بسم الله الرحمن الرحيم

کلیه امتیازهای این پایان‌نامه به دانشگاه بوعلی سینا تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب این پایان‌نامه در مجلات، کنفرانس‌ها و یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه بوعلی سینا یا استاد راهنمای پایان‌نامه و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت. درج آدرس‌های ذیل در کلیه مقالات خارجی و داخلی مستخرج از تمام یا بخشی از مطالب این پایان‌نامه در مجلات، کنفرانس‌ها و یا سخنرانی‌ها الزامی می‌باشد.

مقالات خارجی	………………..…….. Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.
مقالات داخلی	............، گروه ....، دانشکده ....، دانشگاه بوعلی سینا همدان.

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه:

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

حلقه های متناهی با خاصیت جابه جایی متعدی

استاد راهنما:

دکترغلامرضا صفاکیش همدانی

استاد مشاور:

دکتر علی محمدیان

پژوهشگر:

علی بختور

۱۳ مهر ماه ۱۳۹۰

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان‌نامه آقای علی بختور
کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

تحت عنوان:

حلقه های متناهی با خاصیت جابه جایی متعدی

Finite rings in which commutativity is transitive

به ارزش ۴ واحد در روز چهارشنبه مورخ ۱۳۹۰/۷/۱۳ساعت ۱۶-۱۴ در محل آمفی تئاتر(۱) و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزار گردید و با نمره ۱۹٫۳۳ و با درجه عالی ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران:

ردیف	سمت در هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/ دانشکده/ دانشگاه	محل امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر غلامرضا صفاکیش همدانی	استادیار- ریاضی- علوم- بوعلی سینا	
۲	استاد مشاور	دکتر علی محمدیان	استادیار- ریاضی- مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات	
۳	استاد مدعو	دکتر حمید محمدزاده	استادیار - ریاضی- علوم- علم و صنعت	
۴	استاد مدعو	دکتر مجتبی قربانی	استادیار- ریاضی- علوم- شهید رجائی	

تقدیم به

علاقه مندان به

دانش ریاضی

سپاس و ستایش خدای یگانه و مهربان را که به اینجانب این توفیق را عطا نمود که بتوانم این پروژه تحقیقاتی را با موفقیت به اتمام برسانم.

بر خود لازم می دانم که از زحمات و راهنمایی های مفید و موثر استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر غلامرضا صفاکیش قدردانی نمایم.

همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر علی محمدیان به خاطر همه زحماتی که در طول این مدت برای بنده کشیدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از کلیه اعضای خانواده ام به ویژه پدر و مادر مهربانم که در طول این سالیان برایم یاورانی بی همتا بودند تشکر ویژه دارم. در پایان از تمامی معلمین دلسوز و اساتید ارجمندم از دوران ابتدایی تا کنون و همه کسانی که در طول این دوران به بنده انرژی مثبت دادند سپاس گزاری می کنم.

دانشگاه بوعلی سینا

مدیریت تحصیلات تکمیلی

دانشگاه بوعلی سینا

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی

عنوان:

حلقه های متناهی با خاصیت جابه جایی متعدی

نام نویسنده: علی بختور

نام استاد راهنما: دکتر غلامرضا صفاکیش همدانی

نام استاد مشاور: دکتر علی محمدیان

دانشکده : علوم	**گروه آموزشی: ریاضی**	
رشته تحصیلی: ریاضی محض	**گرایش تحصیلی: جبر**	**مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد**
تاریخ تصویب: ۸۹/۳/۱۰	**تاریخ دفاع:۹۰/۷/۱۳**	**تعداد صفحات: ۷۱**

چکیده:

در این پایان نامه دو مفهوم ترکیبیاتی در ارتباط با جابه جایی بودن حلقه ها را مطالعه می کنیم.

