بسم الله الرحمن الرحیم

باسمه تعالی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب سید جمال بخشایش متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن ها استفاده شده است، مطابق مقررات، ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه ی حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران است.

نام و نام خانوادگی دانشجو:
سید جمال بخشایش
امضاء

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

تقریب گالرکین ناپیوسته برای معادلات انتگرال ولترای نوع اول

نگارش:

سید جمال بخشایش

استاد راهنما: دکتر حمید صفدری

استاد مشاور: دکتر رضا ملاپور اصل

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی

مهر ۱۳۹۳

تقدیم به پدر و مادرم

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است
و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید.

چکیده

با انگیزه دهی مشکلِ در حال توسعه ی روش های دقیق و روش های زمان ــ گامیِ پایدار، برای معادلات پتانسیلی تک لایه ای، برای پراکندگی صوتی یک سطح، ما نتایج همگرایی جدیدی را حاضر کردیم که برای تقریب های چندجمله ای تکه ای گالرکین ناپیوسته DG از یک معادله ی انتگرالی ولترای نوع اول از نوع هسته ی پیچشی است، که هسته ی K هموار و در $K(۰) \neq ۰$ صدق می کند. ما نشان می دهیم که یک تقریب DG درجه ی mام همگرایی کلی مرتبه ی m را می دهد، هنگامی که m زوج باشد. یک فوق همگرایی محلی از یک مرتبه بالاتر نیز وجود دارد.(برای مثال، مرتبه ی $m+۱$ هنگامی است که m فرد است و مرتبه ی $m+۲$ هنگامی است که m زوج است.) اما در حالت مرتبه زوج، فوق همگرایی هنگامی وجود دارد که جواب دقیق u معادله، در $u^{m+۱}(۰) = ۰$ صدق کند. ما هم چنین نتایج آزمون های عددی را آورده ایم که نشان می دهد که میزان همگرایی تئوریکی، بهینه است.

کلمات کلیدی:

معادلات انتگرالی ولترای نوع اول ، تقریب گالرکین ناپیوسته ، همگرایی کلی ، فوق همگرایی محلی

فهرست مطالب

فهرست مطالب ب

فهرست جداول ث

فهرست تصاویر ج

۱ مقدمه ای بر معادلات انتگرال ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ معادله ی انتگرالی ۳

۳.۱ دسته بندی معادلات انتگرال ۴

۱.۳.۱ معادلات انتگرالی فردهلم ۴

۲.۳.۱ معادلات انتگرالی ولترا ۴

۳.۳.۱ معادلات انتگرالی منفرد ۷

۴.۳.۱ معادلات انتگرو دیفرانسیل ۸

۵.۳.۱ معادلات انتگرالی فردهلم ــ ولترا ۸

۴.۱ انواع هسته در معادلات انتگرالی ۹

۱.۴.۱ هسته ی متقارن ۹

۲.۴.۱ هسته ی پیچشی ۹

۳.۴.۱ هسته ی تفکیک پذیر ۹
۴.۴.۱ هسته ی $L^{۲}$ ۹
۵.۱ حل یک معادله انتگرال ولترای نوع اول با هسته ی پیچشی ۱۰
۶.۱ مقدمه ای بر پایان نامه ۱۱

۲ چند جمله ای های لژاندر و خواص آن ۱۳
۱.۲ مقدمه ۱۴
۲.۲ چند جمله ای های متعامد ۱۵
۳.۲ چند جمله ای های لژاندر ۱۶
۴.۲ خواص مهم چند جمله ای های لژاندر ۱۷

۳ تقریب گالرکین ناپیوسته DG ۱۹
۱.۳ استخراج تقریب گالرکین ناپیوسته ۲۰
۱.۱.۳ خصوصیات ماتریس های ضرایب ۲۳
۲.۳ معادله ای برای خطای تقریب DG ۲۴

