بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

بررسی نظریه‌ی نقطه ثابت برای یک کلاس از نگاشت های غیرانبساطی تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر محمدباقر مقیمی

استاد مشاور:

دکتر ناصر زمانی

توسط:

فهیمه فداکار

دانشگاه محقق اردبیلی

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: فداکار	**نام:** فهیمه
عنوان پایان نامه : بررسی نظریه‌ی نقطه ثابت برای یک کلاس از نگاشت های غیرانبساطی تعمیم یافته	
استاد راهنما: دکتر محمد باقر مقیمی **استاد مشاور:** دکتر ناصر زمانی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز **دانشگاه:** محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی **گروه:** ریاضیات و کاربردها **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۱۳۹۱/۶/۱۸ **تعداد صفحه:**۹۷	
کلید واژه‌ها : نگاشت غیرانبساطی، نگاشت گاووسی غیرانبساطی، نقطه‌ثابت، دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی، اصل نیمه‌متمایلی	
چکیده: در بخش اول این پایان‌نامه، شرط جدیدی برای نگاشت ها در فضاهای باناخ به نام شرط (C) که تعمیمی از شرط غیرانبساطی است، معرفی می‌کنیم که اخیرا توسط سوزوکی بیان شده است. و نیز برخی قضیه‌های نقطه ثابت برای نگاشت‌های دارای این شرط در فضاهای باناخ را اثبات می‌کنیم و در ادامه این قضایا و نتایج را برای بعضی نگاشت‌های غیرانبساطی تعمیم‌یافته‌ی دیگر، تعمیم می‌دهیم. شرط (C_λ) و شرط (E) را معرفی کرده و دو کلاس از نگاشت‌های غیرانبساطی تعمیم یافته را به دست می آوریم و وجود نقاط ثابت و نیز رفتار مجانبی‌شان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در پایان هر بخش، یک قضیه ی نقطه ثابت مشترک را برای این رده نگاشت‌های غیرانبساطی تعمیم‌یافته، بیان و ثابت می‌کنیم.	

تقدیم به

مادر مهربان و پدر عزیزم

که این قلم از عشق آنان جاودانه شد.

مهربان فرشتگانی که

از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی

آموختم.

تقدیر و تشکر:

سپاس خدای راست بزرگ منان، سپاسی که بر او پوشیده نیست و پایان نپذیرد که مرا فرصت بودن و اینگونه بودن داد تا شکوه بودنش را سپاس گویم و به لطف و رحمت خود مسیر دانش را هموار پیمودنم گردانید.

و به مصداق آیه‌ی کریمه‌ی « من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » شایسته می‌دانم از پدر و مادرم که وجودشان تجلی ناب ایثار است، به پاس برکت دستان پر مهر و کلمات امیدبخش و رحمت دعاهای بی‌وقفه‌شان تقدیر نمایم و نیز برادر و خواهران گرامیم را که چشمه‌ی محبت‌های بی‌دریغشان هرگز فروکش نمی‌کند، سپاس می‌گذارم.

و اجر می‌نهم زحمات استاد علم و اخلاق، جناب آقای دکتر محمد باقر مقیمی را که همراهی‌ها و راهنمودهایشان موجب دلگرمی ام در پیمودن این مسیر بوده و افتخار شاگردی ایشان در لوح زندگی‌ام همواره تابناک است.

و از استاد شایسته‌ام دکتر ناصر زمانی به پاس راهنمایی بی‌دریغشان و از جناب آقای دکتر محمدرضا مطلبی که زحمت بازخوانی و داوری این رساله را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از زحمات اساتید محترم و دانشجویان عزیز دانشگاه محقق اردبیلی و بخصوص از هم‌اتاقی‌ها و هم‌کلاسی‌های خود که در طی دوران تحصیل مشوق و همراه من بودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