اولین مفهوم، تعریف بعدی است: حلقه‌ی R را متعدی- جابه‌جایی می نامند هرگاه برای هر عنصر غیر مرکزی $c \in R$ و b و a، اگر ab=ba و bc=cb، آنگاه ac=ca. فرض کنید R یک حلقه‌ی یکدار متعدی– جابه‌جایی متناهی باشد. اگر R تحویل ناپذیر باشد، آنگاه یکی از سه حالت بعدی رخ می دهد: (i) R موضعی است، (ii) $R=M_2(F)$ که در آن F یک میدان است، (iii) $\frac{R}{J(R)} = F_1 \times F_2$ برای دو میدان F_1 و F_2.

دومین مفهوم مطالعه شده در این پایان نامه تعریف بعدی می باشد: فرض کنید $k \geq 2$. حلقه‌ی R را یک B_k-حلقه می نامند اگر برای هر زیر مجموعه ی k عنصری K از R داشته باشیم $|K^2| \leq \binom{k+1}{2}$. واضح است که هر حلقه‌ی جابه‌جایی به ازای $k \geq 2$ یک B_k-حلقه است. بنابراین این پرسش طبیعی است که آیا B_k-حلقه ها جابه‌جایی هستند؟ در این پایان نامه ثابت می کنیم که برای k=۲ و k=۳ هر B_k-حلقه‌ی یکدار جابه‌جایی است. لازم به یادآوری است که هر دو مفهوم بالا ابتدا برای گروه ها تعریف شده اند. در این پایان نامه قضایایی در مورد B_k-گروه ها بیان کرده ایم.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌ی متناهی، حلقه‌ی متعدی- جابجایی، مرکزساز، B_k-گروه، B_k-حلقه.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات جبر است که تقریباً در همه‌ی شاخه‌های دیگر از آن استفاده می‌شود. امروزه ریاضی‌دانان بر این باورند که مطالعه‌ی برخی از مباحث جبری مانند گروه‌ها و حلقه‌های جابه‌جایی ضروری است. یکی از موضوعات مهم جبر نظریه‌ی حلقه است که برای مطالعه‌ی جبرها، نظریه‌ی لی، جبر همولوژی و...، مهم و ضروری است. نظریه‌ی حلقه به بررسی خواص حلقه‌ها به عنوان یک ساختار مهم جبری می‌پردازد. یکی از مهم‌ترین این ویژگی‌ها جابه‌جایی بودن است. قضایای بنیادی زیادی در نظریه‌ی حلقه‌ها وجود دارد که حلقه‌ها را از نظر ویژگی آن‌ها و عناصرشان بررسی می‌کند. مطالعه بر روی حلقه‌های ناجابه‌جایی و یافتن شرایطی که آن‌ها جابه‌جایی شوند همواره از اهمیت زیادی در بین جبردانان برخوردار می‌باشد و در سال‌های اخیر باعث به وجود آمدن مباحث جدید و متنوعی در این رابطه گردیده است. از جمله‌ی این مباحث بررسی خاصیت‌های شمارشی و گرافی ساختارهای ترکیبیاتی وابسته به حلقه‌ها است.

حلقه‌ی R متعدی‌ـجابه‌جایی نامیده می‌شود هرگاه برای هر سه عنصر غیر مرکزی x، y و z از R، اگر $xy = yx$ و $yz = zy$، آن‌گاه $xz = zx$. یک گروه متعدی‌ـجابه‌جایی نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. این مفهوم نخستین بار در سال ۱۹۲۵ توسط ویزنر برای گروه‌ها ارائه شد. در سال ۱۹۵۷ سوزوکی همه‌ی گروه‌های ناآبلی ساده‌ی متعدی‌ـجابه‌جایی را رده بندی کرد. گروه‌های متعدی‌ـجابه‌جایی ناپوچ‌توان توسط اشمیت در سال ۱۹۷۰ مشخص شدند. در سال ۱۹۹۸ ویو ثابت کرد که گروه‌های متعدی‌ـجابه‌جایی ساده یا حل‌پذیر هستند. او ثابت کرد که هر گروه غیرآبلی ساده‌ی متعدی‌ـجابه‌جایی با $PSL_۲(۲^n)$ که $n \geqslant ۲$ یکریخت است. در سال ۲۰۱۰ مفهوم متعدی‌ـجابه‌جایی بودن برای حلقه‌ها نیز تعریف شد. هدف ما در فصل دوم این پایان نامه مطالعه‌ی این ویژگی در نظریه‌ی حلقه‌ها است. نشان می‌دهیم که حلقه‌های متعدی‌ـجابه‌جایی ساده و متناهی، میدان‌ها یا ماتریس‌های ۲×۲ روی میدان‌ها هستند. هم‌چنین ثابت می‌کنیم حلقه‌ی متعدی‌ـجابه‌جایی تحویل ناپذیر، یا یک ماتریس ۲×۲ روی یک میدان و یا یک حلقه‌ی موضعی است.