۴ آنالیز همگرایی و فوق همگرایی تقریب ۳۱
۱.۴ مورد خاص $K(t) \equiv ۱$ ۳۲
۱.۱.۴ معادله ی خطا ۳۲
۲.۱.۴ همگرایی هنگامی که $K \equiv ۱$ ۳۴
۳.۱.۴ فوق همگرایی هنگامی که $K \equiv ۱$ ۳۶
۲.۴ همگرایی و فوق همگرایی برای K عمومی ۳۹
۱.۲.۴ ابزارهایی برای اثبات همگرایی ۴۰

۲.۲.۴ همگرایی و فوق همگرایی برای K عمومی با m فرد ۴۱

۳.۲.۴ همگرایی و فوق همگرایی برای K عمومی با m زوج ۴۵

۵ نتایج عددی ۵۰

۱.۵ الگوریتم حل مثال۱ . . . . ۵۲

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۵۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۵۹

مراجع ۶۱

فهرست جداول

۱.۵ آزمون حالت ها و خصوصیات جواب دقیق (۱.۵) در $t=۰$ ۵۲

فهرست تصاویر

۱.۵ نتایج مثال ۱ در جدول ۱.۵ برای تقریب DG (چند جمله ای های تکه ای ناپیوسته) از درجه ی ۵ : $m = ۰$ ۵۲

۲.۵ ماکزیمم خطاها در نقاط فوق همگرایی برای مثال های ۵ $-$ ۲ در جدول ۱.۵ برای سه مرتبه پایین تر روال های درجه زوج. خط های دش خطای فوق همگرایی بهینه ی $O(\Delta t^{m+۲})$ را نشان می دهند. یک میزان نیمه بهینه بدست آمده وقتی که $u^{(m+۱)}(۰) \neq ۰$ باشد. ۵۳

۳.۵ الگوریتم مثال۱ ــ جواب دقیق معادله ی ۱.۵ . . . . ۵۳

۴.۵ الگوریتم جواب تقریبی مثال ۱ ــ اجرای تقریب گالرکین ناپیوسته چند جمله ای های تکه ای ۵۴

فصل ۱

مقدمه ای بر معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

عبارت معادلات انتگرالی برای اولین بار در سال ۱۸۸۸ توسط بویس ریموند[1] به معادلاتی که تابع $u(x)$ زیر علامت انتگرال در آن مجهول بود، پیشنهاد شد. در عمل لاپلاس [2] اولین کسی بود که بدون استفاده از این اسم در سال ۱۷۸۲ برای حل معادلات تفاضلی خطی و معادلات دیفرانسیل، تبدیل انتگرالی $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} f(x)dt$ را مطرح نمود.

فوریه [3] در سال ۱۸۲۲ در حل مسایل حرارت، تئوری تبدیلات فوریه ی سینوسی و کسینوسی را شکل داد. در سال ۱۸۲۶ آبل [4] نیز در حل مسایل مکانیکی، معادله ی انتگرالی آبل را مطرح کرد. در آن سال پواسن [5] در مطالعه ی نظریه ی مغناطیس و در سال ۱۸۳۲ لیوویل در حل دسته ی خاصی از معادلات انتگرال، با معادلات انتگرالی مواجه شدند و یک قدم بزرگ در راه توسعه ی معادلات انتگرال برداشته شد.

نیومن[6] در سال ۱۸۷۰ مسأله ی دیریکله (تعیین تابع f روی سطح s که در معادله ی لاپلاس صدق می کند) را به یک معادله ی انتگرالی تبدیل نمود. در سال ۱۸۹۶ پوانکاره[7] معادله انتگرالی را در رابطه با یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مطرح نمود.

در سال ۱۸۹۶ دانشمندی ایتالیایی به نام ولترا[8] برای اولین بار نظریه ی عمومی معادلات انتگرال را ارایه داد. در حدود سال ۱۹۰۰ نیز ریاضیدانی سوئدی به نام فردهلم[9] یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال خطی به صورت

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt \qquad a \leq x \leq b$$

Reymond Bois[1]
Laplace[2]
Fourier[3]
Abel[4]
Poison[5]
Newman[6]
Poincare[7]
Volterra[8]
Fredholm[9]

را ارایه داد که که نوع خاصی از معادلات ولترا است. تحقیقات وی منجر به ارایه ی قضایای فردهلم گردید که از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند.

