بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده ی علوم ریاضی و کامپیوتر

شماره پایان نامه : ۹۲۱٤۱۰٥٦

پایان نامه ی کارشناسی ارشد

گرایش :

ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

عنوان :

شیوه ها ی کراندار سریع برای نمونه های بزرگ از مسئله ی مکان یابی ساده

استاد راهنما :

دکتر هادی بصیر زاده

استاد مشاور :

دکتر منصور سراج

نگارنده :

کریم نواصر

تیرماه سال ۱۳۹۲

تقدیم به ساحت مقدس بانوی دو عالم شفیع روز جزاء

حضرت *فاطمه ی زهراء* صلوات الله علیها

و فرزند موعودش *امام زمان* عجل الله تعالی فرجه الشریف

«احمده استتماماً لنعمته واستسلاماً لعزته واستعصاماً من معصیته و استعینه فاقه الی کفایته انه لا یضل من هداه و لا یئل من عاداه و لا یفتقر من کفاه فانه ارجح ما وزن و افضل ما خزن و اشهد ان لااله الا الله وحده لاشریک له شهاده ممتحناً اخلاصها معتقداً مصاصها نتمسک بها ابداً ما ابقانا و ندخرها لاهاویل ما یلقانا.»

نهج البلاغه - خطبه ی۲

«حمد و ستایش می کنم او را برای جلب اتمام نعمتش و اظهار تسلیم در برابر عزتش و تقاضای حفظ و نگهداری از معصیتش ، چرا که آن کس را که او هدایت فرماید هیچ گاه گمراه نمی شود و آن کس را که او دشمن دارد هرگز رهایی نمی یابد ، زیرا ستایش او در ترازوی سنجش ، از همه چیز سنگین تر است و برای ذخیره کردن ، از هر گنجی برتر و گواهی می دهم که جز خداوند معبودی نیست ؛ یگانه و بی شریک است ، همان گواهی ای که خلوص آن آزموده شده و عصاره و جوهره ی آن را در عمق عقیده ی خود جای داده ام ، شهادتی که تا خدا ما را زنده دارد به آن پایبندیم و آن را برای صحنه های هولناکی که در پیش داریم ذخیره کرده ایم .»

اکنون که به یاری خداوند متعال این رساله را به انجام رسانیده ام، زبان و قلم ازوصف مهر ومحبت ها ی اعضا ی خانواده ام عاجز است. آنان که همواره آفتاب مهرشان بر من نور افشانی کرده است . و کمال تشکر را از جناب آقای دکترهادی بصیر زاده ، استاد راهنمای گرامی ام و جناب آقای دکتر منصور سراج که مشاوره این پژوهش را بر عهده داشته اند ، دارم و نیز از تمامی اساتید بزرگوارم در دوره های کارشناسی و کارشناسی ارشد سپاسگزارم .

کریم نواصر

تیر ماه ۱۳۹۲

چکیده

نام خانوادگی : نواصر	**نام** : کریم	**شماره دانشجویی** : ۹۰۱٤۱۰۵
عنوان پایان نامه : شیوه ها ی کراندار سریع برای نمونه های بزرگ ازمسئله ی مکان یابی ساده		
استاد راهنما : دکتر هادی بصیرزاده		
استاد مشاور : دکتر منصور سراج		
درجه ی تحصیلی : کارشناسی ارشد	**رشته** : ریاضی کاربردی	**گرایش** : تحقیق در عملیات
دانشگاه : شهید چمران اهواز	**دانشکده**:علوم ریاضی و کامپیوتر	**گروه** : ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی : ۱۳۹۲/٤/۵		تعداد صفحه : ۱۰٦
واژه های کلیدی : بهینه سازی ترکیبیاتی ، محل طرح ، دوگان افزایشی.		