فرض کنید $k \geqslant ۲$ عددی طبیعی باشد. حلقه‌ی R یک B_kـ*حلقه* نامیده می‌شود، هرگاه برای هر

زیرمجموعه‌ی k عنصری K از آن داشته باشیم $|K^2| \leqslant \binom{k+1}{2}$. یک B_kـگروه نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. این تعریف اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط بل و کلین مطرح شد. هدف دیگر ما در این پایان نامه مطالعه‌ی شرایط جابه‌جایی بودن این نوع حلقه‌ها است. در فصل سوم برخی نتایج کلی را در مورد B_kـحلقه‌ها بیان می‌نماییم. سپس نشان می‌دهیم همه‌ی B_2ـحلقه‌های یک‌دار و B_3ـحلقه‌های یک‌دار جابه‌جایی هستند. همه‌ی B_3ـگروه‌ها و B_4ـگروه‌های غیرآبلی را مشخص می‌کنیم. سپس شرایطی را می‌یابیم که تحت آن شرایط B_4ـحلقه‌های یک‌دار و B_5ـحلقه‌های یک‌دار جابه‌جایی می‌شوند.

در این پایان نامه در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز در نظریه‌ی حلقه‌ها را چنان یادآوری می‌کنیم که خواننده بتواند به‌طور کامل مطالب فصل‌های بعدی را دنبال کند.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل مفاهیم، اصطلاحات و قضایایی را بیان می‌کنیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعدی می‌باشند.

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

در این بخش به‌طور کوتاه به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریه‌ی حلقه‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت *مرکز حلقه‌ی* R را با $Z(R)$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم $Z(R) = \{r \in R \,|\, rx = xr \,, \forall x \in R\}$.

تعریف ۲.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت $C(a) = \{x \in R \,|\, xa = ax\}$ را *مرکزساز* عنصر $a \in R$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. *گراف جابه‌جایی* $\Gamma(R)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که، مجموعه‌ی رأس‌های $\Gamma(R)$ را همه‌ی عناصر غیر مرکزی R می‌گیریم و دو رأس متمایز a و b در $\Gamma(R)$ را به هم متصل می‌کنیم اگر و تنها اگر $ab = ba$.

تعریف ۴.۱ گراف n رأسی که هر دو رأس متمایز آن به هم متصل هستند را یک *گراف کامل* نامیده و با نماد K_n نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۱ گراف جابه‌جایی حلقه‌ی $M_2(\mathbb{F}_2)$ به فرم ۷ گراف K_2 است.

تعریف ۵.۱ فرض کنید R یک حلقه و X یک عنصر یا یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از R باشد. *پوچ‌ساز چپ* X که با نماد$\mathrm{Ann}_\ell(X)$ نمایش می‌دهیم را به‌صورت $\mathrm{Ann}_\ell(X) = \{a \in R \,|\, ax = 0, \forall x \in X\}$ تعریف می‌کنیم. به‌طور مشابه پوچ‌ساز راست X که با نماد $\mathrm{Ann}_r(X)$ نمایش می‌دهیم تعریف می‌شود.

تعریف ۶.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی یک‌دار باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های در R را با نماد $M_{m\times n}(R)$ نمایش می‌دهیم. همچنین حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در R را با نماد $M_n(R)$ و حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی با درایه‌های در R را با نماد $UT_n(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱ برای هر $1 \leqslant i,j \leqslant n$، عنصر E_{ij} را ماتریسی در $M_n(R)$ می‌گیریم که درایه‌ی (i,j)ام آن برابر یک و بقیه‌ی درایه‌های آن صفر است.