هیلبرت[۱۰] در تحقیقاتش بسیاری از مسایل ریاضی ـ فیزیک را به کمک معادلات انتگرالی حل کرد. وی معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزیی با مقادیر اولیه و مرزی را به معادلات انتگرال تبدیل کرد و به این ترتیب حرکتی نو در حل این گونه معادلات به وجود آمد.

در حدود سال ۱۹۵۰ هرمن ویل[۱۱] تحقیقات زیادی را در ارتباط با این که به ازای چه مقادیری از λ معادله انتگرال جواب دارد، انجام داد. از آنجا که همه ی معادلات انتگرال را نمی توان به صورت تحلیلی حل کرد، لذا به تدریج روش های تقریبی و عددی برای حل این معادلات به کار گرفته شد.

۲.۱ معادله ی انتگرالی

معادله ی انتگرالی معادله ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ در زیر یک علامت انتگرال ظاهر شود. یک نمونه از یک معادله ی انتگرالی که در آن $u(x)$ تابعی مجهول است، به صورت

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۱.۱)$$

است. و به شکل کلی زیر می توان در نظر گرفت؛

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۲.۱)$$

که $f(x)$ تابعی معلوم، $k(x,t)$ تابعی دو متغیره از x و t که هسته یا کرنل معادله ی انتگرال نامیده می شود نیز تابعی معلوم، $h(x)$ نیز تابعی معلوم هست. $\alpha(x)$ و $\beta(X)$ حدود انتگرال، λ ضریب ثابت و $u(x)$ تابعی مجهول است. هدف پیدا کردن تابع مجهول $u(x)$ که در معادله ی ۲.۱ صدق کند.

Hilbert[۱۰]
Weyl Hermann[۱۱]

۳.۱ دسته بندی معادلات انتگرال

معادلات انتگرالی را به دو دسته و گروه معادلات انتگرالی فردهلم و ولترا تقسیم می کنیم:

۱.۳.۱ معادلات انتگرالی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرالی فردهلم، که در آن ها حد پایین و بالای انتگرال گیری معادله ی ۲.۱ اعداد مثبت a و b هستند به صورت زیر است؛

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad a \leq x, t \leq b \tag{۳.۱}$$

معادله ۳.۱ را خطی می گویند، زیرا تابع مجهول $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر شده است یعنی با توان ۱ آمده است. بر حسب اینکه $h(x)$ کدام یک از مقادیر زیر را انتخاب کند، معادلات انتگرالی فردهلم به دو دسته ی عمده تقسیم می شوند:

۱. زمانی که $h(x) = ۰$ باشد، معادله ی ۳.۱ به معادله ی زیر تبدیل می شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = ۰ \tag{۴.۱}$$

که این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می نامند.

۲. زمانی که $h(x) = ۱$ باشد، معادله ی ۳.۱ به معادله ی زیر تبدیل می شود:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{۵.۱}$$

که این معادله را معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم می نامند.

۲.۳.۱ معادلات انتگرالی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرالی ولترا مانند معادلات انتگرالی فردهلم می باشد با این تفاوت که در آنها در معادله ی ۳.۱ حد بالای انتگرال گیری به جای عدد ثابت b به صورت یک مقدار مجهول

بر حسب x به فرم زیر می باشد:

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۶.۱)$$

باید توجه کرد که معادله ی ۶.۱ را می توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به طوری که کرنل $k(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود. معادلات انتگرالی ولترا را می توان با توجه به مقدار $h(x)$ به دو دسته ی عمده تقسیم کرد:

۱. در حالتی که $h(x) = ۰$ باشد، در این صورت معادله ی ۶.۱ به معادله ی زیر تبدیل خواهد شد:

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = ۰ \qquad (۷.۱)$$

که این معادله را، معادله انتگرال ولترای نوع اول می نامند.

۲. در حالی که $h(x) = ۱$ باشد، معادله ی ۶.۱ به معادله ی زیر تبدیل می شود:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۸.۱)$$

که این معادله را معادله انتگرالی ولترای نوع دوم می نامند.

در صورتی که در معادله ی ۶.۱ تابع $f(x) = ۰$ باشد، معادله انتگرالی ولترا را همگن و در غیر این صورت ناهمگن می نامند.

- تبدیل معادله ی انتگرالی ولترای نوع اول به نوع دوم:

با مشتق گیری از معادله ی نسبت به x می یابیم:

$$\frac{d}{dx}f(x) + \lambda \frac{d}{dx}\int_a^x k(x,t)u(t)dt = ۰$$

$$f'(x) + \lambda k(x,t)u(t) + \lambda \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}k(x,t)u(t)dt = ۰$$

و داریم؛

$$u(x) = \frac{f'(x)}{\lambda' k(x,x)} - \frac{1}{k(x,x)} \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} k(x,t) u(t) dt$$

که به یک معادله انتگرالی ولترای نوع دوم است.

با توجه به معادلات ۳.۱ تا ۸.۱ می توان نتیجه گیری های زیر را ارایه نمود:

۱. ساختمان معادلات فردهلم و ولترا:

در معادلات انتگرالی ولترا و فردهلم نوع اول، تابع مجهول $u(x)$ به طور خطی زیر علامت انتگرال ظاهر می شود. اما در مورد معادلات انتگرالی ولترا و فردهلم نوع دوم، تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم در خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می شود.

۲. حدود انتگرال گیری:

در معادلات انتگرالی فردهلم، انتگرال گیری روی یک فاصله ی متناهی با حدود ثابت انجام می شود. اما در معادلات انتگرالی ولترا حداقل یکی از حدود فاصله ی انتگرال گیری متغیر است و معمولاً حد بالای انتگرال گیری به صورت متغیر ظاهر می شود.

۳. خاصیت خطی بودن:

تابع مجهول $u(x)$ در معادله انتگرالی ولترا و فردهلم در زیر علامت انتگرال با توان یک ظاهر می شود اما زمانی که به جای $u(x)$ عبارتی مانند $F(u(x))$ داشته باشیم، معادلات انتگرال غیر خطی فردهلم و ولترا خواهیم داشت.

در زیر مثال هایی از معادلات انتگرال غیر خطی آورده شده است:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) u^2(t) dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x,t) cos(u(t)) dt$$

در این مثال ها به جای $u(x)$ به ترتیب $u^{۲}(t)$ و $cos(u(t))$ آمده است.

۴. منشأ ظهور معادلات انتگرال:

باید به این نکته ی مهم توجه کرد که معادلات انتگرال در بسیاری از مسایل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می شود. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش معادلات دیفرانسیل هم به کار می روند. به طوری که اگر معادلات دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مسأله ی مقدار مرزی باشد آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می شود از نوع فردهلم و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسأله ی مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله ی حاصل یک معادله ی انتگرالی ولترا خواهد بود. [۱۰]

بر حسب اینکه معادله ی انتگرال از چه نوع مسأله ای ظاهر می شود، روش ها و ایده های مختلفی برای تعیین جواب معادله ی انتگرال به کار برده می شود.

۵. خاصیت همگن بودن:

اگر در معادله ی انتگرال فردهلم نوع دوم ۵.۱ و معادله انتگرالی ولترای نوع اول ۸.۱ ، شرط $f(x) = ۰$ برقرار باشد، آنگاه معادله ی حاصل را یک معادله انتگرالی همگن می نامند. در غیر این صورت معادله ی مورد نظر را یک معادله انتگرالی غیر همگن می نامند.

۳.۳.۱ معادلات انتگرالی منفرد

یک معادله انتگرالی را منفرد می نامند اگر انتگرال موجود در معادله ناسره باشد، این حالت معمولاً زمانی رخ می دهد که فاصله ی انتگرال گیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته ی معادله در یک یا چند نقاط از بازه ی مورد نظر یعنی $a \leqslant x \leqslant b$ بی کران باشد.

به عنوان نمونه یکی از ساده ترین معادلات انتگرالی منفرد، معادله انتگرال آبل هست که به

صورت زیر نمایش داده می شود:

$$f(x) = \int_{۰}^{x} \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt$$

۴.۳.۱ معادلات انتگرو دیفرانسیل

ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ در حال مطالعه ی موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرو دیفرانسیل مواجه شد. در این گونه معادلات تابع مجهول $u(t)$ در دو طرف ظاهر می شود. در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی نمایان می شود.

تعدادی از پدیده ها در فیزیک و بیولوژی در قالب این نوع معادلات انتگرو دیفرانسیل ظاهر می شوند. البته این گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله ی انتگرال هم نمایان می شوند.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرو دیفرانسیل آورده شده است:

$$u''(x) = -x + \int_{۰}^{x} (x-t)u(t)dt \qquad u(۰) = ۰, u'(۰) = ۱$$

$$u'(x) = ۱ - \frac{۱}{۳}x + \int_{۰}^{۱} xtu(t)dt \qquad u(۰) = ۱$$

معادله انتگرالی اولی را معادله انتگرو دیفرانسیل ولترا و معادله ی دومی را معادله انتگرو دیفرانسیل فردهلم می نامند. این نام گذاری بر اساس حدود انتگرال گیری انجام شده است.

۵.۳.۱ معادلات انتگرالی فردهلم ـ ولترا

معادله انتگرالی فردهلم ـ ولترا معادله ای است که تابع مجهول $u(t)$ زیر دو نماد انتگرال گیری قرار گیرد، معادله ی زیر از این نوع می باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda_{۱} \int_{a}^{b} k_{۱}(x,t)u(t)dt + \lambda_{۲} \int_{۰}^{x} k_{۲}(x,t)u(t)dt$$

مثال زیر یک نمونه از این معادلات می باشد:

$$u(x) = -xe^x + \int_0^1 u(t)dt + \int_0^x tu(t)dt$$

۴.۱ انواع هسته در معادلات انتگرالی

در همه ی بحث های مربوط به حل یک معادله ی انتگرال، هسته نقش مهمی دارد. به سبب اهمیت آن چند نمونه را معرفی می کنیم.

۱.۴.۱ هسته ی متقارن

هسته ی $k(x,t)$ را متقارن [۱۲] گوییم هرگاه $k(x,t) = k(t,x)$ باشد.

۲.۴.۱ هسته ی پیچشی

هسته ی $k(x,t)$ را پیچشی [۱۳] گوییم هر گاه بتوان آن را به صورت $k(x,t) = k(x-t)$ تبدیل نمود.

۳.۴.۱ هسته ی تفکیک پذیر

هسته ی $k(x,t)$ را جدایی پذیر یا تفکیک پذیر[۱۴] گوییم هرگاه توابع $i = 1, 2, ..., n$ $\qquad a_i(x), b_i(t)$ موجود باشند، به طوری که $k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(t)$

۴.۴.۱ هسته ی L^2

k را یک هسته ی L^2 (مربع انتگرال پذیر) گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt < \infty$$

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 dx < \infty \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

---

[۱۲] Symmetric
[۱۳] Convolution
[۱۴] Separable

$$\int_a^b |k(x,t)|^۲ dt < \infty \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

۵.۱ حل یک معادله انتگرال ولترای نوع اول با هسته ی پیچشی

معادله ی

$$f(x) = \int_۰^x k(x-t)u(t)dt \qquad x > ۰$$

یک معادله انتگرال ولترای نوع اول با هسته ی پیچشی است که با استفاده از تبدیلات لاپلاس

$$U(s) = \int_۰^\infty e^{-st}u(t)dt$$

$$F(s) = \int_۰^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

$$K(s) = \int_۰^\infty e^{-sx}k(x)dx$$

قابل حل است. با به کار بردن قضیه ی پیچشی برای تبدیلات لاپلاس

$$K(s)U(s) = L\left\{\int_۰^x k(x-s)u(s)ds\right\}$$

که در آن L نمایش عملگر انتگرال لاپلاس

$$L = \int_۰^\infty e^{-sx}dx$$

است می یابیم؛

$$F(s) = K(s)U(s)$$

و از آنجا

$$u(x) = L^{-۱}\left\{\frac{F(s)}{K(s)}\right\}$$