بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

رساله  برای دریافت درجه دکتری
رشته ریاضی کاربردی  گرایش تحقیق در عملیات

# الگوریتم‌هایی برای مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی و کسری تعمیم‌یافته

مؤلف:

عزت  ولی پور

اساتید راهنما:

دکتر ماشاالله ماشین چی

دکتر محمد علی یعقوبی

آذر ماه ۱۳۹۲

این رساله به عنوان یکی از شرایط احراز درجه دکتری به

**بخش ریاضی**

**دانشکده ریاضی و رایانه**

**دانشگاه شهید باهنر کرمان**

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو: عزت ولی پور

استاد راهنمای اول: دکتر ماشاالله ماشین چی

استاد راهنمای دوم: دکتر محمد علی یعقوبی

داور ۱: دکتر اسماعیل خرم

داور ۲: دکتر حسین محبی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده در جلسه دفاع: ؟

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده: دکتر محمد علی یعقوبی

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

# قدردانی

حمد و سپاس بیکران خداوندگار حکیم را که زیور خرد بر آدمیان ارزانی داشت تا راه زندگی را با نیروی تعقل و دانش‌اندوزی بپیمایند.

سرشارترین سپاس‌های من و درود و سلام بیکرانه‌ی خداوند تقدیم پدر، مادر و تمام اعضای خانواده‌ام. آنان که همواره یاریم کردند و پشتگرمی‌ام بودند.

مراتب سپاس خویش را تقدیم محضر اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر ماشی چی و جناب آقای دکتر یعقوبی می‌نمایم که با بررسی دقیق مطالب و راهنمایی‌های مشفقانه‌شان قوت قلب بنده در مراحل پژوهش بوده‌اند. همچنین سپاس‌های صمیمانه خود را نسبت به اساتید بزرگوارم سرکار خانم دکتر مارتینِ و سرکار خانم دکتر کاروزی اعلام می‌نمایم.

بر خود لازم می‌دانم که از اساتید گرانقدر آقایان دکتر خرم، دکتر محبی و دکتر محسنی مقدم که بار داوری این رساله را بر دوش گرفتند، سپاسگذارم.

به یاد و بزرگداشت مرحومان مهندس علیرضا افضلی‌پور و سرکار خانم فاخره صبا که تمام وجودشان را وقف دانشگاه شهید باهنر کرمان نمودند.

عزت ولی پور

آذر ماه ۱۳۹۲

## چکیده

در این رساله دسته‌های مهمی از مسایل برنامه‌ریزی کسری تحت عناوین برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی و دسته‌ای از مسایل برنامه‌ریزی کسری تعمیم یافته مورد توجه قرار می‌گیرند. در فصل اول روش‌های گوناگون خطی ساز موجود از مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی مد نظر قرار گرفته و نواقص آن‌ها بررسی شده‌اند. در واقع نشان داده شده است که هیچ یک از روش‌های خطی ساز موجود نمی‌توانند برای حل این قبیل مسایل کارآمد باشند. با توجه به ناکارآمدی روش‌های خطی ساز موجود برای حل یک مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی در فصل دوم یک دیدگاه تکراری برای حل آن‌ها پیشنهاد شده است که فقط از مسایل برنامه‌ریزی خطی برای بدست‌آوردن نقاط کارا بهره می‌برد. همچنین همگرایی این دیدگاه ثابت شده است. مثال‌های عددی و مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی متنوع و به صورت تصادفی تولید شده‌ای نشان می‌دهند که این دیدگاه نسبت به برخی روش‌های موجود بهتر عمل می‌نماید.

در فصل سوم یک روش تکراری برای پیدا کردن یک تقریب گسسته از مجموعه‌ی غیرتسلطی یک مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی ارایه شده است. ثابت شده است که مجموعه‌ی غیرتسلطی حاصل از معیارهای کیفیت بسیار بالایی برخوردار می‌باشد. مجموعه‌ی حاصل یک $E$-تقریب از مجموعه‌ی غیرتسلطی است. بدین مفهوم که برای هر نقطه‌ی غیرتسلطی نقطه‌ای از این تقریب وجود دارد که هرگاه به اندازه‌ی بردار حساسیت $E$ افزایش داده شود بهتر از نقطه‌ی غیرتسلطی مورد نظر می‌باشد. علاوه بر این تقریب گسسته‌ی حاصل به صورت قابل قبولی کل مجوعه‌ی غیرتسلطی را پوشش می‌دهد.