تعریف ۸.۱ اگر برای حلقه‌ی دلخواه R، عدد طبیعی n وجود داشته باشد که برای هر $a \in R$، $na = 0$ یعنی مرتبه‌های عناصر R نسبت به عمل جمع کران‌دار باشد، آن‌گاه کوچکترین عدد طبیعی n با این ویژگی را *مشخصه‌ی* حلقه‌ی R می‌نامیم. مشخصه‌ی حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{char}\, R$ نمایش می‌دهیم. در صورتی‌که چنین عددی وجود نداشته باشد، گوییم مشخصه‌ی R صفر است.

مثال ۲.۱ $\mathrm{char}\, \mathbb{Z} = 0$ و $\mathrm{char}\, \mathbb{Z}_n = n$.

تعریف ۹.۱ فرض کنید n عددی طبیعی باشد. حلقه‌ی R را *nـبی‌تاب* گوییم هرگاه برای هر عنصر $a \in R$، تساوی $na = 0$ نتیجه دهد $a = 0$.

تعریف ۱۰.۱ برای هر حلقه‌ی R، *رادیکال جیکوبسن* R را برابر اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف نموده و آن را با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳.۱ $J(\mathbb{Z}) = \{0\}$.

تعریف ۱۱.۱ گوییم حلقه‌ی R *آرتینی چپ (راست)* است هرگاه به ازای هر خانواده $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ از ایده‌آل‌های چپ (راست) R که در شرط $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ صدق کند، عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $I_k = I_{k+1} = \ldots$.

قضیه ۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد. در این صورت $J(R)$ یک ایده‌آل پوچ‌توان است. ([۱۶]، *صفحه‌ی ۵۶*)

لم ۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد و $r \in R$. در این صورت $r \in J(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$، عنصر $1 - ra$ در R وارون‌پذیر باشد. ([۱۶]، *صفحه‌ی ۵۳*)

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد و $a \in R$. گوییم a یک عنصر *پوچ‌توان* است هرگاه عدد طبیعی n یافت شود که $a^n = 0$.

تعریف ۱۳.۱ ایده‌آل I را پوچ گوییم هرگاه همه‌ی عناصر آن پوچ‌توان باشند.

تعریف ۱۴.۱ حلقه‌ی R را *کاهشی* می‌نامیم، هرگاه R عنصر پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد.

مثال ۴.۱ هر حلقه‌ی بولی، کاهشی است.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد و $a \in R$. گوییم a یک *مقسوم‌علیه صفر* چپ است اگر عنصر ناصفر $b \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $ab = 0$. به‌طور مشابه مقسوم‌علیه صفر راست تعریف می‌شود. عنصر $a \in R$ را یک *مقسوم‌علیه صفر* گوییم هرگاه a یک مقسوم‌علیه صفر چپ و یا یک مقسوم‌علیه صفر راست باشد. همچنین عنصر $a \in R$ را یک *مقسوم‌علیه صفر دو طرفه* گوییم هرگاه هم یک مقسوم‌علیه صفر چپ و هم یک مقسوم‌علیه صفر راست باشد.

تعریف ۱۶.۱ عنصر a در حلقه‌ی R را *منظم* گوییم، هرگاه نه مقسوم‌علیه صفر چپ و نه مقسوم‌علیه صفر راست باشد.

نکته ۱.۱ هر عنصر پوچ‌توان در حلقه‌ی R یک مقسوم‌علیه صفر است.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. عنصر $a \in R$ را *خودتوان* گوییم هرگاه $a^{2} = a$. عنصر خودتوان a را *بدیهی* گوییم، هرگاه a برابر با ۰ یا ۱ باشد.

نکته ۲.۱ در هر حلقه، ۰ تنها عنصر پوچ‌توان است که خودتوان نیز می‌باشد.

تعریف ۱۸.۱ حلقه‌ی R را *تحویل‌ناپذیر* گوییم، هرگاه $R \neq 0$ و نتوان آن را به‌صورت حاصل‌ضرب دو حلقه‌ی ناصفر نوشت.

تعریف ۱۹.۱ فرض کنید R یک حلقه و I_1، I_2، ...، I_n ایده‌آل‌هایی از R باشند. اگر برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم

$$I_n \cap (I_1 + \cdots + I_{i-1} + I_{i+1} + \cdots + I_n) = \{0\}$$

آن‌گاه $I = \oplus_{i=1}^{n} I_i$ را حاصل‌جمع مستقیم داخلی I_iها می‌نامیم.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنید R یک حلقه و e عنصری خودتوان از R باشد. در این صورت eRe را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$eRe = \{r \in R \,|\, er = r = re\}$$

eRe زیرگروه جمعی R است.

قضیه ۲.۱ (تجزیه‌ی پیرس). فرض کنید e یک عنصر خودتوان در حلقه‌ی R باشد. در این صورت حلقه‌ی R را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد. ([۱۶]، صفحه‌ی ۳۱۸)

$$R = eRe \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)Re \oplus (1-e)R(1-e).$$

لم ۲.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد و عنصر $a \in R$ و عدد طبیعی n چنان باشند که $(a-a^{2})^{n} = 0$. در این صورت عنصر $a^{n}f(a)^{n}$ خودتوان است که در آن $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-x)^{k-1}$.

برهان. داریم $\circ = (a-a^{\text{۲}})^n = \sum_{k=\circ}^{n}(-\text{۱})^k\binom{n}{k}a^{n+k}$، بنابراین

$$a^n = a^{n+\text{۱}}\sum_{k=\text{۱}}^{n}\binom{n}{k}(-a)^{k-\text{۱}} = a^{n+\text{۱}}f(a)$$

پس می‌توانیم بنویسیم

$a^n = a^{n+\text{۱}}f(a) = a^n(af(a)) = (a^{n+\text{۱}}f(a))(af(a)) = a^{n+\text{۲}}f(a)^{\text{۲}} = \cdots = a^{\text{۲}n}f(a)^n$ حال اگر قرار دهیم $e = a^n f(a)^n$، آن‌گاه

$$e^{\text{۲}} = a^{\text{۲}n}f(a)^{\text{۲}n} = (a^{\text{۲}n}f(a)^n)f(a)^n = a^n f(a)^n = e$$

و برهان کامل می‌شود. ■

نتیجه ۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل پوچ از R باشد. اگر e' یک عنصر خودتوان در R/I باشد، آن‌گاه عنصر خودتوان e در R هست که $e - e' \in I$.

برهان. چون $e'^{\text{۲}} - e' \in I$ پوچ‌توان است پس طبق لم ۲.۱، چندجمله‌ای $f(x)$ وجود دارد که $e = e'^n f(e')^n$ یک عنصر خودتوان در R است. اما با توجه به چندجمله‌ای $f(x)$ داریم

$$\overline{f(e')} = \overline{\sum_{k=\text{۱}}^{n}(-\text{۱})^{k-\text{۱}}\binom{n}{k}e'^{k-\text{۱}}} = \left(\sum_{k=\text{۱}}^{n}(-\text{۱})^{k-\text{۱}}\binom{n}{k}\right)\overline{e'} = \overline{e'}$$

در نتیجه $\bar{e} = \overline{e'^n f(e')^n} = \overline{e'}^{\,n}\,\overline{f(e')}^{\,n} = (\overline{e'}\,\overline{e'})^{\,n} = \overline{e'}$. ■

تعریف ۲۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و $e_{\text{۱}}, \ldots, e_n$ خودتوان‌هایی در R باشند. گوییم $\{e_{\text{۱}}, \ldots, e_n\}$ یک مجموعه از *خودتوان‌های متعامد* است هرگاه برای هر $i \neq j$، داشته باشیم $e_ie_j = \circ$. به‌علاوه اگر $e_{\text{۱}} + \cdots + e_n = \text{۱}$ عنصر همانی R باشد، آن‌گاه $\{e_{\text{۱}}, \ldots, e_n\}$ را یک *مجموعه‌ی خودتوان متعامد یکه* می‌نامیم.

قضیه‌ی زیر تعمیم نتیجه‌ی ۱.۱ است.

