

$$\frac{۱}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^{۲}\varepsilon(\omega) \qquad (۱-۲۰)$$

انرژی هر نوسانگر با این ضریب تصحیح می‌شود. هدف ما به دست آوردن کل انرژی است نه فقط انرژی میدان الکترومغناطیسی. برای نیل به این هدف و بر اساس ضریب تصحیحات اضافه شده باید در رابطه (۱-۱٤) ضریب نرمالیزه کننده به صورت زیر تغییر کند.

$$\left\{\frac{\hbar}{۲L^{۳}\varepsilon_o\left(\frac{۱}{۲\omega}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\left(\omega^{۲}\varepsilon\right)}\right\}_{\omega_k}^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۱-۲۱)$$

و پتانسیل برداری به شکل زیر در می‌آید.

$$\hat{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k>o}\sum_{\sigma=۱,۲}\left\{\frac{\hbar}{۲L^{۳}\varepsilon_o\left(\frac{۱}{۲\omega}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\left(\omega^{۲}\varepsilon\right)}\right\}_{\omega_k}^{\frac{۱}{۲}} U_{k\sigma}\left\{\hat{a}_{k\sigma}e^{-i(\omega t-k\cdot r)}+\hat{a}^{+}_{k\sigma}(t)e^{i(\omega t-k\cdot r)}\right\} \qquad (۱-۲۲)$$

۱-۵ کوانتش مرتبهٔ دوم

می‌بینیم که می‌توان میدان تابشی را با خواص ذره‌ای توصیف کرد. این مطلب ایده‌ای خواهد بود برای آنکه میدان تابشی الکترون را نیز کوانتیزه کنیم که به آن کوانتش مرتبهٔ دوم می‌گویند. بدین منظور از معادلهٔ دیراک که نسبیتی است، شروع می‌کنیم. سپس با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی، ویژه مقادیر آن را می‌یابیم و براساس ویژه مقادیر محاسبه شده

میدان تابشی الکترون را بسط می‌دهیم. ضرایب بسط در واقع عملگرهایی خواهند بود که مربوط به خلق یا نابودی الکترون می‌باشند.

انژی ذره بدین گونه تعریف می‌شود[۹]:

$$\hat{H}_p = \int d^3 r \psi^+ \left(\frac{hc}{i} \alpha \cdot \nabla + \beta mc^2 \right) \psi \qquad (۲۳-۱)$$

که در آن ψ، میدان تابشی ذره، عملگری است که به صورت اسپینور چهارمؤلفه‌ای تعریف می‌شود.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad , \quad \psi^+ = \left[\psi_1^+ , \psi_2^+ , \psi_3^+ , \psi_4^+ \right] \qquad (۲٤-۱)$$

و روابط جابه‌جایی آنها بدین شکل است:

$$\begin{aligned} &\left[\psi_j(x,t), \psi_k(x',t) \right]_+ = \left[\psi_j^+(x,t), \psi_k^+(x',t) \right]_+ = 0 \\ &\left[\psi_j(x,t), \psi_k^+(x',t) \right]_+ = \delta_{jk} \delta(x - x') \end{aligned} \qquad (۲٥-۱)$$

α و β ماتریسهای دیراک هستند و به شکل زیر تعریف می‌شوند[۹]:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad (۲٦-۱)$$

و در آن $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و I یک تانسور ۴×۴ می‌باشد. آن را به صورت یک ماتریس ۲×۲ که هر درایه آن یک ماتریس ۲×۲ است، نمایش داده‌ایم. ماتریسهای پائولی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (۲۷-۱)$$

و همچنین دو ماتریس دیگر به صورت زیر هستند: