بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی (جبر و توپولوژی)

مدول‌ها با خاصیت مجموع جمعوند مستقیم

توسط:

صدیقه شیخ محسنی

استاد راهنما:

دکتر حبیب شریف

دی ماه ۱۳۸۷

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب صدیقه شیخ محسنی (۸۵۰۸۹۰) دانشجوی رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر و توپولوژی دانشکده‌ی علوم اظهار می‌کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده‌ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته‌ام. همچنین اظهار می‌کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه‌ام تکراری نیست و تعهد می‌نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام ونام خانوادگی: صدیقه شیخ محسنی

تاریخ و امضا: ۸۸/۱/۳۰

به نام خدا

مدول‌ها با خاصیت مجموع جمعوند مستقیم

به وسیله‌ی:

صدیقه شیخ محسنی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر حبیب شریف، استاد بخش ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر مجید ارشاد، دانشیار بخش ریاضی ....

دکتر شهره نمازی، استادیار بخش ریاضی ....

دی ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر، مادر

و برادرانم

سپاسگزاری

حمد و سپاس بی حد به پیشگاه خداوند بزرگ و درود بی پایان به روان تابناک خاتم انبیا حضرت محمد صلی الله علیه وآله و خاندان پاکش به ویژه حضرت بقیه الله الاعظم امام زمان ارواحنا له الفدا.

بر خود لازم می‌دانم که نهایت تشکر و سپاس را از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حبیب شریف که به عنوان استاد راهنمای این جانب در مراحل مختلف تحقیق همراه من بودند ابراز نمایم.

از جناب آقای دکتر مجید ارشاد و خانم دکتر شهره نمازی که به عنوان استاد مشاور مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی فراوان می‌نمایم

چکیده

مدول‌ها با خاصیت مجموع جمعوند مستقیم

به وسیله‌ی:

صدیقه شیخ محسنی

هدف از انجام این تحقیق بررسی مشخصات مدول‌هایی است که دارای خاصیت مجموع جمعوند مستقیم (به طور کوتاه DSSP) هستند. یعنی مدول‌هایی که مجموع (زیرمدول تولید شده توسط اجتماع) هر دو جمعوند مستقیم آن‌ها نیز یک جمعوند مستقیم است. در ابتدا تعاریف و نتایج مورد نیاز در مورد مدول‌هایی که دارای خاصیت اشتراک جمعوند مستقیم هستند را بیان می‌کنیم. یعنی مدول‌هایی که اشتراک هر دو جمعوند مستقیم آن‌ها نیز یک جمعوند مستقیم است.

سپس نتایج کلی راجع به R-مدول‌های انژکتیو یا تصویری که دارای خاصیت مجموع جمعوند مستقیم هستند روی چندین حلقه بررسی می‌شوند. همچنین شرایطی که تحت آن‌ها حلقه‌ی درونریختی‌های یک مدول دارای خاصیت مجموع جمعوند مستقیم است را بررسی می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

مقدمه

در این پایان نامه بعضی از مشخصات R-مدول‌ها با خاصیت مجموع جمعوند مستقیم (به طور کوتاه DSSP) را بیان می‌کنیم. یعنی R-مدول‌هایی که مجموع (زیرمدول تولید شده توسط اجتماع) هر دو جمعوند مستقیم آن‌ها نیز یک جمعوند مستقیم باشد. همچنین نتایج کلی راجع به R-مدول‌های انژکتیو یا تصویری با این خاصیت روی چندین حلقه بررسی می‌شوند.

بررسی مدول‌ها با این خاصیت که اشتراک هر دو جمعوند مستقیم آن‌ها نیز یک جمعوند مستقیم باشد توسط کاپلانسکی[1] با طرح تمرین‌های زیر شروع شد [۷، تمرین ۵۱، صفحه ۴۹].

الف) فرض کنید M یک مدول آزاد روی حلقه‌ی ایده‌آل‌های اصلی باشد و S یک زیرمدول M و T یک جمعوند مستقیم M باشند. ثابت کنید $S\bigcap T$ یک جمعوند مستقیم S است.

ب) فرض کنید M یک مدول آزاد روی حلقه‌ی ایده‌آل‌های اصلی باشد. نشان دهید اشتراک هر تعداد متناهی از جمعوندهای مستقیم M نیز یک جمعوند مستقیم M است.

ج) فرض کنید M یک مدول آزاد از رتبه شمارا روی حلقه‌ی ایده‌آل‌های اصلی باشد. نشان دهید که اشتراک هر تعداد از جمعوندهای مستقیم M نیز یک جمعوند مستقیم است.

[1]- Kaplansky

همچنین فاچ[1] مسأله‌ی باز زیر را مطرح کرد [۵، مسأله ۹، صفحه ۹۶].

مسأله: گروه‌هایی را مشخص کنید که اشتراک هر دو جمعوند مستقیم آن نیز یک جمعوند مستقیم باشد.

ویلسون[2] در[۱۵] به بررسی مدول‌هایی با این خاصیت پرداخت. همچنین والکان[3] در [۱۳] یک سری از مشخصات مدول‌های انژکتیو که اشتراک هر دو جمعوند مستقیم آن‌ها نیز یک جمعوند مستقیم است را ارائه کرد که در واقع جوابی برای مسأله‌ی فوق می‌باشد. وی در پایان مسأله زیر را مطرح کرد.

مسأله: R-مدول‌هایی (گروه‌های آبلی) که مجموع (زیرمدول تولید شده توسط اجتماع) هر دو جمعوند مستقیم آن‌ها نیز یک جمعوند مستقیم است را مشخص کنید.

این مسأله دوگان مسائل کاپسلانکی و فاچ است که حل ابتدایی آن توسط والکان در [۱۳] بدست آمده است و در اینجا حل‌های دیگر این مسأله یعنی مشخصات دیگر R-مدول‌هایی با خاصیت مجموع جمعوند مستقیم را بررسی می‌کنیم.

در همه جا حلقه‌ی شرکت پذیر و یکدار را با R نشان می‌دهیم و مدول‌ها زمانی که مشخص نباشند روی این حلقه‌ها، چپ فرض می‌شوند.

در فصل دوم تعاریف و نتایجی که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم راجع به R-مدول‌ها با این خاصیت که اشتراک هر دو جمعوند مستقیم آن‌ها نیز یک جمعوند مستقیم است را ارائه می‌دهیم.

در فصل سوم نتایج کلی مربوط به R-مدول‌ها با این خاصیت که مجموع هر دو جمعوند مستقیم آن‌ها نیز یک جمعوند مستقیم است را بیان کرده و در آخر شرایطی که تحت آن‌ها حلقه‌ی $\mathrm{End}(M)$ از همه‌ی درونریختی‌های M دارای این خاصیت باشد را بررسی می‌کنیم.

[1]- Fuch
[2]- Wilson
[3]- Valcan

در ابتدا تمام تعاریف و قضایایی که در سراسر این پایان نامه به آن‌ها نیاز داریم را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱-۱: مدول M که در شرایط هم ارز زیر صدق کند را مدول نیمه ساده گویند و یک حلقه را حلقه‌ی نیمه ساده گویند هر گاه به عنوان یک مدول روی خودش نیمه ساده باشد.

۱- M دارای خانواده‌ی $\{S_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های ساده (مدول‌هایی که هیچ زیرمدول غیر بدیهی ندارند) است به طوری که $M=\bigoplus_{i\in I} S_i$.

۲- M دارای خانواده‌ای از زیرمدول‌های ساده است که مجموعشان M است.

۳- هر زیرمدول M یک جمعوند مستقیم M است.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، گزاره ۳-۲، صفحه ۵۸].

قضیه ۱-۲: فرض کنید R یک حلقه است. آنگاه موارد زیر هم ارزند.

۱- حلقه‌ی R نیمه ساده است.

۲- هر R-مدول نیمه ساده است.

۳- هر R-مدول انژکتیو است.

۴- هر ایده‌آل چپ R انژکتیو است.

۵- هر R-مدول تصویری است.

۶- هر ایده‌آل چپ جمعوند مستقیمی از R است.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۳-۷، صفحه ۶۱].

قضیه ۱-۳: هر زیرمدول از یک مدول نیمه ساده، نیمه ساده است.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، گزاره ۳-۴، صفحه ۶۱].