فهرست مندرجات

مقدمه

نظریه‌ی نقطه ثابت یکی از شاخه‌های میان رشته‌ای در ریاضیات است که کاربردهای فراوانی در ریاضیات و نیز سایر علوم دارد. این نظریه دارای سه مساله‌ی عمده است، که عبارتند از:
(i). وجود و یگانگی نقطه‌ی ثابت
(ii). ساختار مجموعه‌ی نقاط ثابت
(iii). روش های تقریب نقاط ثابت و همگرایی آنها
این نظریه همچنین دارای سه زیرشاخه‌ی نسبتا مجزا در فضاهای توپولوژیک، فضاهای متریک و فضاهای گسسته است. قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت براور، اصل انقباض باناخ و قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت تارسکی به ترتیب قضیه‌های بنیادی ونقطه‌ی آغاز هر یک از این شاخه‌ها محسوب می‌شوند.
نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت از سابقه‌ی بسیار طولانی برخوردار است، ریاضیدانان یونانی و مصری برای تخمین دقیق عدد $\sqrt{۲}$، نقطه‌ی ثابت نگاشت $f(x) = \frac{x+(\frac{x}{۲})}{۲}$ را روی بازه‌ی $(\sqrt{۲}, +\infty)$ با استفاده از روش فرآیند تکراری تقریب می‌زدند.
قضیه‌ی نقطه ثابت که توسط باناخ [۱] در سال ۱۹۲۰ بیان شد، نقطه‌ی عطفی در مباحث نقاط ثابت می‌باشد. کاربرد این قضیه در اثبات بسیاری از قضایای مهم همچون قضیه‌ی پیکارد—لیندلف [۲] و یا قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت شاودر [۳]، قابل اغماض نیست.
در این پایان نامه، وجود نقاط ثابت در حوزه‌ی فضاهای متریک و نتایج کلاسیک آنها، مورد بررسی قرار می‌گیرد.
در واقع با معرفی شرط‌های جدیدی که تعمیم شرط غیرانبساطی است، رده‌های گسترده‌تر از رده‌ی

---

[۱] Banach
[۲] Picard - Lindlof
[۳] Shawder

نگاشت‌های غیرانبساطی ایجاد کرده و شرایطی را که تحت آنها قضیه نقطه ثابت باناخ برای این رده‌های جدید از نگاشت‌ها برقرار است، بررسی می کنیم.
در فصل اول به معرفی تعاریف کلی و مفاهیم اولیه می‌پردازیم و در فصل دوم ابتدا در بخش اول تعمیم ساده‌ای از شرط غیرانبساطی به‌نام شرط (C) را معرفی می‌کنیم و قضایای نقاط ثابت را که پیشتر توسط ریاضیدانان دیگر، برای نگاشت های غیرانبساطی بیان شده بود، بررسی می کنیم.
در بخش دوم از همین فصل، با تعمیمی از شرط (C) که در واقع تعمیمی دیگر از شرط غیرانبساطی است، آشنا می شوید. در این بخش نیز مطالعه خواهید کرد که بعضی از قضایای نقاط ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی و یا نگاشت های دارای شرط (C) برای این رده نیز برقرار است و بعضی دیگر از قضایا را می‌توان با ایجاد شرایطی، برقرار نمود.
در بخش سوم از فصل دوم، تعمیمی غیرمستقیم از شرط غیرانبساطی به نام شرط (E) و قضایای مربوط به رده نگاشت‌های دارای آن، معرفی می‌شود.
در هر بخش رابطه‌ی این شرط‌های جدید با هم و با شرط غیرانبساطی مطالعه می‌شود و در پایان هر بخش، قضیه‌ی نقطه ثابت مشترکی نیز بیان می‌شود.
تدوین و نگارش این پایان‌نامه عمدتاً مبتنی بر مرجع [۳] می‌باشد.

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیمی را که در مباحث فصل آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه و τ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های آن باشد. τ را یک توپولوژی روی X نامند، هرگاه داشته باشیم:

۱. $\emptyset, X \in \tau$.

۲. هر اجتماع دلخواه از اعضای τ، عضوی از τ باشد.

۳. هر اشتراک متناهی از اعضای τ، عضوی از τ باشد.

فضای X که روی آن توپولوژی τ تعریف شده باشد را فضای توپولوژیک می‌نامند و با (X, τ) نشان می‌دهند.

متداولترین فضاهای توپولوژیک، فضاهای متریک اند. با فرض آشنا بودن خواننده با فضاهای متریک و ویژگی‌های آن، فقط به بیان تعریف‌های اصلی اکتفا می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ یک متر بر X نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ تابع d در شرایط زیر صدق کند:

الف). $d(x, y) \geq 0$ و $d(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$.

ب). $d(x, y) = d(y, x)$.

ج). $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

اگر d یک متر در X باشد، جفت مرتب (X,d) را یک فضای متریک می‌نامند.

تعریف ۳.۱. فضای متریک (X,d) را کامل می‌نامند، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در X به نقطه‌ای از آن همگرا باشد.

تعریف ۴.۱. فضای برداری X را یک فضای نرمدار گویند، هرگاه نگاشتی مانند $||.|| : X \to \mathbb{R}$ در X تعریف شده باشد و برای هر $x,y \in X$ دارای خواص زیر باشد:

(الف). $0 \leq ||x||$ و $||x|| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

(ب). برای هر $a \in \mathbb{F}$، $||ax|| = |a|\ ||x||$،

(ج). $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

نکته ۵.۱ با تعریف $d(x,y) = ||x-y||$، d در شرایط متر بودن صدق می‌کند. لذا هر فضای نرمدار یک فضای متریک است.

تعریف ۶.۱. فرض کنید T نگاشتی از فضای نرمدار X به فضای نرمدار Y باشد. نرم T را با $||T||$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$||T|| = \sup\{\ |Tx|\ \ |\ x \in X, ||x|| = 1\}.$$

تعریف ۷.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. نگاشت $T : X \to Y$ را خطی نامند، هرگاه برای هر $x,y \in X$ و هر $a \in \mathbb{F}$ داشته باشیم $T(ax+y) = aT(x) + T(y)$.

تعریف ۸.۱. فضای برداری مختلط H را فضای ضرب داخلی نامند، هرگاه به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H، عدد مختلط $< x,y >$ که آن را «حاصلضرب داخلی» نامند، مربوط شده باشد، به‌طوری‌که قواعد زیر برقرار باشند

الف). $0 \leq < x,x >$ و $< x,x > = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

ب). $< x,y > = \overline{< y,x >}$، (علامت بارنشانگر مزدوج مختلط است.)

ج). برای هر $a \in \mathbb{F}$، $< ax, y >= a < x, y >$،

د). برای هر $x, y, z \in H$، $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$.

تعریف ۹.۱. فضای ضرب داخلی H با متر d که برای هر $x, y \in H$ به صورت $d(x, y) =< x - y, x - y >^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود، یک فضای متریک است. هرگاه H با متر d کامل باشد، فضای هیلبرت [1] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱. هر فضای نرمدار X بامتر حاصل از نرم که برای هر $x, y \in X$ به صورت $d(x, y) = ||x - y||$ تعریف می‌شود، یک فضای متریک است. فضای نرمدار کامل را فضای باناخ نامند.

نکته ۱۱.۱ هر فضای هیلبرت، یک فضای باناخ نیز است.

نکته ۱۲.۱ هر زیرمجموعه‌ی بسته از فضای باناخ، خود فضایی باناخ است.

تعریف ۱۳.۱. دنباله‌ی $\{x_n\}$ را در فضای نرمدار X، همگرای قوی (همگرا در نرم) به $x \in X$ نامند، هرگاه $\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$.

گزاره ۱۴.۱ هرگاه $\{K_\alpha\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده‌ی فضای متری X باشد، به‌طوری که اشتراک هر زیرگردایه‌ی متناهی از آنها ناتهی باشد، آنگاه $\cap_\alpha K_\alpha$ ناتهی خواهد بود.

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به [۹، صفحه‌ی ۴۸]. ■

تعریف ۱۵.۱. مجموعه‌ی $C \subseteq \mathbb{R}^k$ یک مجموعه‌ی محدب نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $t \in [0, 1]$ و برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم $tx + (1 - t)y \in C$.