چکیده : برخی از روش های کراندار، جدید، ساده و بسیار سریع برای نمونه های بزرگ مقیاس از مسئله مکان یابی ساده ارائه شده است . روش های از پایین کراندار برمبنای دوگان افزایشی پایه ریزی شده اند . سریعترین این روشها در زمان $O(mn \log m)$ اجرا می شوند که در آن m و n به ترتیب تعداد موقعیت ها و مشتریان است . روش های از بالا کراندار روی طرح های کاهشی تکراری پایه ریزی شده اند که سریعترین آنها در زمان $O(m(n + \log m))$ اجرا می شود . نتایج محاسباتی حاکی از آن است که این روش ها در عمل ، کرانهای بسیار خوبی را به طور خیلی سریع نشان می دهند .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ۱

فصل اول : تاریخچه و مدل بندی مسئله ی مکان یابی

مقدمه ۳

۱-۱- مدل ریاضی مسئله ی مکان یابی ساده (SPLP) ۵

۱-۲- مدل ریاضی مسئله مکان یابی ساده با عرضه و تقاضای معین ۷

۱-۳- مدل ریاضی مسئله ی مکان یابی ساده با در نظرگرفتن هزینه ساخت مسیر از محل طرح به متقاضایان ۸

۱-٤- مدل ریاضی مسئله ی مکان یابی ساده با ظرفیت محدود (CPLP) ۹

۱-۵- مدل ریاضی مسئله مکان یابی پویا با ظرفیت محدود (DCPLP) ۱۰

۱-٦- مدل ریاضی ارائه شده توسط «شن» و همکارانش (۲۰۰۳) ۱۳

۱-۷- مدل ریاضی ارائه شده توسط «میراندا» و «گاریدو» (۲۰۰۸) ۱۵

فصل دوم : روش های حل مسئله ی مکان یابی

۲-۱- الگوریتم دقیق ۲۰

۲-۲- روش سه مرحله ای مجزا برای حل بهینه مسائل مکان یابی با ظرفیت نامحدود ۲٤

۲-۲-۱- مدل ریاضی مسئله ۲٤
۲-۲-۲- الگوریتم اولیه- دوگان ۲۸
۲-۲-۳- آزاد سازی لاگرانژ ۳۲
۲-۲-۳-۱- آزاد سازی لاگرانژ برای مسئله ی اولیه (P) ۳۲
۲-۲-۳-۲- جواب (Lu) برای یک مقدار ثابت $u = u^t$ ۳۳
۲-۲-۳-۳- روش بهینه سازی زیرگرادیان ۳٤
۲-۲-۳-٤- الگوریتم حل دوگان لاگرانژ بوسیله روش بهینه سازی زیرگرادیان ۳۵
۲-۲-۳-۵- بستن شکاف های دوگان بوسیله ی روش شاخه و کران ۳۷
۲-۲-٤- نتایج عددی ٤۰
۲-۲-٤-۱- داده های مسئله برای شبکه های تصادفی ٤۱
۲-۲-٤-۲- نمایش نتایج ٤۲
۲-۳- روش مبنی بر دوگان برای حل مسئله ی مکان یابی با ظرفیت نامحدود ٤٤
۲-۳-۱- مدل بندی مسئله ٤۵
۲-۳-۲- روش جواب دوگان ٤۸
۲-۳-۳- نتایج عددی ۵۸

فصل سوم : جوابهای بهین تقریبی برای مسائل مکان یابی با مقیاس بزرگ

۳-۱- مقدمه ٦٦
۳-۲- حل آزادسازی برنامه ریزی خطی ٦۷

۳-۲-۱- مسئله مکان یابی با ظرفیت نامحدود (UFLP)..... ٦٧
۳-۲-۲- مسئله مکان یابی با ظرفیت محدود (CFLP)..... ٦٨
۳-۳- الگوریتم حجم..... ۷۰
۳-٤- گرد کردن تصادفی ۷۳
۳-٤-۱- مسئله مکان یابی با ظرفیت نامحدود..... ۷۳
۳-٤-۲- مسئله مکان یابی ظرفیت دار..... ۷۵
۳-۵- ترکیب الگورتیم حجم و راهکار گردکردن تصادفی..... ۷٦
۳-٦- آزمون های عددی..... ۷۷
۳-٦-۱- مسئله ی مکان یابی با ظرفیت نامحدود..... ۷۷
۳-٦-۲- مسئله ی مکای یابی با ظرفیت محدود..... ۸۲

پیوست

حل مثال با کمک نرم افزار..... ۸۵
واژه نامه انگلیسی به فارسی..... ۹۱
منابع..... ۹۳

پیشگفتار

مکان یابی عبارت است از یافتن مکان های بهینه برای احداث طرح هایی که جهت خدمت رسانی برای یک منظور خاص ، به کار می روند . مکان یابی قسمت مهمی از مسائل حمل ونقل را تشکیل می دهد ، مانند مکان یابی مرکز اورژانس در سطح شهر، مکان یابی مرکز آتش نشانی ، مکان یابی سرد خانه های مواد غذایی در بنادر و مکان یابی مراکز آموزشی و تحقیقاتی.

نخستین الگوریتم در شاخه‌ی تحقیق در عملیات جهت حل مسائل مکان یابی ، حدود یازده سال پس از ارائه‌ی روش سیمپلکس که تحولی شگرف در حل مسائل خطی و غیرخطی بوجود آورد ، پیشنهاد گردید. از آن پس به طور متوسط هر دو سال ، یک الگوریتم جدید ارائه می‌شده است. بنابراین در این نوشتار سعی بر این است که ضمن بررسی الگوریتم‌های کلاسیک ، به بسط الگوریتم های ابتکاری و تقریبی در این زمینه پرداخته گردد. زیر بنای این تحقیق بر پایه ی مقاله ی اصلی ذکر شده در منبع [۲۷] است . در آخر از همه‌ی کسانی که در تهیه و تدوین این رساله ، سهمی داشته‌اند ، تشکر و قدردانی می‌گردد . امید می‌رود که مطالب این رساله ، مورد استفاده‌ی علاقمندان به تحقیق در زمینه‌ی مذکور ، قرار گیرد ان‌شاءالله تعالی .

کریم نواصر

تیرماه ۱۳۹۲

فصل اول :

تاریخچه و مدل بندی مسئله‌ی مکان‌یابی

مقدمه :

تعیین محل واحدهایی از قبیل انبار یا کارخانه برای مؤسسات و سازمان‌ها یک تصمیم مهم استراتژیکی است. هزینه‌های حمل و نقل که معمولاً سهم بزرگی از قیمت کالاهای عرضه شده را تشکیل می‌دهند ، تابعی از مکان طرح‌ها می‌باشند . هزینه‌های ثابت راه‌اندازی و نصب یک طرح ممکن است از محلی به محل دیگر متفاوت باشد و به این منظور جهت دستیابی به اقتصادی‌ترین محل احداث طرح‌ها ، مسائل مکان‌یابی تشکیل یک دسته‌ی مهم از مسائل علمی را داده‌اند که می‌توان آنها را مانند یک برنامه‌ریزی صحیح فرمول‌بندی کرد که در مطالعات علمی، تحت عناوین زیر ، به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته‌اند :

(الف) مسئله‌ی مکان‌یابی طرح

(ب) مسئله‌ی مکان یابی انبار

(پ) مسئله‌ی مکان‌یابی وسایل

در این نوشتار، روی مورد (الف) متمرکز خواهیم شد .