فصل چهارم با کلاسی از مسایل برنامه‌ریزی کسری تعمیم یافته مواجه می‌شود که تابع هدف آن‌ها نسبت یک تابع آفینی به توان $p > 0$ از یک تابع آفینی دیگر و ناحیه شدنی آن یک چند وجهی می‌باشد. خصوصیات نظری مساله و بویژه دامنه‌ی ماکسیمال مقعرنمایی آن بررسی شداند. در نهایت وابسته به مقعرنما بودن یا نبودن تابع هدف روی ناحیه‌ی شدنی، الگوریتم‌های حل متفاوتی ارایه شده است.



**واژگان کلیدی:** برنامه‌ریزی چند هدفی، برنامه‌ریزی کسری، برنامه‌ریزی کسری خطی، برنامه‌ریزی کسری تعمیم یافته، جواب کارا، جواب $\varepsilon$-کارا، جواب غیرتسلطی، $E$-تقریب، روش تکراری، روش دنباله‌ای شبه سیمپلکس.

## پیش گفتار

دنیای امروز دنیای منابع محدود و اهداف بیشمار است. مسلم این است که بشر باید به بهترین راه دستیابی به آرمان‌هایش بر اساس همین منابع محدود بیاندیشد و تمام تلاش خود را جهت اتخاذ بهترین تصمیم‌ها به کار برد. این مهم نه بر مبنای آزمون و خطا که در بسیاری از زمینه‌ها باید بر مبنای روش‌های بهینه سازی جدید استوار شود.

از طرفی بالا بردن بازده و یا بهره‌وری همواره یکی از دغدغه‌های مهم فعالیت‌های انسانی اعم از علوم انسانی، فیزیک، مهندسی، پزشکی، اقتصاد و غیره بوده است. در بیشتر مواقع به محض آنکه مدل ریاضی بازده مورد توجه قرار گیرد، نتیجه حاصل بهینه کردن یک یا چند کسر می‌باشد که نسبت خروجی یا خروجی‌های فعالیت به ورودی یا ورودی‌های آن می‌باشند. به عنوان نمونه در بسیاری ازفعالیت‌ها بهینه نمودن نسبت‌های هزینه/زمان، خروجی/کارمند، سود خالص/درآمد و غیره [۲، ۱۹، ۲۸، ۴۶، ۵۰، ۵۲] از اهداف مهم بشمار می‌آیند. بنابراین در شاخه‌های جدید بهینه سازی و تحقیق در عملیات، بررسی و حل دسته‌های گوناگون برنامه‌ریزی کسری اهمیت بسزایی می‌یابند.

نشان داده شده است که مسایل برنامه‌ریزی کسری حتی در حالت‌هایی که در تابع کسری صورت و مخرج خطی می‌باشند، محدب نیستند. از این رو مواجه با یک مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری، تحلیل و یافتن راه حل مناسب برای حل آن معمولا بسیار مشکل می‌باشد. این مسایل معمولا در زمره‌ی مسایل $NP$-سخت قرار می‌گیرند و دارای الگوریتم‌هایی با پیچیدگی زمانی بالا می‌باشند [۸، ۵۳، ۲۸]. البته ذکر این نکته ضروری می‌نماید که برخی از دسته‌های برنامه‌ریزی کسری را می‌توان در رده‌ی مسایل برنامه‌ریزی محدب تعمیم یافته بررسی نمود و همواره این دو شاخه از مسایل برنامه‌ریزی از یکدیگر بهره برده اند [۴۰].

نظر به اهمیت بسیار زیاد مسایل برنامه‌ریزی کسری و مشکلات موجود برای حل آن‌ها، این رساله به دو دسته‌ی خاص از این مسایل خواهد پرداخت. در فصل اول، بعد از معرفی برخی مفاهیم و کلیات مورد نیاز در رساله، مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی معرفی می‌شوند. از آنجا که روش‌های بسیار کارایی برای حل این مساله در حالت تک هدفی وجود دارند به طور بسیار مختصر برخی از روش‌های مورد نیاز در رساله مطرح می‌شوند. سپس به طور خاص مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی مد نظر قرار خواهد گرفت. زیرا با گذشت ۳۰ سال از عمر آن‌ها و اهمیت کاربردی آن‌ها متاسفانه هنوز روش کاملا کارآمدی برای حلشان

وجود ندارد. در ادامه فصل اول، مهمترین دیدگاه‌های خطی‌ساز موجود برای حل این مساله مرور می‌شوند. همچنین نشان داده شده است که علی‌رغم خطی بودن صورت و مخرج تمام کسرها و علی‌رغم وجود روش خطی ساز برای حالت تک هدفی (روش چارنز و کوپر [۱۴]) هیچ کدام از روش‌های خطی ساز موجود برای حل مساله‌ی چند هدفی موفق عمل نمی‌کنند. در راستای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی، خطی بودن صورت و مخرج این کسرها پژوهشگران را تشویق به استفاده از تفاضل مجموع وزن‌دار صورت و مخرج کسرها نموده است. اما در فصل اول ثابت شده است که این دیدگاه هرگز نمی‌تواند در پیدا کردن جواب‌های کارا کارآمد باشد.

کرنبلوس و استویر [۳۳] نشان داده اند که مجموعه‌ی جواب‌های کارای یک مساله‌ی MOLFP در مقایسه با یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی دارای خواص نظری چندان مطلوبی نیست. حتی لزوما بسته نیست که این امر باعث شده است پیدا کردن یک نقطه‌ی کارا از آن، مساله‌ی دشواری باشد. فصل دوم یک روش تکراری همگرا برای حل مساله‌ی MOLFP ارایه می‌دهد که فقط از مسایل برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن جواب‌های کارا از دسته‌ی مزبور بهره می‌برد. سپس این روش با برخی از بهترین روش‌های موجود برای پیدا کردن جواب‌های کارا از مساله‌ی MOLFP مقایسه می‌گردد. علاوه بر این بخشی از تجربیات عددی در استفاده از روش پیشنهادی و سایر روش‌های موجود ارایه گردیده است. در واقع نشان داده شده است که الگوریتم موجود دارای ساختار مناسبتر و تعداد تکرارهای بسیار کمتر در مقایسه با برخی روش‌های موجود می‌باشد.

نظر به اینکه در عمل ممکن است تصمیم گیرنده به بیش از یک نقطه‌ی کارا برای اتخاذ تصمیم مناسب نیاز داشته باشد، فصل سوم روشی جهت یافتن یک تقریب گسسته از مجموعه‌ی غیرتسلطی از یک مساله‌ی MOLFP پیشنهاد می‌دهد. این روش به نحوی طراحی شده است که مجموعه‌ی تقریبی حاصل از معیارهای کیفیت بالایی برخوردار باشد. ثابت شده است که مجموعه‌ی تقریبی حاصل یک $E$-تقریب از مجموعه‌ی غیرتسلطی است که $E$ می‌تواند توسط تصمیم گیرنده کنترل شود. همچنین نشان شده است که این روش هیچ اطلاعات زایدی تولید نمی‌کند و فاصله‌ی بین هر دو نقطه‌ی عضو آن حداقل به اندازه‌ی خطای مجاز $\delta_0$ است. علاوه براین ماکسیمم تعداد نقاط تولید شده را می‌توان کنترل نمود.

فصل ۴ به کلاس دیگری از مسایل کسری می‌پردازد که تابع هدف آن نسبت یک تابع خطی به توان $p$ تابع خطی دیگری می‌باشد. نشان داده شده است که تابع هدف مزبور لزوما

مقعرنما نیست و ممکن است دارای نقاط ماکسیمم موضعی باشد که لزوما مطلق نیستند. بنابراین خواص نظری مساله کاملا بررسی شده‌اند و دامنه‌ی ماکسیمال مقعرنمایی آن تعیین شده است. در نهایت با توجه به اینکه هیچ روش کاملا موفقی برای حل این مساله وجود ندارد یک روش شبه سیمپلکس برای حل آن ارایه شده است.

**توجه:** در این رساله تمامی قضیه‌ها، لم‌ها، نتیجه‌ها و گزاره‌هایی که فاقد نشانه‌ی «*» هستند، نتایج حاصل از تحقیقات مولف می‌باشند که توسط مولف ارایه و اثبات شده‌اند. اما سایر گزاره‌هایی که با علامت «*» در متن مشخص شده‌اند، نتایج تحقیقات سایر پژوهشگران هستند که در تحقیقات مولف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین هرگاه گزاره‌ای متعلق به مولف نبوده است، ارجاعات لازم داده شده است.

# فهرست مطالب


**فهرست تصاویر** م

**فهرست جداول** ن

**فصل ۱: اندیشه‌های پایه** ۱

۱-۱ تاریخچه مسایل برنامه‌ریزی کسری . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲

۱-۲ برنامه‌ریزی چند هدفی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۵

۱-۳ روش‌های اسکالرسازی مسایل برنامه‌ریزی چندهدفی . . . . . . . . . ۸

۱-۳-۱ روش مجموع وزن‌دار . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۹

۱-۳-۲ روش قیدی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۹

۱-۴ برنامه‌ریزی کسری . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۰

۱-۵ مروری اجمالی بر حل مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی . . . . . . . . ۱۲

۱-۵-۱ روش تغییر متغیر . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۳

۱-۵-۲ روش‌های پارامتری . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۴

۱-۶ برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی، دیدگاه‌های خطی ساز و نقایص آن‌ها ۱۵

۱-۶-۱ روش خطی ساز لوهاندجولا . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۶

۱-۶-۲ روش داتا و همکاران . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۹

۱-۶-۳ روش استانکو و پاپ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۰

۱-۶-۴ ناکارایی روش‌های خطی سازی موجود . . . . . . . . . . . . . . ۲۲

۱-۶-۵ روش خطی سازی چاکرابورتی و گوپتا و عدم کارایی آن . . . . . ۲۷

**فصل ۲: پیدا کردن جواب‌های کارای مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی** ۳۰

۲ - ۱ مقدمه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۱
۲ - ۲ روش کاستا برای پیدا کردن یک جواب کارا از مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۲
۲ - ۲ - ۱ الگوریتم کاستا و آلوز . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۶
۲ - ۳ روشی تکراری برای پیدا کردن جواب‌های کارای مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۷
۲ - ۴ مقایسه الگوریتم های ذکر شده . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۵
۲ - ۵ حل نمونه‌هایی از مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی . . . . . ۴۶
۲ - ۶ نتایج عددی حاصل از مسایل تولید شده‌ی تصادفی . . . . . . . . . . ۴۹

**فصل ۳: تقریب مجموعه‌ی غیرتسلطی مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی** ۵۲
۳ - ۱ مقدمه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۵۳
۳ - ۲ روش کابالرو و هرناندز . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۵۶
۳ - ۳ تقریبی از مجموعه‌ی غیرتسلطی مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی ۵۹
۳ - ۴ نتایج عددی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۶۷

**فصل ۴: کلاسی از مسایل برنامه‌ریزی کسری تعمیم یافته** ۷۲
۴ - ۱ مقدمه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۷۳
۴ - ۲ شرح مساله . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۷۳
۴ - ۳ دامنه‌ی ماکسیمال مقرنمایی . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۷۵
۴ - ۴ حالت $\mathbf{rank}[c, d] = 2$. خصوصیات نظری و روش‌های دنباله‌ای برای حل آن . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۷۸
۴ - ۴ - ۱ روش دنباله‌ای حل . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۸۰
۴ - ۵ حالت $\mathbf{rank}[c, d] = 1$، خواص نظری و روش دنباله‌ای . . . . . . . ۸۶
۴ - ۶ مثال‌های عددی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۸۹

**فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای تحقیقات بعدی** ۹۴

**مراجع** ۹۷

**پیوست آ: کدهای کامپیوتری** ۱۰۲
آ-۱ کد کامپیوتری الگوریتم ۲-۱ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۰۲
آ-۲ کد کامپیوتری الگوریتم ۲-۳ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۱۱۲

**واژه‌نامه فارسی به انگلیسی** ۱۱۶

**واژه‌نامه انگلیسی به فارسی** ۱۱۸

# فهرست تصاویر

۱-۱ ناحیه‌ی شدنی مساله‌ی (۱-۲۱) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۳

۲-۱ ناحیه‌ی شدنی مساله‌ی(۲-۱۲) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۵
۲-۲ ناحیه‌ی شدنی و مجموعه‌ی کارای مساله‌ی (۲-۱۳) . . . . . . . . . . ۴۷
۲-۳ درخت جستجو بخش‌های ایجاد شده برای حل مساله‌ی (۲-۱۳)توسط الگوریتم ۲-۱. ".Not Div" نشان دهنده‌ی تقسیم ناشدنی و "not divided" نشان دهنده‌ی صرف نظر شده می‌باشند. . . . . . . . . . . . . . . . ۴۸

# فهرست جداول


۱-۱ جدول پیامد مربوط به مساله برنامه‌ریزی چند هدفی (۱-۱) . . . . . . . ۶

۲-۱ نتایج حاصل از حل مساله‌ی (۲-۱۳)بوسیله‌ی الگوریتم ۲-۳ با شروع از نقاط غیر کارای تصادفی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۸

۲-۲ نتایج حاصل از حل مساله‌ی (۲-۱۴)بوسیله‌ی الگوریتم ۲-۳ با نقاط شروع متعدد تصادفی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۹

۲-۳ تعداد مسایل برنامه‌ریزی خطی لازم برای حل مسایل (۲-۱). $A$ یک ماتریس $10 \times 10$ است. "A" و "B" به ترتیب نشان دهنده‌ی "الگوریتم ۲-۳" و "الگوریتم "۲-۱ هستند. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۵۰

۳-۱ خلاصه‌ای از نتایج پیاده سازی الگوریتم ۳-۵ برای حل مساله‌ی (۳-۷)برای $k \geqslant 2$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۶۹

# فصل ۱

# اندیشه‌های پایه

## ۱-۱ تاریخچه مسایل برنامه‌ریزی کسری

کاربردهای برنامه‌ریزی خطی در شاخه‌های گوناگون فعالیت‌های انسانی بویژه اقتصاد مشهور هستند. اما در مقابل کاربردهای برنامه‌ریزی کسری بویژه قبل از دهه‌ی ۸۰ چندان شناخته شده نبودند. یکی از اولین کاربردهای برنامه‌ریزی کسری (البته دقیقا تحت این نام مطرح نشده است)، یک مدل تراز (تعادل) برای اقتصاد در حال توسعه است که توسط نیومن[۱] [۴۳] در سال ۱۹۳۷ مطرح شده است. در واقع نیومن یک مدل برنامه‌ریزی کسری ارایه نمود و از نظریه‌ی دوگان برای حل مساله‌ی نامحدب حاصل بهره برد. هر چند آسانتر بودن تحلیل و حل برنامه‌ریزی خطی منجر به مهجور ماندن برنامه‌ریزی کسری برای مدت‌ها و نادیده گرفتن کارهای اندک صورت گرفته در این زمینه مانند مدل نیومن گردید. اما پیشرفت‌های بیشتر نشان دادند که تمام مسایل دنیای واقعی نمی‌توانند در قالب‌های خطی گنجانده شوند و از این رو مسلما کاربردی از برنامه‌ریزی خطی محسوب نمی‌شوند. بنابراین مطالعات آکادمیک برنامه‌ریزی کسری با توجه به نیاز به ایجاد مدل‌های کارآمدتر برای حل مسایل دنیای واقعی شروع شدند.

استانکو[۲] فصل اول منوگراف خود [۵۲] را اختصاص به مثال‌هایی از کاربرد برنامه‌ریزی کسری برای مدل کردن مسایل اقتصادی، فیزیک (اپتیک) و ریاضی داده است و مراجع متنوع و مفیدی را ارایه نموده است. ایزبل و مارلو[۳] [۳۱] برنامه‌ریزی کسری را در مساله‌ی استراتژیک توزیع قدرت آتش در مواضع دشمن به کار بردند. برنامه‌ریزی‌های کسری به طور خاص در مسایل اقتصادی مفید هستند که فعالیت‌های گوناگونی منابع اقتصادی خاصی را به نسبت‌های متفاوتی مورد استفاده قرار می‌دهند در حالیکه شاخص‌های خاصی باید بهینه شوند. معمولا هدف این مسایل بهینه کردن نسبت بازده روی تخصیص، نسبت به محدودیت‌هایی است که روی در دسترس بودن کالاها ایجاد می‌شوند. مثال‌هایی از چنین موقعیت‌هایی، برنامه‌ریزی سازمانی و مالی (نسبت بدهی به دارایی خالص) برنامه‌ریزی تولید (موجودی کالا به فروش و صادرات به کارمند) برنامه‌ریزی بیمارستانی و سلامت (هزینه به مریض و پرستار به مریض) هستند، علاقه‌مندان می‌توانند به [۲۸، ۴۶] مراجعه کنند.

[۱] Neumann

[۲] Stancu

[۳] Isbell and Marlow

در سال ۱۹۶۲ چارنز و کوپر[۴] [۱۴] نشان دادند که با یک تغییر متغیر غیر خطی می‌توان یک مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی را به یک مدل خطی تقلیل داد. همچنین آن‌ها برای اولین بار واژه‌ی برنامه‌ریزی کسری[۵] را به کار بردند (قبل از آن با عناوین دیگری مانند برنامه‌ریزی هذلولوی[۶] [۴۱] از آن یاد می‌شده است).

نظر به اینکه مسایل دنیای واقعی معمولا بیش از یک آرمان دارند یکی از دسته‌های برنامه‌ریزی کسری که در ادامه به آن خواهیم پرداخت، مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفی (MOLFP)[۷] است که توابع هدف آن نسبت دو تابع آفینی و ناحیه‌ی شدنی آن یک چندوجهی می‌باشد.

مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی تک هدفی در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ میلادی به شدت مورد توجه محققان واقع گردید و کاربردها و روش‌های متنوع و کارآمدی برای حل آن ارایه شده است. به منظور حصول اطلاعات جامع، به منوگراف های [۱۹، ۵۰، ۵۲] و مراجع آن‌ها رجوع کنید. اما به دلیل سختی مضاعف مواجهه با مسایل چندهدفی شروع مطالعه‌ی MOLFP به سال‌ها بعد و آغاز دهه‌ی ۸۰ میلادی بازمی‌گردد [۱۵، ۳۳، ۳۴]. کرنبلوس و استویر [۳۳] یک روش شبه سیمپلکس را برای پیدا کردن مجموعه‌ی کارای ضعیف مسایل MOLFP به کار بردند. بنسُن[۸] [۳] نشان داد که روش آن‌ها همواره موفق نیست و تلاش نمود که دیدگاه آن‌ها را اصلاح نماید. البته کرنبلوس و استویر در [۳۴] روش دیگری را نیز برمبنای برنامه‌ریزی آرمانی برای حل این مسایل ارایه نمودند. نایکوسکی و زُلکیوسکی[۹] [۴۴] الگوریتمی را برای پیدا کردن نقاط راسی کارای مساله‌ی MOLFP ارایه دادند. متو و جُرجیووا[۱۰] [۴۲] بر پایه‌ی برنامه‌ریزی غیر خطی روشی را برای تقریب مجموعه‌ی کارای ضعیف پیشنهاد دادند. همچنین کابالرو و هرناندز[۱۱] [۴] یک تقریب گسسته از مجموعه‌ی کارای ضعیف این مسایل را محاسبه نمودند.

---

[۴] Charnes and Cooper

[۵] Fractional programming

[۶] Hyperbolic programming

[۷] Multiobjective linear fractional programmming

[۸] Benson

[۹] Nykowski and Zolkeiwski

[۱۰] Metev and Gueorguieva

[۱۱] Caballero and Hernandez

به جز روشهای فوق، دیدگاه‌های خطی ساز نیز با توجه به آفینی بودن صورت و مخرج توابع هدف دسته مزبور به شدت مورد توجه محققان بوده‌اند. لوهاندجولا[۱۲] [۳۷] بر پایه‌ی دیدگاه فازی یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی برای حل مسایل MOLFP به کار برد. اما داتا و همکاران[۱۳] [۲۲] نشان دادند که روش او دارای نواقصی است و همواره منجر به جواب‌های کارا نمی‌شود. سپس روش وی را اصلاح نمودند به طوریکه جواب‌های کارای ضعیف را تولید نماید. بدین منظور آن‌ها مجموع وزن‌دار تفاضل صورت و مخرج توابع هدف را در نظر گرفتند. علی رغم این‌ها استانکو و پاپ[۱۴] [۵۳] نشان دادند که روش داتا و همکاران همچنان دارای نواقصی است و شرط‌هایی را برای اصلاح آن مطرح نمودند. استانکو و پاپ ادعا نمودند که روش آن‌ها منجر به جواب‌های کارا می‌شود. اما در این فصل نشان داده شده است که متاسفانه این روش نیز کاملا موفق نیست و علاوه براین ثابت شده است که به طور کلی روش خطی سازِ اخیر هیچ‌گاه نمی‌تواند به نحوی اصلاح شود که موفق به حل مساله‌ی MOLFP شود. یعنی تفاضل مجموع وزن‌دار صورت و مخرج توابع هدف هرگز نمی‌تواند برای یافتن جواب‌های کارای مسایل MOLFP به کار رود هر چند در نگاه نخست دیدگاه درستی به نظر می‌رسد.

در روش مستقل دیگری چاکرابورتی و گوپتا[۱۵] [۱۳] مجددا با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی اقدام به خطی سازی مساله‌ی MOLFP نمودند که در این فصل نشان داده شده است روش آن‌ها نیز برای حل مساله‌ی MOLFP ناکارآمد است.

این فصل به صورت زیر دنبال خواهد شد. ابتدا در بخش‌های ۱-۲ و ۱-۳ یک مساله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفی درحالت کلی تعریف شده و مشهورترین روش‌های اسکالرسازی برای حل آن‌ها که در این رساله مورد نیاز است، معرفی می‌شوند. بخش‌های ۱-۴ و ۱-۵ مروری اجمالی بر مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری و برخی روش‌های حل مورد نیاز در رساله دارند. در نهایت بخش ۱-۶ مساله‌ی برنامه‌ریزی کسری چند هدفی را معرفی نموده و دیدگاه‌های خطی ساز موجود و نقایص آن‌ها را بررسی می‌نماید.

---

[۱۲] Luhandjula

[۱۳] Dutta et.al.

[۱۴] Stancu and Pop

[۱۵] Chakraborty and Gupta

## ۱-۲ برنامه‌ریزی چند هدفی

این بخش به معرفی مساله برنامه‌ریزی چند هدفی (MOP)[۱۶] در حالت کلی می‌پردازد و برخی قضایا و تعاریف مهم مورد استفاده در این رساله را یادآوری می‌نماید.

در این رساله یک مساله برنامه‌ریزی چند هدفی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & F(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))^T \\ s.t. \quad & x \in X, \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

که در آن $p \geqslant 2$، $X$ زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ و $T$ نشان دهنده‌ی ترانهاده بردار می‌باشد.

در ادامه برخی مفاهیم مورد استفاده در این رساله با توجه به مساله برنامه ریزی چند هدفی (۱-۱) معرفی می‌شوند:

- $X$ را ناحیه‌ی شدنی می‌گویند.
- $Y = \{y \in \mathbb{R}^p : \exists x \in X,\ y = F(x)\}$ را تصویر فضای شدنی می‌نامند.
- از آنجا که $X \subset \mathbb{R}^n$، بنابراین $\mathbb{R}^n$ را فضای تصمیم [۱۷] می‌گویند.
- با توجه به این که $Y \subset \mathbb{R}^p$، $\mathbb{R}^p$ فضای معیار یا هدف[۱۸] نامیده می‌شود.
- جدول پیامد[۱۹]:
  جهت محاسبه‌ی این جدول ابتدا هر یک از توابع هدف را به صورت جداگانه روی ناحیه‌ی شدنی بهینه نمایید. فرض کنید که $f(x^k) = \max_{x \in X} f_k(x)$. آن‌گاه جدول مورد نظر مانند جدول ۱-۱ می‌باشد.

به منظور مقایسه بردارها در فضای $\mathbb{R}^p$ در این رساله از ترتیب‌های زیر استفاده می‌شود. بردارهای $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^p$ را در نظر بگیرید:

- $y \geqq \bar{y}$ اگر و فقط اگر $y_i \geqslant \bar{y}_i$ برای $i = 1, \ldots, p$.

---

[۱۶] Multiobjective programming

[۱۷] Decision space

[۱۸] Criterion or objective space

[۱۹] Pay-off table

جدول ۱-۱: جدول پیامد مربوط به مساله برنامه‌ریزی چند هدفی (۱-۱)

| | $x^1$ | $x^2$ | $\dots$ | $x^{p-1}$ | $x^p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $f_1(x^1)$ | $f_1(x^2)$ | $\dots$ | $f_1(x^{p-1})$ | $f_1(x^p)$ |
| $f_2$ | $f_2(x^1)$ | $\ddots$ | $\dots$ | $\dots$ | $f_2(x^p)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f_{p-1}$ | $f_{p-1}(x^1)$ | $\dots$ | $\dots$ | $\ddots$ | $f_{p-1}(x^p)$ |
| $f_p$ | $f_p(x^1)$ | $f_p(x^2)$ | $\dots$ | $f_p(x^{p-1})$ | $f_p(x^p)$ |

- $\bar{y} \geq y$ اگر و فقط اگر $\bar{y}_i \geqslant y_i$ برای $i = 1, \dots, p$ و اندیسی مانند $j \in \{1, \dots, p\}$ وجود داشته باشد به طوریکه $y_j > \bar{y}_j$.

- $\bar{y} > y$ اگر و فقط اگر $\bar{y}_i > y_i$ برای $i = 1, \dots, p$.

بسط طبیعی تعریف جواب بهینه از مسایل برنامه‌ریزی تک هدفی به چند هدفی در تعریف ۱-۲-۱ مطرح شده است.

**تعریف ۱-۲-۱.** ([۲۳]) $x^*$ جواب بهین کامل مساله (۱-۱) می‌باشد هرگاه برای هر $x \in X$، $F(x^*) \geqq F(x)$. در این صورت $F(x^*)$ را نقطه‌ی ایده‌آل مساله‌ی (۱-۱) گویند.

البته نظر به اینکه در مسایل واقعی معمولا توابع در تضاد با یکدیگر هستند، جواب بهین کامل، که همزمان تمام توابع هدف را بهینه سازد، وجود ندارد. بدین جهت مفاهیم جدیدی از جواب‌های بهین برای مسایل چند هدفی تحت عنوان جواب‌های کارا، کارای ضعیف و $\varepsilon$-کارا تعریف شده‌اند.

**تعریف ۱-۲-۲.** ([۲۳]) $\bar{x} \in X$ یک جواب کارای مساله‌ی (۱-۱) نامیده می‌شود، هرگاه عضوی مانند $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوریکه $F(x) \geq F(\bar{x})$.

**تعریف ۱-۲-۳.** ([۲۳]) $\bar{x} \in X$ یک جواب کارای ضعیف مساله‌ی (۱-۱) نامیده می‌شود، هرگاه عضوی مانند $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوریکه $F(x) > F(\bar{x})$.

**تعریف ۱-۲-۴.** ([۳۶]) فرض کنید $\varepsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p) \geqq 0$. $\bar{x} \in X$ یک جواب $\varepsilon$-کارای مساله‌ی (۱-۱) نامیده می‌شود، هرگاه عضوی مانند $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوریکه

$F(x) \geq F(\bar{x}) + \varepsilon$.