دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

# ناورداها و قضیه‌ای از نوع بونه برای رویه‌ها در فضای چهار بعدی اقلیدسی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

**منصور مهرمحمدی**

استاد راهنما

**دکتر اعظم اعتماد**

۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه) آقای منصور مهرمحمدی

تحت عنوان

# ناورداها و قضیه‌ای از نوع بونه برای رویه‌ها در فضای چهار بعدی اقلیدسی

در تاریخ ۱۳۹۱/۱۰/۱۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

| | |
|---|---|
| ۱ـ استاد راهنمای پایان‌نامه | دکتر اعظم اعتماد |
| ۲ـ استاد مشاور پایان‌نامه | دکتر منصور آقاسی |
| ۳ـ استاد داور ۱ | دکتر محمدرضا پوریای ولی (دانشگاه اصفهان ) |
| ۴ـ استاد داور ۲ | دکتر سید قهرمان طاهریان |

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

# فهرست مطالب

## چکیده:

در این پایان نامه نظریه موضعی رویه‌ها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^4$ بررسی می‌شود. با تعریف یک نگاشت خطی روی فضای مماس رویه با نام نگاشت وینگارتن ثابت می‌شود که این نگاشت به تقریب علامت یک ناوردای هندسی رویه است. دترمینان و اثر ماتریس متناظر به این نگاشت خطی را به عنوان ناورداهای جدید رویه در نظر می‌گیریم و برحسب این دو کمیت نقاط روی رویه به چهار نوع تخت، بیضوی، هذلولوی و سهموی تقسیم بندی می‌شوند. سپس رویه‌های مینیمال و رویه‌های دارای التصاق قائم تخت بر حسب این دو کمیت مشخص خواهند شد. در ادامه دو ساختار دیگر برای مشخص کردن شکل یک رویه ارائه شده و ارتباط نقاط تخت، بیضوی، هذلولوی و سهموی و رویه‌های مینیمال و رویه‌های دارای التصاق قائم تخت با این دو ساختار بیان می‌شوند. در روش اول در هر نقطه از فضای مماس رویه یک خم جبری درجه دوم با نام شاخص مماسی تعریف شده و در روش دوم در فضای قائم بر هر نقطه از رویه یک بیضی با نام بیضی انحنای قائم معرفی می‌شود. پس از آن در هر نقطه از رویه میدان کنجی متعامد یکه یگانه‌ای انتخاب شده و هشت ناوردای جدید از رویه بدست می‌آید. آنگاه معادلات مشتق رویه را برحسب این ناورداها نوشته و دو رده از رویه‌های تخت بر حسب آنها مشخص خواهند شد. درادامه قضیه‌ای ثابت می‌شود که بنابر آن وجود رویه یکتایی را برای مجموعه‌ای از ناورداها تضمین می‌کند.



**واژه‌های کلیدی: رویه‌ها در فضای چهاربعدی اقلیدسی، نگاشت وینگارتن، بیضی انحنای قائم، قضیه اساسی از نوع بونه**

# فصل ۱

# مقدمه

## ۱—۱ مقدمه

نظریه موضعی رویه‌ها با کار افرادی چون گاسپار مونژ و اویلر شروع شد (مونژ را پدر هندسه دیفرانسیل می‌دانند). اولین کسی که به مطالعه هندسه ذاتی رویه‌های پارامتری‌شده در $\mathbb{R}^۳$ پرداخت گاوس [۹] بود. مدت‌ها تمام مطالعات نظریه رویه‌ها براساس رویه‌های پارامتری‌شده در $\mathbb{R}^۳$ بود، سپس اولین بار ریمان در [۱۹] بصورت غیر رسمی مفهوم مجرد خمینه $n$—بعدی را به عنوان شیٔ‌ای تعریف کرد که هر نقطه از آن را می‌توان با یک $n$ تایی نمایش داد به قسمی که روی آن مفهوم دیفرانسیل‌پذیری یک تابع و مفهوم طول یک خم قابل تعریف است. در نتیجه این سوال پیش آمد که آیا برای هر خمینه دو بعدی (یعنی همان رویه) یک نمونه یا کپی در $\mathbb{R}^۳$ وجود دارد؟ به عبارت دیگر آیا هر رویه‌ای را می‌توان به صورت همان متری در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ غوطه‌ور کرد؟ بعدها ثابت شد که چنین نیست و بنابراین نیاز به بررسی رویه‌های پارامتری‌شده در $\mathbb{R}^۴$ احساس شد. از طرف دیگر مطالعه رویه‌ها در فضای چهاربعدی مشکلات خاص خود را دارد. در اینجا چون رویه دو بردار قائم پیدا می‌کند، بنابراین نمی‌توان از روش‌های گاوس و بقیه افرادی استفاده کرد که رویه‌های پارامتری‌شده در $\mathbb{R}^۳$ را بررسی کرده‌اند. رویه‌های پارامتری‌شده در فضای $\mathbb{R}^۴$ توسط افرادی چون ایزنهارت [۷]، کومرل [۱۶]، مور و ویلسون [۲۱]، اسکوتن و استرایک [۲۰] و کارتان [۵] بررسی شده است. این افراد برای بررسی رویه‌های پارامتری‌شده در $\mathbb{R}^۴$ از بیضی خاصی با نام بیضی انحنای قائم (که برای هر نقطه از رویه مزبور در فضای

قائم آن تعریف می‌شود) استفاده کرده‌اند که ما روش آنها را در فصل چهارم (بخش سوم) شرح خواهیم داد.

این پایان نامه بر مبنای مقالات [۱۰] و [۱۳] از دو ریاضیدان بلغار با نام‌های گانچو و میلوشوا قرار دارد و در حقیقت تعمیم نگاشت وینگارتن به رویه‌های غوطه‌ور در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^4$ است.

پایان نامه مشتمل بر پنج فصل است. فصل اول شامل تاریخچه و مرور اجمالی بقیه فصل‌ها است. در فصل دوم مطالب مورد نیاز از جبرخطی و هندسه ریمانی را ارائه می‌کنیم. در فصل سوم یک نگاشت خطی روی فضای مماس رویه با نام نگاشت وینگارتن تعریف شده و ثابت می‌شود که این نگاشت به تقریب علامت یک ناوردای هندسی رویه است. یعنی اگر رویه را تغییر پارامتری بدهیم و تغییر پارامتری حافظ جهت باشد، نگاشت وینگارتن تغییری نمی‌کند. در غیر اینصورت این نگاشت در $-1$ ضرب می‌شود و این نگاشت تحت حرکات صلب فضای $\mathbb{R}^4$ هم دقیقا به همین صورت تغییر می‌کند (البته چون تغییر پارامتری‌های جهت برگردان و حرکات صلب جهت برگردان $\mathbb{R}^4$ گروه تشکیل نمی‌دهند بنابراین عملا با آنها سروکارنداریم). در ادامه دترمینان و اثر ماتریس متناظر این نگاشت را به عنوان ناورداهای جدید رویه در نظرمی‌گیریم، در حالی که دترمینان نگاشت وینگارتن یک پایای هندسی رویه است. در همین فصل تقسیم‌بندی نقاط روی رویه بر حسب این دو ناوردای جدید انجام می‌شود. آنگاه یک فرم دوخطی متقارن روی فضای مماس رویه تعریف و بر حسب آن جهات اصلی و مجانبی معرفی می‌شود. در انتهای این فصل ثابت می‌شود که هر رویه را می‌توان به طریق خاصی (جهت سادگی) پارامتری کرد.

در فصل چهارم در هر نقطه از رویه میدان کنجی متعامد یکه یکتایی می‌سازیم و از این میدان کنجی هشت ناوردای جدید از رویه پیدا می‌شود. حاصل این کار دستیابی به معادلات مشتق رویه برحسب این ناورداها است. در ادامه در هر نقطه از رویه دو مفهوم شاخص مماسی (که یک خم جبری درجه دوم در فضای مماس رویه است) و بیضی انحنای قائم (که یک بیضی در فضای قائم رویه است) را تعریف و ارتباط شکل رویه و شکل این خم‌ها مشخص خواهد شد.

در فصل پنجم ابتدا شرایط لازم برای وجود رویه‌ای با مجموعه‌ای از هشت ناوردای تعریف شده در فصل چهارم بیان خواهد شد و در این فصل قضیه‌ای ثابت می‌شود که به موجب آن برای مجموعه‌ای از ناورداها که شرایط خاصی (مشتمل بر دو نامساوی و یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی) را بر آورده کنند، رویه یکتایی با ناورداهای مزبور در $\mathbb{R}^4$ وجود دارد.

فصل ششم به بررسی مثال‌هایی از رویه‌های پارامتری‌شده در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^4$ اختصاص دارد و در آن دو رده از رویه‌های تخت مشخص خواهند شد (در حقیقت در مرجع [۱۳] ثابت شده است که هر رویه تخت به یکی از این دو رده تعلق دارد).

# فصل ۲

# پیش نیازها

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول گذری بر مفاهیمی از جبر خطی داریم که در این پایان نامه استفاده می‌شود. در بخش دوم مروری بر مباحثی از هندسه ریمانی داریم که در این پایان نامه مورد نیاز است. در معرفی مفاهیم و بیان قضایای این فصل از مراجع [۴] ، [۱۵] استفاده شده است .

## ۲–۱ گذری بر جبر خطی

در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم $V$ یک فضای برداری با بعد متناهی $n$ روی میدان $K$ با مشخصه صفر است، در مواردی که چنین نباشد تذکر خواهیم داد.

**تعریف ۱.۲** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری و $r$ عدد صحیح مثبتی باشد. تابع $f$ از $V^r = V \times V \times \cdots \times V$ در $K$ چند خطی نامیده می‌شود هرگاه برای بردارهای $\alpha_i$ ، $1 \leq i \leq r$ ، $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ به عنوان تابعی از هر $\alpha_i$ با ثابت نگه داشتن بقیه $\alpha_j$ ها خطی باشد. یعنی برای هر $i$،

$$f(\alpha_1, \cdots, c\alpha_i + \beta_i, \cdots, \alpha_r) = c\, f(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_r) + f(\alpha_1, \cdots, \beta_i, \cdots, \alpha_r)$$

یک تابع چند خطی روی $V^r$ یک فرم $r$–خطی نامیده می‌شود.

دراین پایان نامه تقریبا در تمام موارد با فرم‌های دو خطی روی $V^{2}$ سر و کار داریم که در آن $V$ یک فضای برداری دو بعدی روی میدان اعداد حقیقی است.

**تعریف ۲.۲** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری و $f : V \times V \to K$ یک فرم دوخطی باشد. آنگاه فرم $f$ را

الف ) متقارن گویند، هرگاه داشته باشیم $f(v,w) = f(w,v)$.

ب ) پاد متقارن گویند، هرگاه داشته باشیم $f(v,w) = -f(w,v)$.

ج ) مثبت معین گویند ، هرگاه متقارن باشد و برای هر بردار ناصفر $v$ داشته باشیم $f(v,v) > 0$.

از تعریف فرم دوخطی بلافاصله قضیه زیر نتیجه می‌شود.

**قضیه ۳.۲** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری و $f : V \times V \to K$ یک فرم دوخطی متقارن باشد. برای هر دو برداربه صورت $ax+by$ , $cx+dy$ از $V$ داریم،

$$f(ax+by, cx+dy) = ac\ f(x,x) + (ad+bc)\ f(x,y) + bd\ f(y,y) \qquad (1)$$

از قضیه بالا به دفعات برای محاسبه مقدار فرم دو خطی دلخواهی در یک فضای برداری دو بعدی (که بعدا مشخص می‌شود فضای مماس رویه است) بر حسب مقادیر آن فرم روی اعضای پایه فضا استفاده می‌کنیم.

**قضیه ۴.۲** برای هر پایه مرتب $\{v_1, \cdots, v_n\}$ از فضای برداری $V$ و فرم دو خطی $f$، ماتریس یکتای $n \times n$ ای مانند $A = [a_{i,j}]$ وجود دارد بطوری که برای هر دو بردار $w, v$ از $V$،

$$f(v,w) = v^t\ A\ w \quad , \quad a_{i,j} = f(v_i, v_j) \qquad (2)$$

ماتریس $A$ را ماتریس فرم دو خطی $f$ در پایه مرتب $\{v_1, \cdots, v_n\}$ می‌نامند.

از قضیه بالا مشخص می‌شود که هرگاه فرم دو خطی $f$ متقارن باشد، آنگاه ماتریس متناظر به آن در هر پایه مرتب $\{v_1, \cdots, v_n\}$ از $V$ متقارن است، یعنی $A^t = A$.

**تعریف ۵.۲** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری $n-$بعدی باشد ، منظور از یک ضرب داخلی روی $V$، یک فرم دو خطی ، متقارن ، مثبت معین روی $V$ است که آن را با $< , >$ نمایش می‌دهیم.

از تعریف ضرب داخلی و قضیه (۴.۲) بلافاصله نتیجه می‌شود که ماتریس متناظر به یک ضرب داخلی در هر پایه مرتب از فضای برداری $V$ متقارن است.

**تعریف ۶.۲** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری با ضرب داخلی $< , >$ باشد، مجموعه بردارهای $\{v_1, \cdots, v_n\}$ را متعامد یکه نامیم هرگاه برای هر $1 \leq i, j \leq n$ داشته باشیم،

$$< v_i, v_j >= \delta_{i,j}$$

که در رابطه بالا $\delta_{i,j}$ تابع دلتای کرونکر است.

**تعریف ۷.۲** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری با ضرب داخلی $< , >$ و بردارهای $v_1, \cdots, v_n$ از این فضا مستقل خطی باشند، در این صورت می‌توان بردارهای متعامد یکه $w_1, \cdots, w_n$ را چنان بر حسب $v_1, \cdots, v_n$ در $V$ ساخت که به ازای هر $k = 1, \cdots, n$ مجموعه

$$\{w_1, \cdots, w_k\}$$

پایه‌ای برای زیرفضای تولید شده توسط $v_1, \cdots, v_k$ باشد (فرایند گرام—اشمیت).

**تعریف ۸.۲** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری دو بعدی و $v, w \in V$. مساحت جهت‌دار متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $v, w$ را دترمینان ماتریس با سطرهای $v, w$ تعریف می‌کنیم و آن را با $det(v, w)$ نمایش می‌دهیم .

**تعریف ۹.۲** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری $n$—بعدی باشد. یک جهت روی $V$ عبارت است از یک کلاس هم‌ارزی از پایه‌های مرتب فضای برداری $V$ که در رابطه هم‌ارزی $\sim$ صدق می‌کند.
برای دو پایه مرتب $v = \{v_1, \cdots, v_n\}$ و $\bar{v} = \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$، اگر این دو پایه مرتب توسط تبدیل خطی $A$ به هم تبدیل شوند، یعنی $\bar{v} = A\ v$ آنگاه $v \sim \bar{v}$ هر گاه $det\ A > 0$، بنابراین برای فضای برداری $V$ دقیقا دو جهت وجود دارد. همچنین،
الف ) پایه‌های مرتب دارای کلاس هم‌ارزی یکسان را پایه‌های هم جهت و پایه‌های مرتب دارای کلاس هم‌ارزی متفاوت را پایه‌های غیر هم جهت می‌نامیم .
ب ) پایه‌های هم جهت با پایه استاندارد $\{e_1, \cdots, e_n\}$ از فضای $\mathbb{K}^n$ را پایه‌های با جهت مثبت می‌نامیم.

همچنین منظور از جهت متناظر به یک بردار ناصفر $v$ از $V$، کلاس هم‌ارزی این بردار تحت رابطه هم‌ارزی $\sim$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.
برای دو بردار ناصفر $v$ و $w$ از $V$ داریم $v \sim w$ هرگاه برای اسکالر ناصفری چون $t \in K$ داشته باشیم $v = tw$.

قضیه ۱۰.۲ برای هر دو پایه مرتب $v = \{v_1, \cdots, v_n\}$ و $\bar{v} = \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ از فضای برداری $n-$بعدی $V$، فرض کنیم مختصات یک بردار دلخواه $X$ از $V$ در پایه مرتب $\{v_1, \cdots, v_n\}$ به صورت $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و در پایه مرتب $\bar{v} = \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ به صورت $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ باشد. اگر برای تبدیلی خطی چون $T$ از $V$ به $V$، ماتریس‌های متناظر به این تبدیل در این دو پایه بترتیب $T$ و $\bar{T}$ بوده و برای فرم دوخطی دلخواه $G$ ماتریس‌های متناظر به $G$ در این دو پایه بترتیب $G$ و $\bar{G}$ باشند و اگر این دو پایه توسط ماتریس $S$ به یکدیگر تبدیل شوند (یعنی اگر هردو پایه را در پایه استاندارد بنویسیم، آنگاه داشته باشیم $\bar{v} = S\ v$)، آنگاه

$$X = S^t\ \bar{X} \tag{۳}$$

$$\bar{T} = S^{-t}\ T\ S^t \tag{۴}$$

$$\bar{G} = S\ G\ S^t \tag{۵}$$

قضیه قبل در محاسبه تغییرات نگاشت‌ها و فرم‌های دو خطی روی فضای مماس تحت تغییر پارامتر و حرکات رویه بکار می‌رود.

تعریف ۱۱.۲ فرض کنیم $V$ یک فضای برداری $n-$بعدی روی میدان $K$ با ضرب داخلی $< , >$ باشد، تبدیل خطی $T$ از $V$ به $V$ را نسبت به ضرب داخلی $<,>$ خود الحاق نامند، هرگاه برای هر دو بردار $v, w$ از $V$ داشته باشیم

$$< T\ (v), w > = < v, T\ (w) > \tag{۶}$$

قضیه ۱۲.۲ فرض کنیم $V$ یک فضای برداری ۲$-$بعدی روی میدان $\mathbb{R}$ با ضرب داخلی $< , >$ باشد. هرگاه تبدیل خطی $T$ از $V$ به $V$ نسبت به ضرب داخلی $< , >$ خود الحاق باشد ، آنگاه
الف ) تبدیل خطی $T$ دو مقدار ویژه حقیقی دارد.
ب ) بردارهای ویژه متناظر به این دو مقدار ویژه نسبت به ضرب داخلی $< , >$ بر هم عمودند.

## ۲$-$۲ هندسه ریمانی

در این بخش گذری بر هندسه خمینه‌های ریمانی داریم، چون مطالب این پایان نامه در مورد رویه‌ها است (یعنی زیرخمینه‌هایی از $\mathbb{R}^4$) و نه خمینه‌های مجرد، بنابراین نظری اجمالی به مفاهیم مربوط به خمینه‌ها داریم. در تمام این بخش فرض می‌کنیم همه توابع از کلاس $C^\infty$ هستند.

**تعریف ۱۳.۲** یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر، یک فضای توپولوژی هاسدورف، شمارای نوع دوم همراه با خانواده‌ای از همانریختی‌های $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ از زیرمجموعه‌های باز $U_\alpha$ از $\mathbb{R}^n$ به $M$ است، به قسمی که

الف ) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$

ب ) برای هر جفت $\alpha$ , $\beta$ ، با شرط $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \varnothing$ مجموعه‌های $x_\alpha^{-1}(W)$ و $x_\beta^{-1}(W)$ زیرمجموعه‌های بازی از $\mathbb{R}^n$ باشند و نگاشت‌های $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ همانریختی‌هایی (دراینجا از کلاس $C^\infty$) باشند.

ج ) خانواده $\{(U_\alpha\ ,\ x_\alpha)\}$ نسبت به شرط‌های الف و ب ماکسیمال باشند (یعنی هیچ زوج $\{(U_\alpha\ ,\ x_\alpha)\}$ دیگری خارج از این مجموعه و صادق در دو شرط اول موجود نباشد).

جفت $(U_\alpha\ ,\ x_\alpha)$ با $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ را پارامترسازی از نقطه $p$ در $M$ می‌نامند. اغلب اوقات $x_\alpha(U_\alpha)$ ها را همسایگی نقطه $p$ می‌نامند، همچنین خانواده $\{(U_\alpha\ ,\ x_\alpha)\}$ را که در دو شرط اول صدق کند ساختار دیفرانسیل‌پذیر روی $M$ می‌نامند. اغلب اوقات یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر $n$−بعدی $M$ را بانماد $M^n$ نمایش می‌دهند. از اینجا به بعد هر جا صحبت از خمینه شد منظور خمینه دیفرانسیل‌پذیر است .

**تعریف ۱۴.۲** فرض کنیم $M^n$ یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر باشد، یک تابع دیفرانسیل‌پذیر $\alpha : (-\epsilon\ ,\ \epsilon) \to M^n$ یک خم دیفرانسیل‌پذیر در خمینه $M^n$ نام دارد، فرض کنیم $\alpha(\circ) = p \in M^n$ و $D$ مجموعه تابع‌های دیفرانسیل‌پذیر با مقدار حقیقی در نقطه $p$ از خمینه $M^n$ باشد. یک بردار مماس به خم $\alpha$ در $t = \circ$ یک تابع $\alpha'(\circ) : D \to \mathbb{R}$ طوری است که،

$$\alpha'(\circ)\ (f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\ |_{t=\circ}\quad ,\quad f \in D$$

یک بردار مماس در نقطه $p$ از خمینه $M^n$، یک بردار مماس در $t = \circ$ از خم دیفرانسیل‌پذیری چون $\alpha : (-\epsilon\ ,\ \epsilon) \to M^n$ با $\alpha(\circ) = p$ است .

مجموعه بردارهای مماس در نقطه $p$ از خمینه $M^n$ تحت اعمال جمع (جمع دو تابع) و ضرب اسکالر (ضرب یک تابع در یک اسکالر) یک فضای برداری $n$− بعدی تشکیل می‌دهند که آن را فضای مماس بر خمینه $M^n$ در نقطه $p \in M^n$ گویند و با نماد $T_pM^n$ نمایش می‌دهند. این فضای برداری پایه‌ای دارد که اعضای آن بردارهای مماس بر خم‌های مختصاتی $x_i \mapsto x_\alpha(\circ, \cdots, \circ, x_i, \circ, \cdots, \circ)$ هستند که با نماد $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ نمایش داده می‌شوند. بنابراین هر عضو از $T_pM^n$ را می‌توان به صورت یکتای $\sum_{1}^{n} a_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ نوشت (در ضمن ساختار این فضای برداری به پارامتری انتخاب شده $x_\alpha$ وابسته نیست، یعنی تمام فضاهای برداری حاصل از پارامتری‌سازی‌های مختلف باهم یکریخت هستند).

**تعریف ۱۵.۲** فرض کنیم $M_1^n$ , $M_2^m$ دو خمینه دیفرانسیل‌پذیر باشند، نگاشت $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ در $p \in M_1^n$ دیفرانسیل‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر پارامتری $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2^m$ از $\varphi(p)$ یک پارامتری $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1^n$ در $p \in M_1^n$ وجود داشته باشد بطوری که $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ و نگاشت

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

در $x^{-1}(p)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. از شرط (ب) در تعریف خمینه دیفرانسیل‌پذیر نتیجه می‌شود که دیفرانسیل‌پذیر بودن نگاشت $\varphi$ مستقل از انتخاب پارامتری برای دو خمینه $M_1^n$ , $M_2^m$ است.
نگاشت $\varphi$ را روی یک مجموعه باز $M_1^n$ دیفرانسیل‌پذیر گویند هرگاه در هر نقطه از آن مجموعه دیفرانسیل‌پذیر باشد.

**تعریف ۱۶.۲** فرض کنیم $M_1^n$ , $M_2^m$ دو خمینه دیفرانسیل‌پذیر و $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ نگاشت دیفرانسیل‌پذیری باشد، طبق تعریف بردار مماس ، برای هر بردار مماس $v \in T_pM_1^n$ خمی چون $\alpha : (-\epsilon , \epsilon) \to M_1^n$ با شرایط $\alpha(0) = p$ , $\alpha'(0) = v$ وجود دارد. فرض کنیم $\beta = \varphi \circ \alpha$ (یعنی $\beta$ تصویر $\alpha$ تحت نگاشت $\varphi$ باشد). نگاشت $d\varphi_p : T_PM_1^n \to T_{\varphi(p)}M_2^m$ با ضابطه $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ یک نگاشت خطی خوش‌تعریف است (یعنی تصویر بردار مماس $v \in T_pM_1^n$ مستقل از انتخاب خم $\alpha$ است). این نگاشت را دیفرانسیل نگاشت $\varphi$ در نقطه $p \in M_1^n$ می‌نامند.

**تعریف ۱۷.۲** فرض کنیم $n \geq m$ و $M^m$ , $N^n$ دو خمینه باشند. نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $\varphi : M^m \to N^n$ را یک غوطه‌وری می‌نامند هرگاه برای هر $p \in M^m$ دیفرانسیل $\varphi$ در نقطه $p$ (یعنی $d\varphi_p : T_PM^m \to T_{\varphi(p)}N^n$) یک به یک باشد.

**تعریف ۱۸.۲** فرض کنیم برای دو خمینه $M^m$ , $N^n$، نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $\varphi : M^m \to N^n$ یک غوطه‌وری باشد. هرگاه $\varphi$ یک همان ریختی از $M^m$ به $\varphi(M^m) \subset N^n$ باشد (در حالی که $\varphi(M^m)$ دارای توپولوژی زیرفضایی القاء شده توسط $N^n$ است)، آنگاه $\varphi$ را یک نشاننده (هموار) می‌نامند.

**تعریف ۱۹.۲** فرض کنیم $M^m$ یک خمینه با ساختار دیفرانسیل‌پذیر $\{(U_\alpha , Y_\alpha)\}$ باشد، ثابت می‌شود مجموعه $\{(p,v); p \in M^m , v \in T_pM^m\}$ ساختار دیفرانسیل‌پذیری دارد که همراه با این ساختار دیفرانسیل‌پذیر یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر است. این خمینه را کلاف مماس $M^m$ نامیده و با نماد $TM^m$ نمایش می‌دهند.

**تعریف ۲۰.۲** یک میدان برداری روی خمینه $M^m$ تناظری است که به هر نقطه $p \in M^m$ بردار مماس $X(p) \in T_pM^m$ را نسبت می‌دهد، به بیان دقیق‌تر میدان برداری $X$ یک نگاشت $X : M^m \to TM^m$ از خمینه $M^m$ به روی کلاف مماس $T\ M^m$ است. براین اساس میدان برداری $X$ را دیفرانسیل‌پذیر گویند هرگاه نگاشت $X : M^m \to TM^m$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. در نتیجه برای پارامتری $x : U \to M^m$ میدان برداری $X$ را می توان به صورت

$$\sum_{1}^{m} a_i(p)\ (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$$

نوشت، که در اینجا $a_i$ ها توابعی از $U$ به $\mathbb{R}$ و $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ پایه‌ی متناظر به پارامتری $x$ از فضای مماس $T_pM^m$ است، در نمایش بالا میدان برداری $X$ دیفرانسیل‌پذیر است اگر و فقط اگر توابع $a_i$ برای یک پارامتری (و ازشرط (ب) برای همه پارامتری‌ها) دیفرانسیل‌پذیر باشند. مجموعه میدان‌های برداری روی یک خمینه $M$ تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری تشکیل می‌دهند که آن را با نماد $\chi(M)$ نمایش می‌دهند.

**تعریف ۲۱.۲** میدان کنجی متحرک تناظری است که به هر نقطه از خمینه $M^m$ یک پایه برای فضای مماس $T_pM^m$ آن نسبت می‌دهد.

در هندسه دیفرانسیل برای مشخص کردن رویه‌ای با ناورداهای مفروض، ابتدا میدان کنجی متحرک خاصی در نظر گرفته می‌شود (که اغلب مرتبط با ساختار زیر خمینه و یا خمینه است). سپس مشتق جهتی این میدان کنجی برحسب خود آن نوشته می‌شود که به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی جزئی منجر می‌شود. با حل دستگاه فوق رویه و یا زیر خمینه مفروض به تقریب حرکات فضای در برگیرنده مشخص خواهد شد.

**تعریف ۲۲.۲** برای هر تابع حقیقی $f$ روی خمینه $M^m$ و میدان برداری $X$ روی $M^m$، مشتق سویی تابع $f$ در جهت میدان برداری $X$ با نماد $X(f)$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$X(f) = \sum_{1}^{m} a_i(p)\ (\frac{\partial f}{\partial x_i})_p$$

که در اینجا $f \in D$ و $\sum_{1}^{m} a_i(p)\ (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ نمایش میدان برداری $X$ در یک پارامتری $x : U \to M^m$ است. ثابت می‌شود که این مقدار مستقل از انتخاب پارامتری خمینه $M^m$ است.

**تعریف ۲۳.۲** فرض کنیم $M^m$ یک خمینه باشد. برای هر دو میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر $Y, X$ روی $M$، میدان برداری دیفرانسیل‌پذیری چون $Z$ وجود دارد بطوری که برای هر $f \in D$

$$Z\ (f) = (XY\ - YX)\ f \qquad (۷)$$

این میدان برداری یکتا کروشه لی دو میدان برداری $Y,X$ نام دارد و با نماد $[X\ ,\ Y]$ نمایش داده می‌شود.

قضیه **۲۴.۲** برای هر سه میدان برداری $Z,Y,X$ روی خمینه $M^m$، هرگاه $b,a$ اعدادی حقیقی و $g,f$ توابعی دیفرانسیل‌پذیر روی $M^m$ باشند (یعنی $f,g\in D$) آنگاه،

$$[X,Y]=-[Y,X] \tag{۸}$$

$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z] \tag{۹}$$

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0 \tag{۱۰}$$

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X \tag{۱۱}$$

معادله (۸) را خاصیت پاد تعوض‌پذیری کروشه لی گویند. معادله (۹) را خاصیت خطی بودن کروشه لی و معادله (۱۰) را اتحاد ژاکوبی می‌نامند.

تعریف **۲۵.۲** یک متر یا ساختار ریمانی روی یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر $M^m$، تناظری است که به هر نقطه $p\in M^m$ یک ضرب داخلی $<,>$ روی فضای $T_pM^m$ نسبت می‌دهد و به مفهوم زیر دیفرانسیل‌پذیر است .
هرگاه $x:U\to M^m$ یک پارامتری حول $p\in M^m$ با $x(x_1,\cdots,x_m)=q\in x(U)$ و $\frac{\partial}{\partial x_i}(q)=dx_q(0,\cdots,1,\cdots,0)$ باشد، آنگاه برای هر $1\leq i,j\leq m$، تابع $<\frac{\partial}{\partial x_i}(q),\frac{\partial}{\partial x_j}(q)>_q=g_{ij}(x_1,\cdots,x_m)$ روی $U$ دیفرانسیل‌پذیر است.
غالبا یک خمینه دیفرانسیل پذیر مجهز به یک متر ریمانی را یک خمینه ریمانی می‌نامیم و آن را با نماد $(M,<,>)$ و یا بطورخلاصه در صورت مشخص بودن متر با $M$ نمایش می‌دهند.

تعریف **۲۶.۲** فرض کنیم $M^n$ , $N^n$ دو خمینه ریمانی و $f:M^n\to N^n$ یک نگاشت دوسویی دیفرانسیل‌پذیر با معکوس دیفرانسیل‌پذیر باشد، $f$ را یک همان‌متری می‌نامند هرگاه برای هر $u,v\in T_pM^n$ و $p\in M^n$ داشته باشیم،

$$<u\ ,\ v>_p=<df_p(u)\ ,df_p(v)\ \ >_{f(p)}$$

**تعریف ۲۷.۲** : فرض کنیم $N^n$ , $M^n$ دو خمینه و نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $f : M^n \to N^n$ یک غوطه‌وری باشد، اگر $N^n$ یک ساختار ریمانی (یعنی یک متر ریمانی) داشته باشد آنگاه $f$ یک متر‌ریمانی روی $M^n$ به صورت زیر القاء می کند،

برای هر $u, v \in T_pM^n$ و $p \in M^n$، $< u \ , \ v >_p = < df_p(u) \ , df_p(v) \ >_{f(p)}$

این متر را متر القایی $f$ می‌نامند.