الگوریتم‌های ارائه شده برای حل مسئله‌ی مکان یابی تا سال ۱۹۹۱ عبارتند از : [۱۵]

نام شخص ارائه دهنده	سال ارائه‌ی الگوریتم
Baumal wolfe	۱۹۵۸
Balinski	۱۹۶۱
Kuehn And Humburger	۱۹۶۳
Erlenkotter	۱۹۶۶
Efroymson. M.A And T.L.Ray	۱۹۶۶
Sa. G	۱۹۶۸
Hammer	۱۹۶۸
Spielberg And Kurt	۱۹۶۹
Shannon And Ignizio	۱۹۷۰
Arthurm Geoffrion	۱۹۷۲
Geoffrion And Mcbride	۱۹۷۸
Mcbrude	۱۹۷۸

N.Christofides And J.E Beasley.	۱۹۸۳
Vanroy	۱۹۸٦
Alexander Shulman	۱۹۹۱
R. Sridharan	۱۹۹۱

کسانی که در سال های اخیر روی مسئله‌ی مکان‌یابی کار کرده‌اند ، به صورت زیر می باشند : [۱۳]

نام شخص ارائه دهنده	**سال ارائه‌ی الگوریتم**
Nozick and Turnquist	۱۹۹۸
Erlebacher And Meller	۲۰۰۰
Daskin et. al	۲۰۰۲
Shen et.al	۲۰۰۳
Miranda And Garrido	۲۰۰٦
Snyder et. al	۲۰۰۷
Shen and Qi	۲۰۰۷
Miranda And Garride	۲۰۰۸

در اینجا نیز انواع مسئله‌ی مکان‌یابی- مسیریابی و مقالات مرتبط با آنها ارائه می‌گردد : [٤١]

نوع مسئله	**ارائه دهندگان مقالات**
۱) مکان یابی – مسیریابی احتمال	*Laport et . al*
۲) مکان یابی – مسیریابی پویا	*Laport and Dejax*
۳) P میانه همیلتنی	*Branco And Coelho*
٤) مسیریابی ریل	*Semet*
٥) تخصیص مسیریابی خودرو	*Beasly And Nascimento*
٦) مکان‌یابی - مسیریابی بسیار به بسیار	*Negy And Salhi*
۷) مکان‌یابی اقلیدسی	*Ghiani And Laport*
۸) مکان‌یابی – مسیریابی با گام‌های مخلوط	*Wu et. al*
۹) سرمایه گذاری مکان‌یابی- مسیر یابی	*Liu And Lee*

۱۰) مکان‌یابی چرخش دوری دستگاه	*Labbe et. al*
۱۱) مکان‌یابی – مسیریابی بسیار به بسیار	*Wasner And Zapfel*
۱۲) سرمایه‌گذاری مکان‌یابی – مسیریابی چندگانه	*Ambro Sino And Scutella*
۱۳) مکان‌یابی – مسیریابی قطعی	*Albareda – Sambola et. al*
۱٤) مسئله‌ی دوری میانه (VRAP)	*Labbe et. al*
۱۵) مکان‌یابی – مسیریابی با هزینه‌های غیر خطی	*Melechovsky et . al*
۱٦) مکان‌یابی – مسیریابی مسطح (تک انباره)	*Schwardt And Dethloff*
۱۷) مسئله دوری میانه‌ی (VRAP) مقید	*Gunnarsson*
۱۸) مکان‌یابی – مسیریابی مسطح (چند انباره)	*Negy And Salhi*

با این مقدمه‌ی کوتاه اکنون سراغ مدل‌های مختلف مسئله مکان‌یابی می‌رویم .

۱-۱- مدل ریاضی مسئله‌ی مکان‌یابی ساده (SPLP) :

این مسئله را می‌توان در قالب یک برنامه ریزی خطی به صورت زیر فرمول‌بندی نمود : [۲۷]

$$Min \quad Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}\ x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i\ y_i \qquad (۱-۱-۱)$$

$$S.t\ .\ \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \qquad (۱-۱-۲)$$

$$y_i - x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J \qquad (۱-۱-۳)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \qquad (۱-۱-٤)$$

که در اینجا داریم :

I : مجموعه‌ی اندیس مکان‌ها (منابع)