قضیه ۱-۴: هر تصویر همریخت از یک مدول نیمه ساده، نیمه ساده است.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، گزاره ۳-۶، صفحه ۶۱].

قضیه ۱-۵: اگر E یک R-مدول باشد، آنگاه موارد زیر هم ارزند.

۱- E انژکتیو است.

۲- E یک جمعوند مستقیم از هر توسیع خودش است.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۲-۱۵، صفحه ۳۹].

تعریف ۱-۶: R-مدول M را تجزیه ناپذیر گویند هر گاه $M \neq 0$ و تنها جمعوندهای مستقیم آن 0 و خود M باشند.

قضیه ۱-۷: اگر M یک R-مدول باشد که حلقه‌ی درونریختی‌های آن یک دامنه‌ی ایده‌آل اصلی است، آنگاه M تجزیه ناپذیر است.

اثبات. رجوع شود به [۶، لم ۳-۱، صفحه ۱۴۰].

قضیه ۱-۸: گزاره‌های زیر هم ارزند.

۱- R یک حلقه‌ی نوتری است.

۲- هر R-مدول انژکتیو مجموع مستقیم R-مدول‌های انژکتیو تجزیه ناپذیر است.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۴-۴، صفحه ۸۵].

تعریف ۱-۹: فرض کنید M یک R-مدول باشد. پوشش انژکتیو M را که با $\mathrm{E}(M)$ نشان می‌دهیم عبارت است از یک توسیع انژکتیو E از M به طوری که برای هر زیرمدول ناصفر E' از E داشته باشیم $E' \cap M \neq 0$.

مثال) فرض کنید که R یک دامنه‌ی جابه‌جایی باشد. میدان کسرهای R وقتی به عنوان یک R-مدول در نظر گرفته می‌شود یک پوشش تزریقی از R است.

قضیه ۱-۱۰: فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری جابه‌جایی و E یک R-مدول باشد. آنگاه موارد زیر هم ارزند.

۱- E یک R-مدول انژکتیو تجزیه ناپذیر است.

۲- $E \cong \mathrm{E}(\frac{R}{P})$ برای ایده‌آل اول P از R.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۲-۳۲، صفحه ۵۳].

قضیه۱-۱۱: فرض کنید P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه صفرسازهای عناصر ناصفر R-مدول $\mathrm{E}(\frac{R}{P})$، عضو ماکسیمال و منحصربه‌فرد دارد که خود P است.

اثبات. رجوع شود به[۱۲، لم ۲-۳۱، صفحه ۵۲].

تعریف ۱-۱۲: فرض کنید $(A \text{ و } \leq)$ یک مجموعه جزئی مرتب باشد. $(A \text{ و } \leq)$ یک شبکه است اگر به ازای هر $b \in A$ و a مجموعه $\{a \text{ و } b\}$ دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا باشد.

تعریف ۱-۱۳: شبکه‌ی $(A \text{ و } \leq)$ را تام گویند اگر هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از A دارای کوچکترین کران بالا وبزرگترین کران پایین باشد.

تعریف ۱-۱۴: زیرگروه H از گروه G را کاملاً پایا گویند هر گاه به ازای هر درونریختی $f: G \to G$، $f(H)$ یک زیرگروه H باشد.

قضیه ۱-۱۵: برای حلقه‌ی R موارد زیر هم ارزند.

۱- R آرتینی است وهیچ ایده‌آل پوچ توان ناصفر ندارد.

۲- R شامل یک عنصر همانی است و نیمه ساده می‌باشد.

۳- هر مدول یکانی انژکتیو است.

۴- هر مدول یکانی نیمه ساده است.

اثبات. رجوع شود به [۳، قضیه۱۱، صفحه ۵۶].

تعریف ۱-۱۶: حلقه‌ی R را موروثی چپ گویند هر گاه تصویر همریخت هر R-مدول چپ انژکتیو، انژکتیو باشد. همچنین حلقه‌ی R را موروثی گویند هر گاه زیرمدول هر R-مدول تصویری، تصویری باشد.

مثال) حلقه‌ی Z و در حالت کلی هر دامنه‌ی ایده‌آل اصلی یک حلقه‌ی موروثی است.