هرگاه $M^n$ و $N^n$ همراه این دو متر به عنوان دو خمینه ریمانی در نظر گرفته شوند، آنگاه نگاشت $f$ را یک غوطه‌وری همان‌متری نامند.

**تعریف ۲۸.۲** یک التصاق آفین روی یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر $M^n$ یک نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

است که برای $Y, X \in \chi(M)$ با نماد $(X, Y) \to \nabla_X Y$ نمایش داده می‌شود و برای میدان‌های برداری $Z, Y, X \in \chi(M)$ و توابع دیفرانسیل‌پذیر $g, f \in D$ در شرایط زیر صدق می کند،

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Y + g\nabla_Y Z \tag{۱۲}$$

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \tag{۱۳}$$

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y \tag{۱۴}$$

**تعریف ۲۹.۲** روی یک خمینه ریمانی $M^n$ التصاق $\nabla$ را یک التصاق لوی چیوتا گویند هرگاه برای هر سه میدان برداری $Z, Y, X \in \chi(M)$

الف ) سازگار با متر ریمانی خمینه باشد، یعنی

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z > \tag{۱۵}$$

ب ) بدون تاب باشد، یعنی

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{۱۶}$$

**قضیه ۳۰.۲** (قضیه اساسی هندسه ریمانی) برای هر خمینه ریمانی $(M^n, <,>)$، التصاق منحصر به فردی مانند $\nabla$ وجود دارد بطوری که برای هر سه میدان برداری $Z, Y, X \in \chi(M)$ داریم،

$$\begin{aligned} < Z, \nabla_X Y >= & \tfrac{1}{2}\{X < Y, Z > +Y < Z, X > -Z < X, Y > \\ & - < [X, Z], Y > - < [Y, Z], X > - < [X, Y], Z >\} \end{aligned}$$

این التصاق را التصاق لوی چیوتای $M^n$ و یا التصاق ریمانی $M^n$ می‌نامند.

**تعریف ۳۱.۲** فرض کنیم $(M^n, <,>)$ یک خمینه ریمانی باشد. انحنای ریمانی $M^n$ یک تناظر است که به هر دو میدان برداری $Y, X \in \chi(M)$ یک نگاشت $R(X, Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ را به صورت زیر نسبت می‌دهد،

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{۱۷}$$

به عبارت دیگر یک تابع که در هر نقطه $p \in M^n$ به هر دو بردار از فضای مماس $T_pM^n$ ، یک نگاشت روی $T_pM^n$ نسبت می‌دهد. همچنین برای هر چهار میدان برداری $W, Z, Y, X \in \chi(M)$ قرار می‌دهیم،

$$< R(X, Y)Z, W >:= (X, Y, Z, W) \tag{۱۸}$$

**قضیه ۳۲.۲** برای هر خمینه ریمانی $(M^n, <,>)$

الف ) تانسور انحنای ریمانی $R$ دو خطی است، یعنی برای میدان‌های برداری دلخواه $Z_۲, Z_۱, Y_۲, Y_۱, X_۲, X_۱$ و توابع $g, f \in D$،

$$\begin{aligned} R(fX_۱ + gX_۲, Y_۱) &= fR(X_۱, Y_۱) + gR(X_۲, Y_۱) \\ R(X_۱, fY_۱ + gY_۲) &= fR(X_۱, Y_۱) + gR(X_۱, Y_۲) \end{aligned} \tag{۱۹}$$

ب ) نگاشت نسبت داده شده به $Y, X$ در هر نقطه از فضای مماس خمینه خطی است، یعنی برای میدان‌های برداری $Z, Y, X \in \chi(M)$ و توابع $g, f \in D$

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W \\ R(X, Y)(fZ) &= f\ R(X, Y)Z \end{aligned} \tag{۲۰}$$

**قضیه ۳۳.۲** برای هر خمینه ریمانی $(M^n, <,>)$ و میدان‌های برداری دلخواه $W, Z, Y, X$ داریم،

$$(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = ۰ \tag{۲۱}$$

$$(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T) \tag{۲۲}$$

$$(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z) \tag{۲۳}$$

$$(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y) \tag{۲۴}$$

**تعریف ۳۴.۲** برای هر زیرخمینه بطور همان متری غوطه ورشده $(N^n, <,>)$ از خمینه ریمانی $M^{n+k}$، انحنای قائم $N^n$ یک تناظر است که به هر دو میدان برداری $Y, X \in \chi(N)$ یک نگاشت‌خطی روی فضای قائم $N_pN^n$ بصورت زیر نسبت می‌دهد.

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = D_X D_Y \eta - D_Y D_X \eta - D_{[X,Y]}\eta \qquad (۲۵)$$

$\eta$ یک میدان برداری قائم $N^n$ و $D$ التصاق قائم $N^n$ و یا تصویر $\overline{\nabla}_X \eta$ روی فضای قائم $N^n$ است ($\overline{\nabla}$ التصاق ریمانی $M^{n+k}$ است).