قضیه ۳.۱ فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی پوچ از R باشد. اگرمجموعه‌ی $\{f_{\text{۱}}+I, \ldots, f_n+I\}$ یک مجموعه‌ی خودتوان متعامد یکه درR/I باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی خودتوان متعامد یکه‌ی $\{e_{\text{۱}}, \ldots, e_n\}$ در R وجود دارد که برای هر i داریم $e_i + I = f_i + I$.

برهان. حکم را به استقراء روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = 1$ حکم با استفاده از نتیجه‌ی ۱.۱، برقرار می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم $n \geqslant 2$ و هم‌چنین برای مجموعه‌ی خودتوان و متعامد یکه‌ی $\{f_1 + I, \dots, f_{n-1} + I\}$ در R/I مجموعه‌ی خودتوان و متعامد یکه‌ی $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ در R وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n-1$ داشته باشیم $e_i - f_i \in I$. عنصر e_n را می‌یابیم.

قرار می‌دهیم $\alpha = e_1 + \cdots + e_{n-1}$. چون $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ متعامد یکه است پس α خودتوان است. از طرف دیگر بنابه نتیجه‌ی ۱.۱، عنصر خودتوان β در R وجود دارد که $\bar{\beta} = \bar{f}_n$. چون $\bar{\alpha}\bar{\beta} = (\bar{f}_1 + \cdots + \bar{f}_{n-1})\bar{f}_n = 0$ پس $\alpha\beta \in I$ در نتیجه $\beta\alpha$ عنصری پوچ‌توان است و بنابراین $1 - \beta\alpha$ وارون‌پذیر است. قرار می‌دهیم $e_n = (1-\alpha)(1-\beta\alpha)^{-1}\beta(1-\beta\alpha)$، واضح است که $\alpha e_n = e_n\alpha = 0$. پس برای هر $1 \leqslant i \leqslant n-1$ داریم $e_n e_i = e_n(\alpha e_i) = 0$ و $e_i e_n = (e_i\alpha)e_n = 0$. هم‌چنین e_n خودتوان است زیرا $(1-\beta\alpha)^{-1}\beta(1-\beta\alpha)(1-\alpha) = (1-\beta\alpha)^{-1}\beta(1-\beta\alpha))((1-\beta\alpha)^{-1}\beta(1-\beta\alpha)$ و بنابراین

$$e_n^2 = (1-\alpha)((1-\beta\alpha)^{-1}\beta(1-\beta\alpha))^2 = (1-\alpha)(1-\beta\alpha)^{-1}\beta^2(1-\beta\alpha) = e_n$$

حال قرار می‌دهیم $\gamma = e_1 + \cdots + e_n$ چون $\bar{\gamma} = \bar{e}_1 + \cdots + \bar{e}_n = \bar{1}$ پس $1 - \gamma \in I$. طبق فرض I پوچ است پس $1 - \gamma$ هم خودتوان است و هم پوچ‌توان، در نتیجه $1 - \gamma = 0$ یعنی $\gamma = 1$. بنابراین $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک مجموعه‌ی خودتوان متعامد یکه در R است. ■

تعریف ۲۲.۱ فرض کنید M و N دو Rـمدول باشند. در این صورت

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) = \{f : M \longrightarrow N \mid \text{یک } R\text{ـهمریختی است } f\}$$

همچنین $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M,M)$.

لم ۳.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی دلخواه بوده و e عنصری خودتوان از R باشد. در این صورت داریم

$$\mathrm{End}_R(Re) \cong (eRe)^{\mathrm{op}}$$

برهان. نگاشت φ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi : (eRe)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{End}_R(Re)$$

$$\varphi(a) = f_a$$

که در آن

$$f_a : Re \longrightarrow Re$$
$$f_a(x) = xa$$

نشان می‌دهیم نگاشت φ یکریختی است. ابتدا نشان می‌دهیم $Im\varphi \subseteq \mathrm{End}_R(Re)$. اگر $x, y \in Re$ و $r \in R$، آن‌گاه

$$f_a(x+y) = (x+y)a = f_a(x) + f_a(y)$$

$$f_a(rx) = (rx)a = rf_a(x).$$

در نتیجه $f_a \in \mathrm{End}_R(Re)$. به‌وضوح φ جمع را حفظ می‌کند. همچنین φ ضرب را نیز حفظ می‌کند زیرا برای هر $x \in Re$ داریم

$$f_{ba}(x) = xba = f_a(xb) = f_a(f_b(x)) = (f_a f_b)(x)$$

و این نشان می‌دهد $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

φ یک به یک است زیرا

$$\varphi(a) = \circ \Longrightarrow f_a = \circ \Longrightarrow f_a(e) = \circ \Longrightarrow ea = \circ \Longrightarrow a = \circ$$

φ پوشا نیز هست زیرا

$$g \in \mathrm{End}_R(Re) \Longrightarrow f_{g(e)}(x) = xg(e) = g(xe) = g(x)$$

از طرفی چون g یک Rـمدول چپ است نتیجه می‌گیریم $g(e) = g(ee) = eg(e)$ و چون $\mathrm{Im}g \subseteq Re$ بنابراین $g(e) \in Re$ پس $g(e)e = g(e)$ از این‌رو $g(e) \in eRe$. در نتیجه $\varphi(g(e)) = g$. بنابراین φ یکریختی است. ■

تعریف ۲۳.۱ عنصر خودتوان e در حلقه‌ی R را *ابتدایی* گوییم، هرگاه e را نتوان به‌صورت مجموع دو عنصر خودتوان ناصفر متعامد نوشت.

قضیه ۴.۱ فرض کنید R یک حلقه و e خودتوانی از R باشد. در این صورت e ابتدایی است اگر و تنها اگر e تنها عنصر خودتوان ناصفر حلقه‌ی eRe باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید e یک خودتوان ابتدایی از R باشد. همچنین فرض کنید f یک خودتوان در eRe باشد. چون e عنصر بی اثر حلقه‌ی eRe است بنابراین $e-f$ یک خودتوان است. از طرفی $e = f + e - f$. اکنون ابتدایی بودن e نشان می‌دهد که $e - f = ۰$ یعنی $f = e$.

اکنون عکس را ثابت می‌کنیم. فرض کنید e تنها عنصر خودتوان ناصفر حلقه‌ی eRe باشد. فرض کنید دو عنصر خودتوان متعامد ناصفر $f_۱$ و $f_۲$ در R باشند که $e = f_۱ + f_۲$. داریم $ef_۱ = f_۱e = f_۱$. بنابراین $f_۱ = ef_۱e$ خودتوانی در حلقه‌ی eRe است و $f_۱ \neq e$ که این با فرض ارائه شده در مورد eRe تناقض دارد. ■

تعریف ۲۴.۱ حلقه‌ی ناصفر و یک‌دار R را *موضعی* گویند، هرگاه تنها دارای یک ایده‌آل ماکسیمال چپ باشد.

قضیه ۵.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد. در این صورت R موضعی است اگر و تنها اگر عنصر خودتوان نابدیهی نداشته باشد.([۱٦]، صفحه‌ی ۳۰۱)

قضیه ٦.۱ فرض کنید R یک حلقه و $I \subset J(R)$ ایده‌آلی از R باشد. اگر P و Q دو Rـمدول پروژکتیو متناهی مولد باشند، آن‌گاه P و Q به‌عنوان دو Rـمدول یکریخت هستند اگر و تنها اگر P/IP و Q/IQ به‌عنوان دو R/Iـمدول یکریخت باشند. ([۱٦]، صفحه‌ی ۳۰۷)

قضیه ۷.۱ فرض کنید R یک حلقه بوده و M، $M_۱$، ...، M_n مدول‌هایی روی R باشند. در این صورت اگر $M = M_۱ \oplus \cdots \oplus M_n$، آن‌گاه $\mathrm{End}_R(M)$ با حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ که درایه‌ی (i,j)ام آن عنصری از $\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)$ است، یکریخت می‌باشد.([۱۹]، صفحه‌ی ۱۰۴)

قضیه ۸.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد و عدد طبیعی n و میدان F چنان باشند که $R/J(R) \cong M_n(F)$. در این‌صورت حلقه‌ی موضعی S وجود دارد به‌طوری‌که $R \cong M_n(S)$.

برهان. چون $M_n(F) = M_n(F)E_{۱۱} \oplus \cdots \oplus M_n(F)E_{nn}$ و با توجه به قضیه‌ی ۱.۱، $J(R)$ پوچ‌توان است، از قضیه‌ی ۳.۱ نتیجه می‌گیریم که عناصر خودتوان و متعامد یکه‌ی $e_۱$، ...، e_n در R وجود دارند که برای $i = ۱, \ldots, n$، داریم $e_i - E_{ii} \in J(R)$. چون E_{ii}ها ابتدایی هستند به‌وضوح e_iها نیز ابتدایی خواهند بود.

داریم $R = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n$. طبق قضیه‌ی ۶.۱، Rــمدول‌های Re_1، ...، Re_n دو به دو یکریخت هستند. اکنون از لم ۳.۱، $R^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_R(Re) = \mathrm{End}_R(Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n)$. بنابر قضیه‌ی ۷.۱، $\mathrm{End}_R(Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n) \cong M_n(\mathrm{End}_R(Re_1))$ و با استفاده از لم ۳.۱، داریم $M_n(\mathrm{End}_R(Re_1)) \cong M_n((e_1Re_1)^{\mathrm{op}})$ بنابراین $R^{\mathrm{op}} \cong M_n((e_1Re_1)^{\mathrm{op}})$. در نتیجه $R \cong M_n(S)$ که در آن $S = e_1Re_1$. چون $M_n(S)$ آرتینی چپ است پس S نیز آرتینی چپ است. اکنون قضیه‌های ۴.۱ و ۵.۱، نتیجه می دهند که حلقه‌ی S موضعی است. ■

تعریف ۲۵.۱ عنصر a از حلقه‌ی R را *تناوبی* می‌نامیم هرگاه اعداد مثبت $m > n$، وجود داشته باشند به‌طوری‌که $a^m = a^n$. حلقه‌ی R را تناوبی می‌نامیم هرگاه همه‌ی عناصر آن تناوبی باشند.

مثال ۵.۱ هر حلقه‌ی متناهی، تناوبی است.

حل. فرض کنید R یک حلقه‌ی متناهی باشد. چون R متناهی است و $\{a, a^2, a^3, \ldots\} \subseteq R$ بنابراین اعداد m و n که $m > n$، هستند که $a^m = a^n$. ■

مثال ۶.۱ اگر S یک حلقه‌ی متناهی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی $R = S \times S \times S \times \cdots$ یک حلقه‌ی تناوبی نامتناهی است.

لم ۴.۱ فرض کنید R یک حلقه و $a \in R$ عنصری تناوبی باشد. در این صورت عدد طبیعی k وجود دارد که a^k خودتوان است. بیش‌تر آن‌که عدد طبیعی l وجود دارد که $a^l - a$ پوچ‌توان است.

برهان. چون a تناوبی است پس اعداد مثبت $m > n$ وجود دارند به‌طوری‌که $a^m = a^n$. ادعا می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی k داریم $a^{k(m-n)+n} = a^n$. این مطلب را با استقراء روی k ثابت می‌کنیم. اگر $k = 1$، آن‌گاه $a^{k(m-n)+n} = a^m = a^n$ و اگر برای k برقرار باشد برای $k + 1$ داریم $a^{(k+1)(m-n)+n} = a^{k(m-n)+n}a^{m-n} = a^n a^{m-n} = a^m = a^n$. از این رو فرض کنید عدد طبیعی k_0 چنان باشد که $k_0(m-n) > n$. قرار می‌دهیم $e = a^{k_0(m-n)}$، در این صورت $e^2 = a^{k_0(m-n)+n}a^{k_0(m-n)-n} = a^n a^{k_0(m-n)-n} = a^{k_0(m-n)} = e$. در نتیجه حکم برقرار است.

حال داریم $(a^{m-n+1} - a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a^{m-n+1})^k (-a)^{n-k}$ در نتیجه

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^{k(m-n)+n} = a^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0$$

بنابراین $l = m - n + 1$ عدد طبیعی مورد نظر است. ■