J : مجموعه اندیس مشتریان (مقاصد)

c_{ij} : هزینه‌ی خدمت دهی طرح i به مشتری j

f_i : هزینه ثابت احداث طرح i

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر طرح } i \text{ به مشتری } j \text{ تخصیص یابد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{طرح } i \text{ اجرا شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

معادله ی (۱-۱-۱) تابع هدف را نشان می‌دهد که دو مجموع را کمینه می‌کند : مجموع نخست از سمت چپ هزینه‌ی حمل و نقل طرح‌ها را نشان می دهد و دیگری بیانگر هزینه‌ی ثابت احداث طرح‌ها است .

معادله ی (۱-۱-۲) به این معنی است که به هر مشتری به طور دقیق یک طرح اختصاص می یابد .

رابطه ی (۱-۱-۳) بیانگر این معنی است که ابتدا می‌بایست یک طرح اجرا شود ، سپس هزینه‌ی حمل و نقل آن حساب گردد .

و عبارت‌های (۱-۱-٤) به این معنی هستند که x_{ij} و y_i متغیرهای صحیح‌اند که فقط مقدار ۱ یا ۰ را می پذیرند.

۱-۲- مدل ریاضی مسئله ی مکان‌یابی ساده با عرضه و تقاضای معین :

این مدل همچون مدل ریاضی مسئله ی مکان یابی ساده است با این تفاوت که میزان عرضه و تقاضا در اینجا محدود است .[۳۵]

$$Min \quad Z = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\ x_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\ y_i \qquad (۱-۲-۱)$$

$$S.t. \quad \sum_{j\in J} x_{ij} = a_i \qquad \forall i \in I \qquad (۲-۲-۱)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = b_j \qquad \forall j \in J \qquad (۳-۲-۱)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad for \quad all\ \ i, j \qquad (٤-۲-۱)$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر طرح } i \text{ اجرا شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۵-۲-۱)$$

که در آن داریم :

I : مجموعه‌ی اندیس منابع (طرح‌ها)

J : مجموعه‌ی اندیس مقاصد (مشتریان)

c_{ij} : نشان دهنده هزینه‌ی حمل یک واحد کالا از منبع I به مقصد j

f_i : هزینه‌ی ثابت احداث طرح i

a_i : محدودیت عرضه از منبع i

b_j : محدودیت تقاضا در مقصد j

x_{ij} : کسری از تقاضای مشتری j که از طرح i برآورده می‌شود .

معادلات (۱-۲-۲) عرضه و معادلات (۱-۲-۳) تقاضا را نشان می‌دهند .

۱-۳- مدل ریاضی مسئله‌ی مکان‌یابی ساده با در نظر گرفتن هزینه‌ی ساخت مسیر از محل طرح به متقاضیان :

فرمول بندی این مدل به شکل زیر است :

$$Min \quad z = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\ x_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\ y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} f_{ij}\ y_{ij} \qquad (۱-۳-۱)$$

$$S.t.\ \ (\sum_{i\in J} x_{ij}) - k_i y_i \le 0 \quad for\ all\ i \qquad (۲-۳-۱)$$

$$x_{ij} - k_{ij}\ y_{ij} \le 0 \quad for\ all\ i, j \qquad (۳-۳-۱)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \ge d_j \qquad for\ all\ i \qquad (٤-۳-۱)$$

که در آن داریم :

I : مجموعه‌ی اندیس منابع (طرح‌ها)