**تعریف ۳۵.۲** منظور از یک رویه پارامتری‌شده هموار در $\mathbb{R}^n$، تصویر یک مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^۲$ تحت یک غوطه‌وری همان‌متری $f : U \to \mathbb{R}^n$ است که آن را با $M^۲$ نمایش می‌دهیم. در اینجا $f$ را پارامتری رویه $M^۲$ می‌نامند. در این حالت برای فضای مماس رویه داریم،

$$T_pM^۲ = span\{\frac{\partial f}{\partial x_۱} \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_۲}\}$$

همچنین برای یک رویه پارامتری‌شده هموار، متر القایی از فضای $\mathbb{R}^n$ را فرم اساسی اول رویه می‌نامند و با نماد $I$ نمایش می‌دهند.

**تعریف ۳۶.۲** فرض کنیم $M^۲$ یک رویه پارامتری‌شده هموار در $\mathbb{R}^n$ باشد، هرگاه $\varphi : \bar{U} \subset \mathbb{R}^۲ \to U \in \mathbb{R}^۲$ تابع دوسویی دیفرانسیل پذیری با ضابطه

$$\varphi(\bar{x}_۱, \bar{x}_۲) = (x_۱(\bar{x}_۱, \bar{x}_۲) \ , \ x_۲(\bar{x}_۱, \bar{x}_۲))$$

و ژاکوبین $\frac{\partial(x_۱, x_۲)}{\partial(\bar{x}_۱, \bar{x}_۲)} \neq ۰$ (و در نتیجه دارای معکوس دیفرانسیل‌پذیر) باشد، آنگاه تابع مرکب $\bar{f} = fo\varphi$ به صورت $\bar{f} : \bar{U} \to \mathbb{R}^۲$ که یک غوطه‌وری همان‌متری است را یک تغییر پارامتری رویه $M^۲$ می‌نامند .

**تعریف ۳۷.۲** فرض کنیم $M^۲$ یک رویه پارامتری‌شده هموار در $\mathbb{R}^n$ با پارامتری $f : U \to \mathbb{R}^n$ باشد. از همان متری بودن $f$ نتیجه می‌شود که برای هر نقطه $p \in M^۲$ از رویه ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{R}^n$ (به عنوان متر ریمانی این خمینه)، $T_p\mathbb{R}^n$ را به مجموع مستقیم دو زیر فضای برداری تجزیه می‌کند، یکی $T_PM^۲$ ودیگری مکمل متعامد آن که آن را فضای قائم رویه $M^۲$ نامیده و با نماد $N_p\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهند.

$$T_p\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{M}^۲ \oplus N_pM^۲$$

بنابراین در هر نقطه $p \in M^2$، هر بردار $v \in T_p\mathbb{R}^n$ را می‌توان صورت زیر نوشت.
$$v = v^T + v^\perp$$

که در اینجا $v^T$ مولفه مماسی $v$ و $v^\perp$ مولفه قائم $v$ است.

تعریف **۳۸.۲** فرض کنیم $M^2$ یک رویه پارامتری شده هموار در $\mathbb{R}^n$ با پارامتری $f : U \to \mathbb{R}^n$ باشد، هرگاه برای میدان‌های برداری $Y, X \in \chi(M)$، میدان‌های برداری $\bar{Y}, \bar{X}$ توسیع‌های $Y, X$ روی $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه نگاشت $\sigma : \chi(M) \times \chi(M) \to N(M)$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود را تانسور دومین فرم اساسی رویه $M^2$ نامند.

$$\sigma(X,Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y \qquad (۲۶)$$

که اینجا $N(M)$ کلاف قائم $M^2$، $\bar{\nabla}$ التصاق ریمانی $\mathbb{R}^n$ و $\nabla$ التصاق ریمانی $M^2$ است.

قضیه **۳۹.۲** نگاشت $\sigma$ دو خطی و متقارن است، یعنی برای هر سه میدان برداری $X, Y, Z \in \chi(M)$ و تابع دیفرانسیل پذیر $f \in D$ داریم،

$$\begin{aligned} \sigma(fX + gY, Z) &= f\sigma(X,Z) + g\sigma(Y,Z) \\ \sigma(X,Y) &= \sigma(Y,X) \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

تعریف **۴۰.۲** فرض کنیم $M^2$ یک رویه پارامتری‌شده هموار در $\mathbb{R}^n$ با پارامتری $f : U \to \mathbb{R}^n$ باشد و $p \in M^2$. اگر برای میدان برداری قائم $\zeta \in (T_pM^2)^\perp$، $N$ یک توسیع موضعی از $\zeta$ روی $R^n$ باشد، آنگاه نگاشت تعریف شده توسط ضابطه زیر را عملگر شکلی بردار قائم $\zeta$ می‌نامند.

$$A_\zeta : T_pM^2 \to T_pM^2$$
$$A_\zeta(x) = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}}N)^T$$

که در اینجا $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}N)^T$ مولفه مماسی $\bar{\nabla}_{\bar{X}}N$ است.

قضیه **۴۱.۲** فرض کنیم $M^2$ یک رویه پارامتری‌شده هموار در $R^n$ با پارامتری $f : U \to \mathbb{R}^n$ باشد. برای هر دو میدان برداری مماس $Y, X \in \chi(M)$ و میدان برداری قائم $\zeta$ داریم،

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X,Y) \qquad (۲۸)$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + D_X \xi \qquad (۲۹)$$

$$< A_\xi(X), Y > = < \sigma(X,Y), \xi > \qquad (۳۰)$$

که در اینجا $\bar{\nabla}$ التصاق ریمانی $\mathbb{R}^4$، $\nabla$ التصاق ریمانی رویه $M^2$، $\sigma$ تانسور دومین فرم اساسی رویه و $A_\zeta$ عملگر شکلی نظیر بردار قائم $\zeta$ است.