[1] Hilbert

تعریف ۱.۱۶. مجموعه‌ی C را محدب اکید نامند، هرگاه برای هر $x,y\in C$ که $x\neq y$، $||x||\leq ۱$ و $||y||\leq ۱$ داشته باشیم

$$||\frac{x+y}{۲}||<۱.$$

تعریف ۱.۱۷. مجموعه‌ی C محدب یکنواخت (UC)[1] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\epsilon\in(۰,۲]$، δ یی مثبت موجود باشد به طوری که برای هر $x,y\in X$ که $||x||\leq ۱$، $||y||\leq ۱$ و $||x-y||>\epsilon$ داشته باشیم

$$||\frac{x+y}{۲}||\leq\delta.$$

تعریف ۱.۱۸. مجموعه‌ی C یک مجموعه‌ی محدب یکنواخت در هر مسیر $(UCED)$[2]، نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\epsilon\in(۰,۲]$ و برای هر $z\in C$ که $||z||=۱$ بتوان δ یی مثبت و وابسته به ϵ و z یافت به طوری که برای هر $x,y\in C$ که $||y||\leq ۱$، $||x||\leq ۱$ و $x-y\in\{\, tz \mid t\in[-۲,-\epsilon]\cup[\epsilon,۲]\}$ داشته باشیم

$$||\frac{x+y}{۲}||\leq ۱-\delta.$$

مثال ۱.۱۹ دایره به شعاع واحد، یک مجموعه‌ی محدب یکنواخت در هر مسیر است.

گزاره ۱.۲۰ هر مجموعه‌ی محدب یکنواخت، محدب یکنواخت در هر مسیر نیز است و هر مجموعه‌ی محدب یکنواخت در هر مسیر، محدب اکید نیز می‌باشد.

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به [۲]. ∎

تعریف ۱.۲۱. فرض کنید که X مجموعه‌ای محدب باشد. تابع حقیقی مقدار $T:X\to\mathbb{R}$ را یک تابع محدب نامند، هرگاه برای هر $x,y\in X$ و هر $\lambda\in[۰,۱]$ داشته باشیم

$$T(\lambda x+(۱-\lambda)y)\leq\lambda Tx+(۱-\lambda)Ty.$$

---

[1] Uniformly Convex

[2] Uniformly Convex in Every Direction

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای محدب باشد. تابع حقیقی مقدار $T : X \to \mathbb{R}$ را یک تابع اکیدا محدب نامند، هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و برای هر $\lambda \in (۰, ۱)$ داشته باشیم

$$T(\lambda x + (۱ - \lambda)y) < \lambda Tx + (۱ - \lambda)Ty.$$

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای محدب باشد. تابع حقیقی مقدار $T : X \to \mathbb{R}$ یک تابع گاووسی محدب نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و برای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$T(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq max\{T(x), T(y)\}.$$

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای محدب باشد. تابع حقیقی مقدار $T : X \to \mathbb{R}$ یک تابع گاووسی محدب اکید نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و برای هر $\lambda \in (۰, ۱)$ داشته باشیم

$$T(\lambda x + (۱ - \lambda)y) < max\{T(x), T(y)\}.$$

تعریف ۲۵.۱. فضای توپولوژیک X و $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ را در نظر بگیرید. تابع f در نقطه‌ی دلخواه $x_۰ \in X$ نیم‌پیوسته‌ی بالایی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$ همسایگی U از $x_۰$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x \in U$ داشته باشیم

$$f(x) \leq f(x_۰) + \epsilon.$$

بویژه اگر X فضای متریک باشد، f نیم‌پیوسته‌ی بالایی در $x_۰ \in X$ نامیده می‌شود، هرگاه

$$\limsup_{x \to x_۰} f(x) \leq f(x_۰).$$

تابع f نیم‌پیوسته‌ی بالایی نامیده می‌شود، هرگاه در هر $x \in X$ نیم‌پیوسته‌ی بالایی باشد.

تبصره ۲٦.۱ در برخی از کتب، تابع حقیقی (یا حقیقی وسعت‌یافته) f بر فضای توپولوژیک X نیم‌پیوسته‌ی بالایی نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعه‌ی $\{x \in X | f(x) < a\}$ باز باشد. (مراجعه کنید به[۸، صفحه‌ی ۵۳]).

تعریف ۲۷.۱. فضای توپولوژیک X و $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ را در نظر بگیرید. تابع f در نقطه‌ی دلخواه $x_\circ \in X$، نیم‌پیوسته‌ی پایینی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\epsilon > \circ$ همسایگی U از $x_\circ$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x \in U$ داشته باشیم

$$f(x) \geq f(x_\circ) - \epsilon.$$

بویژه اگر X فضای متریک باشد،تابع f در $x_\circ \in X$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی نامیده می‌شود، هرگاه

$$\liminf_{x \to x_\circ} f(x) \geq f(x_\circ)$$

تابع f نیم‌پیوسته‌ی پایینی نامیده می‌شود، هرگاه در هر $x \in X$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی باشد.

تبصره ۲۸.۱ در برخی کتب، تابع حقیقی (یا حقیقی وسعت‌یافته) f بر فضای توپولوژیک X نیم‌پیوسته‌ی پایینی نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعه‌ی $\{x \in X | f(x) > a\}$ باز باشد. (مراجعه کنید به[۸، صفحه‌ی ۵۳]).

نکته ۲۹.۱ یک تابع حقیقی، پیوسته است اگر و تنها اگر هم نیم‌پیوسته بالایی و هم نیم‌پیوسته پایینی باشد.

تعریف ۳۰.۱. فضای توپولوژیک X که خواص فضای برداری نیز در آن برقرار باشد و عمل جمع و ضرب در آن پیوسته باشد، را فضای برداری توپولوژیک (TVS) [۱] نامیده می‌شود.

---

[۱] Topological Vector Space

تعریف ۳۱.۱. فرض کنید X فضای برداری دلخواهی باشد، در این صورت دوگان فضای X را مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی و کراندار $\phi : X \to \mathbb{F}$ تعریف کرده و با نماد X^* نشان می‌دهند. دوگان فضای برداری X با تعریف جمع و ضرب زیر، خود یک فضای برداری است.

$$\forall \phi, \varphi \in X^*, \forall x \in X \qquad (\phi + \varphi)(x) = \phi(x) + \varphi(x)$$

$$\forall \phi \in X^*, \forall x \in X, \forall a \in \mathbb{F} \qquad (a\phi)(x) = a\phi(x)$$

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید که X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. در این صورت کوچکترین توپولوژی روی X، که هر $l \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف می‌نامند و با نماد $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و V زیرمجموعه‌ای از آن باشد، مجموعه‌ی V را ضعیف بسته، ضعیف کراندار و ضعیف فشرده نامند، هرگاه V به ترتیب نسبت به توپولوژی ضعیف، بسته، کراندار و فشرده باشد.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد. دنباله‌ی $\{x_n\}$ را ضعیف‌همگرا به $x \in X$ نامند، هرگاه برای هر $f \in X^*$ داشته باشیم

$$\lim_{n \to \infty} f\ x_n = f\ x.$$

تعریف ۳۵.۱. فرض کنید X فضای باناخ و C زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن باشد. نگاشت $T : C \to X$ را نگاشت غیر انبساطی گویند، هرگاه برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y||.$$

گزاره ۳۶.۱ هر نگاشت غیرانبساطی، پیوسته است.

اثبات. فرض کنید X فضای باناخ و C زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن باشد. نگاشت غیر انبساطی دلخواه $T : C \to X$ را در نظر بگیرید. برای هر $\epsilon > 0$، δ را عدد دلخواهی در $(0, \epsilon]$ در نظر می‌گیریم و در این صورت برای هر $x, y \in C$ که $||x - y|| < \delta$ خواهیم داشت

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y|| < \delta \leq \epsilon.$$

لذا $||Tx - Ty|| < \epsilon$. بنابراین T روی C پیوسته است. ■

نتیجه ۳۷.۱ توابع غیرپیوسته، غیرانبساطی نیستند.

تعریف ۳۸.۱. فضاهای متریک (X, d_X) و (Y, d_Y) را در نظر بگیرید. تابع $f : X \to Y$ را یک تابع لیپ شیتز[۱] نامند، هرگاه ثابتی مانند k وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$d(f(x), f(y)) \leq k \ d(x, y).$$

و به اختصار می‌گویند «f یک تابع $Lip.$ است». k ثابت لیپ شیتز برای f نامیده می‌شود.

نکته ۳۹.۱ هر تابع $Lip.$ به طور یکنواخت پیوسته است.

نکته ۴۰.۱ هر نگاشت غیرانبساطی یک تابع $Lip.$ با ثابت لیپ شیتز $k = 1$ می‌باشد.

تعریف ۴۱.۱. فرض کنید T یک خودنگاشت روی X باشد، نقطه‌ی $x \in X$ را نقطه ثابت نگاشت T نامند، هرگاه $T(x) = x$. مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت T را با $F(T)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۴۲.۱ (قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ یا قضیه‌ی انقباض). فرض کنید (X, d) فضای متریک کامل و تابع $f : X \to X$ غیرانبساطی باشد. در این صورت f دقیقا یک نقطه‌ی ثابت دارد.

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به [۷، صفحه‌ی ۲۷۶] ■

تعریف ۴۳.۱. فرض کنید X فضای باناخ و C زیرمجموعه‌ای از آن و $T : C \to X$ نگاشتی دلخواه با مجموعه‌ی نقاط ثابت $F(T)$ باشد. نگاشت T را گاووسی‌غیرانبساطی نامند، هرگاه برای هر $z \in F(T)$ و هر $x \in C$ داشته باشیم $||Tx - z|| \leq ||x - z||$.

[۱] R.Lipschitz

تعریف ۴۴.۱. فرض کنید X فضای باناخ و C زیرمجموعه‌ای ازآن باشد. در این صورت نگاشت $T: C \to X$ با مجموعه‌ی نقاط ثابت $F(T)$ را نگاشت گاووسی غیرانبساطی اکید نامند، هرگاه داشته باشیم

$$\forall z \in F(T)\ ,\ \forall x \in C \quad , \quad ||Tx - z|| < ||x - z||.$$

تعریف ۴۵.۱. فرض کنید X فضای باناخ و C زیرمجموعه‌ی ناتهی از آن و $T: C \to X$ نگاشتی دلخواه باشد. دنباله‌ی $\{x_n\}$ دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی $(a.f.p.s)$[1] برای T در C نامیده می‌شود، هرگاه $\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| = ۰$.

لم زیر را گئوبل [2] و کیرک [3]، بیان و اثبات نموده‌اند. این لم کاربرد زیادی در اثبات بسیاری از قضایای نقطه ثابت آورده شده در این پایان‌نامه، دارد.

لم ۴۶.۱ فرض کنید $\{w_n\}$ و $\{z_n\}$ دنباله‌های کرانداری در فضای باناخ X هستند که به ازای هر $\lambda \in (۰, ۱)$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ روابط زیر برای آنها برقرار است

$$z_{n+۱} = \lambda w_n + (۱ - \lambda) z_n \quad \text{و} \quad ||w_{n+۱} - w_n|| \le ||z_{n+۱} - z_n||.$$

در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} ||w_n - z_n|| = ۰.$$

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به [۶]. ■

گزاره ۴۷.۱ فرض کنید X فضای باناخ و C زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته، محدب و کراندار و $T: C \to C$ نگاشتی غیرانبساطی باشد، در این صورت T دارای دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی است.

اثبات. C زیرمجموعه‌ای بسته از فضای باناخ X و لذا خود باناخ است و باتوجه به محدب بودن C می‌توان دنباله‌ی $\{x_n\}$ را برای هر $\lambda \in (۰, ۱)$ و هر $n \in \mathbb{N}$ با فرض $x_۱ \in C$ به صورت زیر تعریف کرد

$$x_{n+۱} = \lambda T x_n + (۱ - \lambda) x_n.$$

---

[1] approximate fixed point sequence

[2] Geobel

[3] Kirk

و چون T یک نگاشت غیرانبساطی است، لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$||Tx_{n+۱} - Tx_n|| \leq ||x_{n+۱} - x_n||.$$

از طرفی C مجموعه‌ای کراندار و بنابراین دو دنباله‌ی $\{x_n\}$ و $\{Tx_n\}$ کراندارند و در نتیجه بنابر لم ۴۶.۱،

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| = ۰$$

و این نشان می‌دهد که $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی نقطه ثابت تقریبی برای T در C می‌باشد. ■

تعریف ۴۸.۱. فرض کنید X فضای باناخ و C زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته و محدب از X و $T : C \to C$ نگاشتی غیرانبساطی باشد. مجموعه‌ی C دارای خاصیت نقطه ثابت تقریبی $(a.f.p.p)$[۱] است، هرگاه

$$inf\{||x - Tx|| \quad , x \in C\} = ۰.$$

تعریف ۴۹.۱. فرض کنید C زیرمجموعه‌ی ناتهی، محدب، بسته و کراندار از فضای باناخ X باشد. گویند فضای X خاصیت نقطه ثابت (FPP)[۲] دارد، هرگاه هر نگاشت غیرانبساطی $T : C \to C$، دارای نقطه ثابت باشد.

تعریف ۵۰.۱. فرض کنید C زیرمجموعه‌ی ناتهی، محدب و ضعیف فشرده از فضای باناخ X باشد. گویند فضای X خاصیت نقطه ثابت ضعیف $(WFPP)$[۳] دارد، هرگاه هر نگاشت غیرانبساطی $T : C \to C$، دارای نقطه ثابت باشد.

در فصل بعدی خواهیم دید که هر فضای باناخ در صورتی که نرم آن ساختار مناسبی داشته باشد(به عنوان مثال، X فضای محدب یکنواخت باشد)، یک فضای دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف است.

[۱] approximate fixed point property
[۲] Fixed Point Property
[۳] Weak Fixed Point Property

تعریف ۵۱.۱. فضای l^P فضای همه‌ی دنباله‌های مختلط مانند $x = \{x_n\}$ است که $||x||_P = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^P)^{\frac{1}{P}} < \infty$. به عبارتی

$$l^P = \{\{x_n\} \mid ||x_n||_P = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^P)^{\frac{1}{P}} < \infty , n \in \mathbb{N} \}$$

تعریف ۵۲.۱. فضای X را دارای خاصیت اوپیال [1] گویند، هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X که ضعیف همگرا به z است، رابطه‌ی زیربه ازای هر $y \in X$ که $y \neq z$ برقرار باشد

$$\liminf_{n\to\infty} ||x_n - z|| < \liminf_{n\to\infty} ||x_n - y||.$$

مثال ۵۳.۱ فضاهای هیلبرت، فضاهای باناخ با بعد متناهی و l^p ها($1 \leq p < \infty$)، دارای خاصیت اوپیال هستند.

تعریف ۵۴.۱. فرض کنید C زیرمجموعه‌ی از فضای باناخ X و $M \subseteq C$ و T نگاشتی روی C باشد. مجموعه‌ی M را $T-$ ثابت نامند هرگاه برای هر $x \in M$ داشته باشیم $Tx \in M$.

تعریف ۵۵.۱. نگاشت T دارای جابجایی مینیمال مثبت روی مجموعه‌ی C می‌باشد، هرگاه

$$inf\{||x - Tx|| , x \in C\} > 0.$$

تعریف ۵۶.۱. نقطه‌ی a نقطه‌ی کلاستر [2]دنباله‌ی $\{x_n\}$ نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر همسایگی از a مانند U، نامتناهی جمله از دنباله‌ی $\{x_n\}$ در U قرار بگیرد. به عبارتی $m \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq m$ داشته باشیم $x_n \in U$.

قضیه ۵۷.۱ a نقطه‌ی کلاستر دنباله‌ی $\{x_n\}$ است اگر و تنها اگر زیردنباله‌ای از آن به a همگرا باشد.

اثبات. اگر زیردنباله‌ی $\{x_{n_j}\}$ موجود باشد که به a همگرا باشد، لذا نامتناهی جمله‌ی آن در همسایگی دلخواهی از a مانند U قرار می‌گیرد و چون $\{x_{n_j}\} \subseteq \{x_n\}$، لذا می‌توان چنین بیان داشت که نامتناهی

[1] Zdzislow. Opial

[2] Cluster