J : مجموعه‌ی اندیس مقاصد (مشتریان)

x_{ij} : میزان (برحسب واحد) محصول حمل شده از شهر i به شهر j در افق طرح ریزی

f_i : هزینه ثابت احداث طرح i

k_i : ظرفیت محصول در شهر i روی افق طرح ریزی برای سطح ساخته شده

d_j : حداقل تقاضای در مقصد j

f_{ij} : هزینه‌ثابت ساخت یک مسیر برای حمل محصول از شهر i به شهر j

k_{ij} : واحد ظرفیت در افق طرح‌ریزی به علت ساخت مسیر حمل و نقل از شهر i به شهر j

c_{ij} : هزینه‌ی حمل یک واحد محصول از شهر i به شهر j

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر طرح } i \text{ به مشتری } j \text{ اختصاص یابد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک طرح در شهر } i \text{ اجرا شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک مسیر حمل و نقل بین شهر } i \text{ و شهر } j \text{ ساخته شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

معادله‌ی (۱-۳-۱) تابع هدف را نشان می‌دهید که مجموع سه هزینه را به ترتیب از چپ به راست کمینه می‌کند : هزینه حمل و نقل محصول از شهر i به شهر j ، هزینه‌ی احداث طرح‌ها ، و هزینه‌ی ساخت مسیر از شهر i به شهر j .

رابطه ی (۱-۳-۲) نشان می‌دهد که ظرفیت محصول حمل شده از شهر i به سایر شهرها محدود است .

همچنین رابطه ی (۱-۳-۳) بیانگر این است که ظرفیت واحد محصول به علت ساخت مسیر حمل و نقل از شهر i به شهر j محدود است .

رابطه‌ی (۱-۳-٤) نشانگر این است که تقاضای شهر i حداقل برابر d_j است .

۱-٤- مدل ریاضی مسئله‌ی مکان‌یابی ساده با ظرفیت محدود (CPLP) :

این مدل را می‌توان مانند برنامه‌ریزی خطی آمیخته با اعداد صحیح به صورت زیر فرمول‌بندی نمود : [۲۰]

$$Min \quad z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}\ x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i\ y_i \qquad (۱-٤-۱)$$

$$S.t. \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad for\ all\ j \qquad (۱-٤-۲)$$

$$\sum_{j \in J} d_j x_{ij} \le s_i\ y_i \qquad for\ all\ i \qquad (۱-٤-۳)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\} \qquad for\ all\ i, j \qquad (۱-٤-٤)$$

که در آن داریم :

I : مجموعه‌ی اندیس فهرست طرح ها

J : مجموعه‌ی اندیس فهرست مشتریان

c_{ij} : هزینه حمل و نقل واحد تقاضای مشتری j از طرح مستقر در i

f_i : هزینه‌ی ثابت احداث طرح i

d_j : تقاضای مشتری j

s_i: ظرفیت طرح مستقر در i

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر طرح } i \text{ اجرا شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

x_{ij} : کسری از تقاضای مشتری j که از طرح i برآورده می‌شود .

معادله‌ی (۱-٤-۲) بیانگر این است که دقیقاً یک طرح i به مشتری j اختصاص می‌یابد .

رابطه‌ی (۱-٤-۳) نشانگر این است که تقاضای مشتری j نباید از ظرفیت طرح i بیشتر باشد و علت نامگذاری مسئله ، همین معادله ی (۱-٤-۳) است .

۱-۵- مدل ریاضی مسئله‌ی مکان‌یابی پویا با ظرفیت محدود (DCPLP) :

ابتدا نمادهای استفاده شده را در این مدل معرفی می‌کنیم : [۳۳]

I : مجموع اندیس مکان وسایل

J : مجموعه اندیس مکان تقاضا در مدل

T: تعداد دوره‌ها در افق طرح ریزی

P_i : مجموعه‌ی انواع وسایلی که می‌توان در مکان i جایگزین کرد. (i=1,2,…, |I| که در آن |I| نشانگرتعداد اعضای مجموعهI است .)

D_j^t : تقاضای تولید شده بوسیله‌ی گره‌ی j در دوره‌ی t

Q_p : ظرفیت وسیله‌ی نوع p

M_p : ماکزیمم تعداد وسایل نوع p که در هر محل جایز شمرده شده است.

n_{ip}°: تعداد وسایل نوع p که در شروع افق طرح‌ریزی در محل P وجود دارند.