قضیه ۱-۱۷: موارد زیر برای حلقه‌ی R هم ارزند.

۱- R موروثی چپ است.

۲- اگر M_1 و M_2 زیرمدول‌های انژکتیو R-مدول چپ M باشند، آنگاه M_1+M_2 انژکتیو است.

اثبات. ابتدا فرض کنید E یک مدول و N زیرمدول آن باشد. حال فرض کنید $Q=E\oplus E$ و $K=\{\ (x,x)\in Q\ \ |x\in N\ \}$. زیرمدول‌های M_1 و M_2 از مدول $\overline{Q}=\frac{Q}{K}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید. $M_1=\{\ y+K\in\overline{Q}\ |\ \ y\in(E,0)\}$ و $M_2=\left\{\ y+K\in\overline{Q}\ \middle|\ y\in(0,E)\ \right\}$. واضح است که $\overline{Q}=M_1+M_2$. حال چون $(E,0)\bigcap K=0$، داریم $M_1\cong E$. به طریق مشابه $M_2\cong E$. به علاوه $M_1\bigcap M_2=\{y+K\in\overline{Q}\,|\,y\in(N,0)\}=\{y+K\in\overline{Q}\,|\,y\in(0,N)\}$.
$\varphi:N\to M_1\bigcap M_2$ را در نظر بگیرید که برای هر $y\in(N,0)$، $y\to y+K$. واضح است که φ یک یکریختی است، $M_1\bigcap M_2\cong N$.

۲ ← ۱) اگر E انژکتیو باشد، آنگاه M_1 و M_2 انژکتیو هستند. بنابراین $\overline{Q}=M_1+M_2$ نیز انژکتیو است.چون M_1 انژکتیو است، بنا بر ۱-۵، زیرمدول G از $\overline{Q}$ وجود دارد به طوری که $\overline{Q}=M_1\oplus G$ و G لزوماً انژکتیو است. اما $G\cong\frac{(M_1+M_2)}{M_1}\cong\frac{M_2}{M_1\bigcap M_2}$ و چون $M_2\cong E$ و $M_1\bigcap M_2\cong N$، $\frac{E}{N}\cong G$ انژکتیو است.

۱ ← ۲) فرض کنید M_1 و M_2 زیرمدول‌های انژکتیو M باشند. M_1+M_2 تصویر همریخت مدول $M_1\oplus M_2$ است. چون $M_1\oplus M_2$ انژکتیو است بنا بر فرض M_1+M_2 نیز انژکتیو است.

نتیجه ۱-۱۸: فرض کنید R یک حلقه‌ی یکدار و هر مدول یکانی M در شرط زیر صدق کند. اگر N_1 و N_2 زیرمدول‌های انژکتیو M باشند، آنگاه $N_1\bigcap N_2$ انژکتیو است. در این صورت N_1+N_2 انژکتیو است و R آرتینی نیمه ساده می‌باشد.

اثبات. چون $N_1\bigcap N_2$ انژکتیو است بنا بر ۱-۵، یک جمعوند مستقیم از N_2 است. بنابراین زیرمدول N_2' وجود دارد به طوری که $N_2=(N_1\bigcap N_2)\oplus N_2'$. حال داریم $N_1+N_2=N_1\oplus N_2'$ و N_1 و N_2' انژکتیو هستند. این نشان می‌دهد که N_1+N_2 انژکتیو است. فرض کنید M یک مدول یکانی و $E=\mathrm{E}(M)$ باشد. از اثبات ۱-۱۷، نتیجه می‌شود که M اشتراک $M_1\bigcap M_2$ از زیرمدول‌های انژکتیو مدول $\frac{(E\oplus E)}{K}$ است. بنابراین هر مدول یکانی انژکتیو است. پس بنا بر ۱-۱۵، R آرتینی نیمه ساده است.

قضیه ۱-۱۹: برای حلقه‌ی R موارد زیر هم ارزند.

۱- R یک حلقه‌ی نوتری است.

۲- هر مجموع مستقیم از R-مدول‌های انژکتیو، انژکتیو است.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۴-۱، صفحه ۸۲].

قضیه ۱-۲۰: فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی و M یک R-مدول چپ باشد.در این صورت موارد زیر هم ارزند.

۱- M نوتری است.

۲- M آرتینی است.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه ۳-۲۵، صفحه ۷۸].

قضیه ۱-۲۱: فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری جابه‌جایی باشد. در این صورت موارد زیر هم ارزند.

۱- R آرتینی است.

۲- هر R-مدول انژکتیو تجزیه ناپذیر، نوتری است.

اثبات. رجوع شود به[۱۲، صفحه ۱۲۰].

قضیه ۱-۲۲: اگر M یک مدول آزاد روی حلقه‌ی ایده‌آل‌های اصلی باشد، آنگاه هر زیرمدول N از M آزاد است.

اثبات. رجوع شود به [۷، لم ۵، صفحه ۴۴].

قضیه ۱-۲۳: برای حلقه‌ی R موارد زیر هم ارزند.

۱- هر R-مدول تصویری است.

۲- هر R-مدول انژکتیو است.

اثبات. ۱ ← ۲) فرض کنید که هر R-مدول تصویری است. زیرمدول J از B و دنباله‌ی کامل کوتاه $0 \to J \to B \to A \to 0$ را در نظر بگیرید. چون A تصویری است پس $B \cong J \oplus A$.یعنی هر دنباله‌ی کامل کوتاه، کامل تجزیه است. بنابراین J انژکتیو است.

۲ ← ۱) فرض کنید که هر R-مدول انژکتیو است. دنباله کامل کوتاه $0 \to A \to B \to P \to 0$ را در نظر بگیرید. چون A انژکتیو است پس $B \cong A \oplus P$. یعنی هر دنباله‌ی کامل کوتاه، کامل تجزیه است. بنابراین P تصویری است.

تعریف ۱-۲۴: فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح و E یک R-مدول باشد. عنصر $e \in E$ را تابی گویند هر گاه عنصر ناصفر $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $re = 0$. اگر تنها عنصر تابی E صفر باشد E را یک مدول فارغ از تاب گوییم. هر گاه تمام عناصر E تابی باشند آن را یک مدول تابی گوییم.

تعریف ۱-۲۵: فرض کنید M یک R-مدول روی دامنه‌ی صحیح R باشد. تعداد ماکزیمال از عناصر مستقل خطی M را رتبه‌ی M گوییم.

تعریف ۱-۲۶: برای مدول‌های فارغ از تاب A و B یک همریخت نما از A به B یک همریختی $\varphi : \mathrm{E}(A) \to \mathrm{E}(B)$ است به طوری که برای یک $r \in R$، $r\varphi(A) \subseteq B$.

تعریف ۱-۲۷: همریخت نمای φ یک یکریخت نما است هرگاه یک یکریختی از $\mathrm{E}(A)$ و $\mathrm{E}(B)$ باشد و φ^{-1} یک همریخت نما باشد.

اگر مدول‌های فارغ از تاب A و B از رتبه‌ی متناهی باشند، آنگاه A با B یکریخت نما است اگر و تنها اگر A با زیرمدولی از B و B با زیرمدولی از A یکریخت باشد.[۱۵، صفحه ۲۸]

تعریف ۱-۲۸: گوییم عنصر ناصفر a از حلقه‌ی جابه‌جایی R عنصر $b \in R$ را عاد می‌کند ($a|b$) اگر $x \in R$ موجود باشد به طوری که $ax = b$. گوییم عناصر a و b از R شریک هستند اگر $a|b$ و $b|a$.

تعریف ۱-۲۹: عنصر غیر یکه‌ی ناصفر p از R را اول گوییم هر گاه $p|ab$، آنگاه $p|a$ یا $p|b$.

قضیه ۱-۳۰: فرض کنید R یک حلقه‌ی ایده‌آل‌های اصلی و M یک R-مدول تابی باشد. آنگاه $M = \bigoplus_{p\in P} M_p$ که P مجموعه عناصر اول R است و

$$M_p = \{m \in M | p^i m = 0 \text{ ، } i \in N \text{ برای یک } \}.$$

اثبات. فرض کنید $0 \neq m \in M$، آنگاه $\mathrm{Ann}(m) \neq 0$ یک ایده‌آل R است. بنابراین برای یک $0 \neq a \in R$، $\mathrm{Ann}(m) = \langle a \rangle$. فرض کنید $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ یک تجزیه‌ی a به عوامل اول R باشد. فرض کنید برای $i = 1,\dots,k$، $a_i = \prod_{j\neq i} p_j^{n_j}$. در این صورت $\{a_i\}$ نسبت به هم اول هستند. پس $b_i \in R$ وجود دارد به طوری که $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = 1$. پس داریم $m = m\,.1 = (\sum a_i b_i)m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ که $m_i = (a_i b_i)m$. بنابراین $p_i^{n_i} m_i = (b_i a_i p_i^{n_i})m = b_i(am) = b_i\,.\,0 = 0$ که نتیجه می‌دهد $m_i \in M_{p_i}$.

با نشان دادن این که صفر نمایش منحصر به فرد دارد نشان می‌دهیم که $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ منحصر به فرد است. چون $m_i \in M_{p_i}$ است پس برای یک $n_i \in N$، $p_i^{n_i} m_i = 0$. می‌دانیم که a_i و $p_i^{n_i}$ نسبت به هم اول می‌باشند. پس $r_i, s_i \in R$ وجود دارند به طوری که $r_i a_i + s_i p_i^{n_i} = 1$. در نتیجه داریم

$$m_i = m_i - s_i p_i^{n_i} m_i = (1 - s_i p_i^{n_i})m_i = (r_i a_i)m_i = r_i a_i(-\sum_{j\neq i} m_j) = -\sum_{j\neq i} r_i(a_i m_j) = 0.$$

تعریف ۱-۳۱: فرض کنید E یک R-مدول باشد. عنصر e از E را بخش‌پذیر گویند هر گاه برای هر $r \in R$ که مقسوم‌علیه صفر راست نیست عنصر $e' \in E$ وجود داشته باشد به طوری که

$e = re'$. اگر هر عنصر E بخش‌پذیر باشد، E را یک مدول بخش‌پذیر گویند. بویژه گروه آبلی G بخش‌پذیر است هر گاه به ازای هر $y \in G$ و $0 \neq n \in Z$، عنصر $x \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $nx = y$.

قضیه ۱-۳۲: برای هر عدد اول p، $Z(p^\infty)$ یک گروه بخش‌پذیر است.

اثبات. $0 \neq n \in Z$ و $\frac{a}{p^k} + Z \in Z(p^\infty)$ ($k \geq 0$) را در نظر بگیرید. اگر $p \nmid n$، آنگاه $x_0', y_0' \in Z$ وجود دارند به طوری که $nx_0' + p^k y_0' = 1$. پس $nx_0 + p^k y_0 = a$ که $x_0 = x_0' a$ و $y_0 = y_0' a$. از این جا داریم $\frac{nx_0 - a}{p^k} = y_0 \in Z$. در نتیجه $n(\frac{x_0}{p^k} + Z) = \frac{a}{p^k} + Z$.

حال اگر $p|n$، آنگاه $n = p^l q$ که $p \nmid q$. بنا بر آنچه ثابت شد نتیجه می‌شود که عنصر $\frac{c}{p^k} + Z \in Z(p^\infty)$ وجود دارد به طوری که $q(\frac{c}{p^k} + Z) = \frac{a}{p^k} + Z$. پس $\frac{a}{p^k} + Z = \frac{qc}{p^k} + Z = \frac{qp^l c}{p^{k+l}} + Z = n(\frac{c}{p^{k+l}} + Z)$. این نشان می‌دهد که $Z(p^\infty)$ بخش‌پذیر است.

قضیه ۱-۳۳: هر جمعوند مستقیم از یک گروه آبلی بخش‌پذیر، بخش‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید A یک گروه آبلی بخش‌پذیر باشد. پس یک Z-مدول انژکتیو است. بنابراین هر جمعوند مستقیم آن نیز یک Z-مدول انژکتیو است. پس هر جمعوند مستقیم آن یک گروه آبلی بخش‌پذیر است.

قضیه ۱-۳۴: هر زیرگروه بخش‌پذیر از یک گروه آبلی یک جمعوند مستقیم آن است.

اثبات. رجوع شود به [۷، قضیه ۲، صفحه ۸].