S_p^t : مقدار کالای بازیافتی هنگامی که وسیله‌ی نوع p در دوره‌ی t متوقف شده است.

فاکتورهای هزینه که در مدل به کار رفته‌اند ، به قرار زیر هستند :

F_{ip}^t : هزینه‌ی تأسیس یک وسیله‌ی نوع p که در محل i در دوره‌ی t باز شده است.

U_p^t : هزینه‌ی هر واحد از تقاضای برآورد شده توسط وسیله نوع p در دوره‌ی t. فرض می‌شودکه انواع وسایل به ترتیب افزایش هزینهمرتب شده اند.

C_{ij}^t : هزینه‌ی حمل و نقل برآوردن یک واحد تقاضا در گره‌ی j توسط یک وسیله در محل i در دوره‌ی t (این هزینه مستقل از نوع وسیله است).

متغیرهای تصمیم در این مدل عبارتند از :

X_{ijp}^t : کسری از تقاضای مشتری j در زمان t که توسط وسیله p در محل i برآورده شده است.

$$y_{ip}^t = \begin{cases} 1 & \text{اگر وسیله نوع } p \text{ در محل } i \text{، در دوره } t \text{ قرار داده شده باشد .} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون مدل ریاضی مسئله را معرفی می کنیم :

$$Min \quad Z_{IP} = \left\{ \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{p=1}^{|P_i|} C_{ij}^{t} \; D_{ij}^{t} \; X_{ijp}^{t} \right. \qquad (۱-۵-۱)$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{j=1}^{|J|} F_{ip}{}^{t} \; y_{ip}{}^{t} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{p=1}^{|P_i|} U_{p}^{t} \; X_{ijp}{}^{t} \; D_{j}^{t} \right\}$$

$$S.t. \quad \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{p=1}^{|P_i|} X_{ijp}{}^{t} = 1 \quad for \;\; all \;\; j,t \qquad (۲-۵-۱)$$

$$\sum_{j=1}^{|J|} D_{j}{}^{t} X_{ijp}{}^{t} \le (\sum_{r=1}^{t} Q_p \; y_{ip}{}^{r}) + n_{ip}^{\circ} Q_p \quad for \;\; all \;\; i,p,t \qquad (۳-۵-۱)$$

$$y_{ip}^{t} \in \{0,1\} \quad for \;\; all \;\; i,t,p \qquad (٤-۵-۱)$$

$$X_{ijp}^{t} \ge 0 \quad for \;\; all \;\; i,j,p,t \qquad (۵-۵-۱)$$

(توجه کنیم که برای مجموعه دلخواه X ، |X| بیانگر تعداد اعضاست.)

معادله‌ی (۱-۵-۱) بیانگر تابع هدف است که به ترتیب از چپ به راست ، مجموع سه هزینه را کمینه می‌کند :

(الف) هزینه‌ی عملیانی وابسته به حجم تقاضای مشتری که توسط وسایل تأسیس شده برآورده می‌شوند ؛

(ب) هزینه‌ی تأسیس برای جادادن وسایل ؛

(پ) هزینه حمل و نقل تحویل تقاضاها به وسایل .

معادله‌ی (۱-۵-۲) بیانگر قیودی است که مستلزم تقاضا درهر گره‌اند که باید برآورده شود .

رابطه ی (۱-۵-۳) نشان می‌دهد که کل تقاضای برآورد شده توسط هر نوع وسیله در هر دوره نباید متجاوز از کل ظرفیت موجود از آن نوع در این دوره باشد .

رابطه ی (۱-۵-٤) نشان می‌دهد که $y_{ip}{}^{t}$ فقط مقادیر صحیح ۰ یا ۱ را می‌پذیرد .

رابطه ی (۱-۵-۵) نشان می‌دهد که X_{ijp}^{t} مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند .