بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

کاربرد روش اختلال هموتوپی در حل عددی مسائل مقدار مرزی

استاد راهنما: دکتر قاسم برید لقمانی

استاد مشاور: دکتر محمدرضا هوشمنداصل

پژوهش و نگارش: زینب صاحبی

مهر ماه ۱۳۸۷

با بضاعت کم تقدیم به:

پدر عزیز و مادر مهربانم

قدردانی و تشکر

سپاس یزدان پاک را.

اکنون که با عنایت خداوند سبحان کار تدوین این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانی که در به ثمر رسیدن این پژوهش مرا همراهی نمودند تشکر و قدردانی کنم.

از زحمات بی دریغ استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی که پیمودن این مسیر بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان میسر نبود خالصانه سپاسگذاری می‌کنم.

با تقدیر و تشکر از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل که با راهنمایی‌های ارزشمندشان بنده را مورد بذل عنایت خود قرار دادند.

از استاتید گرامی جناب آقای دکتر فرید (محمد) مالک قائینی و جناب آقای دکتر مهدی احمدی‌نیا که داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، خاضعانه سپاسگذارم.

از خانواده‌ی عزیزم، بخصوص پدر و مادر بزرگوارم که همیشه همراه و مشوق من بوده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم و برای ایشان آرزوی توفیق و بهروزی دارم.

از کلیه اساتیدی که در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد از محضر آنان کسب فیض نمودم، همچنین سرکار خانم عابدینی و سرکار خانم عباسی‌زاده و تمامی دوستان تشکر و قدردانی می‌نمایم.

زینب صاحبی

مهر ماه ۱۳۸۷

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	**صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی** **دوره کارشناسی ارشد**	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی خانم زینب صاحبی دانشجوی کارشناسی ارشد

رشته/گرایش: ریاضی کاربردی

تحت عنوان: کاربرد روش اختلال هموتوپی در حل عددی مسائل مقدار مرزی

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۸۷/۷/۲۷ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۷۵ به حروف نوزده و هفتاد و پنج صدم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	قاسم برید لقمانی	
استاد/ استادان مشاور:	محمدرضا هوشمند اصل	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	فرید(محمد) مالک قائینی	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	مهدی احمدی نیا	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: ابوالفضل میرجلیلی

امضاء:

چکیده

در این پژوهش پس از پرداختن به مقدماتی از روش‌های اختلال و آنالیز هموتوپی (HAM)، روش جدید اختلال هموتوپی (HPM) را برای حل مسائل مقدار اولیه و مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی معرفی می‌کنیم. در پایان روش مذکور برای حل دستگاه‌های معادلات مقدار مرزی معمولی مرتبه دوم، توسعه داده می‌شود. روش HPM طی روندی ساده، کارا و همگرا با قرار دادن مسائل مورد نظر در خانواده‌ی مسائل اختلالی، جواب مساله را در قالب یک سری محاسبه می‌کند. این روش بسیاری از نواقص روش‌های اختلالی موجود را برطرف کرده و بخصوص برای حل مسائل اختلالی فاقد پارامتر اختلال و مسائل غیرخطی، بسیار موثر است.

فهرست مندرجات

مقدمه

با گسترش سریع علوم غیرخطی در دو دهه‌ی اخیر، استقبال فزاینده‌ایی در میان دانشمندان و مهندسان نسبت به روش‌های تحلیلی حل مسائل غیرخطی به وجود آمده است. با وجود این که امروزه یافتن جواب مسائل خطی با استفاده از کامپیوتر بسیار ساده شده است، اما هنوز حل مساله‌های غیرخطی با استفاده از روش‌های عددی یا تحلیلی کار دشواری است. از دلایل این امر می‌توان به حساسیت اغلب این روش‌ها نسبت به تقریب اولیه‌ی جواب اشاره کرد. بنابراین دستیابی به نتایج همگرا با استفاده از این روش‌ها، بدون تقریب اولیه‌ی مناسب کار مشکلی است.

روش‌های اختلالی ابزار متنوعی برای حل تحلیلی مسائل غیرخطی در شاخه‌های مهندسی فراهم کرده و به طور مداوم در حال گسترش هستند. اما این روش‌ها نیز مانند سایر روش‌های مجانبی حل مسائل غیرخطی، محدودیت‌های خاص مربوط به خودشان را دارند. بیشتر روش‌های اختلالی بر اساس فرض وجود پارامتر اختلال در مساله، شکل گرفته‌اند که این فرض کاربرد روش‌های اختلالی را محدود می‌کند. در واقع همان طور که می‌دانید، بیشتر مسائل غیرخطی، بخصوص مسائل قویا غیرخطی، فاقد پارامتر اختلال هستند. بعلاوه تعیین پارامتر اختلال کار مشکلی است و به روش‌های ویژه‌ای نیاز دارد. اگر انتخاب این پارامتر به درستی انجام گیرد، نتایج حاصل بسیار ایده‌ال هستند ولی انتخاب نامناسب پارامتر اختلال، اثرات نامطلوبی روی جواب می‌گذارد. حتی اگر مسائل غیرخطی دارای پارامتر اختلال باشند و بتوان آن‌ها را با استفاده از روش‌های اختلالی حل کرد، جواب مجانبی به دست آمده در اکثر موارد فقط برای مقادیر کوچک پارامتر اختلال معتبر است. مثلا در روش مقیاس‌های چندگانه جواب مجانبی تنها در مقدارهای کوچک پارامتر اختلال به طور یکنواخت معتبر می‌شود [۳۹].

روش‌های تحلیلی زیادی مانند روش تجزیه‌ی آدومیان، روش بهبود یافته‌ی پوانکاره-لیندستدت، روش تکرارهای وردشی، روش تانژانت هیپربولیک و ... برای حل مسائل غیرخطی وجود دارند. در سال‌های اخیر روش‌های دیگری معرفی شده‌اند که در حل مساله، نیازی به پارامتر اختلال ندارند. روش اختلال پارامتری شده، روش پارامتر ساختگی و روش دلتا جزء این دسته از روش‌ها محسوب می‌شوند.

لیائو[1] [۲۴] بر اساس مفهوم هموتوپی در توپولوژی روشی را ارائه کرد که جواب مساله را در قالب فرم عمومی سری‌های تیلور محاسبه می‌کند. این روش موسوم به روش آنالیز هموتوپی است. سری جوابی که با روش آنالیز هموتوپی محاسبه می‌شود، شامل یک پارامتر آزاد $\hbar$ است. انتخاب دقیق این پارامتر به همگرایی سریع‌تر جواب منجر می‌شود.

روش دیگر حل معادلات غیرخطی که اساس کار ما را در این پایان‌نامه تشکیل می‌دهد، روش اختلال هموتوپی است که توسط هی[2] [۱۸, ۲۱, ۲۲, ۲۳] با ترکیب روش‌های اختلالی با هموتوپی در توپولوژی، تعریف شد. این روش بدون وابستگی به وجود پارامتر اختلال و با تبدیل مساله‌ی غیرخطی به یک صورت ساده، جواب این گونه مسائل را در قالب یک سری همگرا محاسبه می‌کند. در روش اختلال هموتوپی بر خلاف روش آنالیز هموتوپی که برای محاسبه‌ی جواب یک سری نامتناهی را تشکیل می‌دهد، تنها با انجام چند تکرار (اغلب بین دو تا چهار تکرار) جواب مجانبی مساله محاسبه می‌شود [۲۴].

در این پایان‌نامه پس از آشنایی مقدماتی با روش‌های اختلالی و هموتوپی به ترتیب در فصل‌های دوم و سوم، در فصل آخر روش‌های تحلیلی و عددی اختلال هموتوپی توضیح داده می‌شوند و نتایج تحلیلی و عددی حاصل از کاربرد روش HPM در حل مسائل مقدار مرزی معمولی، ارائه می‌شوند (نتایج عددی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB 7.1 محاسبه شده‌اند). در خاتمه روش اختلال هموتوپی را برای حل دستگاه‌های مقدار مرزی معمولی توسعه می‌دهیم و مسائل مانع مرتبه دوم را با این روش حل می‌کنیم.

---
[1] Liao
[2] He

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور مختصر به مفاهیمی که در مطالعه‌ی این پایان‌نامه مورد نیاز هستند، اشاره می‌کنیم. ابتدا با مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی آشنا می‌شویم و در ادامه به تعریف مفهوم توپولوژیک هموتوپی می‌پردازیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی

بسیاری از مسائل مهم و برجسته‌ی مهندسی، علوم طبیعی و علوم اجتماعی وقتی به زبان ریاضی فرمول‌بندی شوند، به معادله‌ای می‌انجامند که شامل مشتق یا مشتق‌هایی از یک تابع مجهول هستند. چنین معادله‌ای را یک معادله‌ی دیفرانسیل می‌نامیم. معادلات دیفرانسیل را می‌توان به طور عمده به دو دسته‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی تقسیم کرد [۵۳].

تعریف ۱.۲.۱. هر معادله شامل یک تابع مجهول مانند y، چند متغیر مستقل و مشتقات جزئی تابع نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی[۱] (PDE) می‌نامیم.

این نوع معادلات در فرمول‌بندی مسائل شامل توابع چند متغیره مانند مسائل انتشار صوت یا حرارت، الکترواستاتیک و الکترودینامیک به وجود می‌آیند. به عنوان مثال معادله‌ی لاپلاس

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}}=\circ \qquad (۱.۲.۱)$$

یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی است.

[۱] Partial Differential Equation

تعریف ۲.۲.۱. اگر y تابعی مجهول از متغیر مستقل x و $y^{(n)}$ نمایش مشتق مرتبه nام آن باشد، آنگاه معادله‌ی

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (۲.۲.۱)$$

یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی[۱] (ODE) نامیده می‌شود. منظور از مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل، بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در آن معادله است، بنابراین معادله‌ی (۲.۲.۱) یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه n است.

معادلات دیفرانسیل معمولی در شاخه‌های مختلف علوم مانند هندسه، مکانیک، ستاره‌شناسی، شیمی، زیست‌شناسی و اقتصاد مطرح می‌شوند. بسیاری از ریاضیدان‌های مشهور از جمله نیوتن، لایبنیتز، خانواده‌ی برنولی، ریکاتی، دالامبر و اویلر در زمینه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی کار کرده‌اند.

تعریف ۳.۲.۱. اگر در رابطه‌ی (۲.۲.۱) بتوانیم تابع f را به صورت ترکیبی خطی از مشتق‌های y، یعنی به شکل

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}(x) + r(x) \qquad (۳.۲.۱)$$

بنویسیم، که در آن $r(x)$ و $a_i(x)$ ها توابعی پیوسته از x هستند، معادله‌ی دیفرانسیل (۱.۲.۱) خطی و در غیر این صورت غیرخطی نامیده می‌شود. اگر $r(x) = 0$ این معادله همگن است، و اگر $r(x) \neq 0$ یک معادله‌ی غیرهمگن داریم.

معادله‌های دیفرانسیل معمولی خطی را می‌توان به کمک روش‌های تحلیلی حل کرد، اما بیشتر معادله‌های دیفرانسیل معمولی غیرخطی هستند و نمی‌توان جواب دقیق آن‌ها را محاسبه کرد. برای حل این دسته از مسائل روش‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. متداول‌ترین معادله‌های دیفرانسیل معمولی، از مرتبه‌ی اول و دوم هستند. به عنوان مثال، یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم خطی ناهمگن به صورت

$$y''(x) = h(x)y'(x) + g(x)y(x) + f(x), \quad a < x < b \qquad (۴.۲.۱)$$

است که به شرط پیوستگی توابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ به ازای هر شرط اولیه‌ی $y(a) = \alpha$ و $y'(a) = \beta$ جواب یکتا دارد.

---
[۱] Ordinary Differential Equation

تعریف ۴.۲.۱. اگر به معادله‌ی (۴.۲.۱) شرایط اولیه‌ی $y(a) = \alpha$ و $y'(a) = \beta$ را اضافه کنیم (a، α و β اعداد حقیقی دلخواه هستند)، معادله دیفرانسیل حاصل یک مساله‌ی مقدار اولیه[1] (IVP) نامیده می‌شود. با اضافه کردن شرایط مرزی $y(a) = \alpha$ و $y(b) = \beta$، موسوم به شرایط مرزی دو نقطه‌ای به (۴.۲.۱)، معادله‌ی به دست آمده یک مساله‌ی مقدار مرزی[2] (BVP) است. در یک مساله‌ی مقدار مرزی، در حالت کلی ممکن است مقادیر تابع در بیش از یک نقطه معلوم باشند که معمولا تعداد این نقاط برابر با دو است. چنین مساله‌ای را یک مساله‌ی مقدار مرزی دو نقطه‌ای می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. در حالت کلی، یک مساله‌ی مقدار مرزی مرتبه n را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$L[y] = r \tag{۵.۲.۱}$$

$$U_k[y] = r_k, \quad k = ۱, ۲, \cdots, n \tag{۶.۲.۱}$$

که در آن L یک عملگر دیفرانسیل مرتبه n، r یک تابع معلوم و U_k ها عملگرهای مربوط به شرایط مرزی مساله هستند. یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی معمولی مرتبه n با شرایط مرزی دو نقطه‌ای با روابط

$$\begin{aligned} L[y] &= \sum_{i=۰}^{n} f_i(x) y^{(i)}(x) \\ &= f_۰(x)y(x) + f_۱(x)y'(x) + \cdots + f_n(x)y^{(n)}(x) = r(x), \quad a < x < b \\ U_k[y] &= \sum_{i=۰}^{n-۱} \left(\alpha_{k,i} y^{(i)}(a) + \beta_{k,i} y^{(i)}(b)\right) = r_k, \quad k = ۱, ۲, \cdots, n \end{aligned}$$

نشان داده می‌شود که در آن $\alpha_{k,i}$ ها اعداد حقیقی ثابت هستند.

۳.۱ قضیه‌ی تابع ضمنی

قضیه ۱.۳.۱. G را تابعی از دو متغیر حقیقی x و y در نظر گرفته و فرض کنید G در یک همسایگی $(x_۰, y_۰)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. اگر $G(x_۰, y_۰) = ۰$ و در این نقطه داشته

[1] Initial Value Problem

[2] Boundary Value Problem

باشیم $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$ ، آنگاه عدد مثبت δ و تابع پیوسته مشتق‌پذیر f موجودند به طوری که تابع f در همسایگی $|x - x_0| < \delta$ تعریف شده است و برای این همسایگی روابط زیر برقرارند؛

$$f(x_0) = y_0, \qquad G(x, f(x)) = 0.$$

۴.۱ مقدمات جبر خطی

در این بخش به چند تعریف از جبر خطی اشاره می‌کنیم [۶۳].

تعریف ۱.۴.۱. یک مجموعه مانند X که از

۱- یک میدان F شامل اسکالرها؛

۲- یک مجموعه از بردارها مانند V؛

۳- یک عمل به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β در V بردار $\alpha + \beta$ را نسبت می‌دهد و در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

ب: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

ج: بردار یکتای 0 به نام بردار صفر در V وجود دارد، به طوری که به ازای هر $\alpha \in V$
$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

د: به ازای هر بردار $\alpha \in V$ بردار یکتای $-\alpha \in V$ موجودست به طوری که
$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$

۴- یک قاعده یا عمل به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از میدان F و هر بردار $\alpha \in V$ بردار $c\alpha \in V$ را که حاصل ضرب c و α نامیده می‌شود، نسبت می‌دهد و برای $c, c_1, c_2 \in F$ و $\alpha, \beta \in V$ دارای خواص زیر است:

الف: $\alpha \times 1 = 1 \times \alpha = \alpha$

ب: $(c_1\, c_2)\, \alpha = c_1\, (c_2\, \alpha)$

ج: $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$

د: $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$

تشکیل شده است، فضای خطی یا برداری نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۴.۱. بازه‌ی $I=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. نگاشت $\alpha: I\to\mathbb{R}^n$ از کلاس $C^\infty(C^1)$ را یک خم (منحنی) در $\mathbb{R}^n$ نامیده و با C نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۴.۱. منظور از یک کمان (قوس) در $\mathbb{R}^n$، منحنی α با معادله پارامتری زیر است:

$$\alpha(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)),\quad t\in I'\subset I$$

به عبارت دیگر هر کمان بخشی از یک منحنی است.

تعریف ۴.۴.۱. منحنی C با معادله‌ی پارامتری $\alpha(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$ را یک منحنی هموار گوییم، هرگاه برای هر $1\leq i\leq n$ توابع x'_i موجود و پیوسته باشند.

تعریف ۵.۴.۱. یک منحنی پارامتری در فضای $\mathbb{R}^n$، تابع هموازی مانند $\alpha: I\to\mathbb{R}^n$ است که $\alpha(t)\longmapsto t$ (I یک بازه‌ی باز در $\mathbb{R}$ است).

۵.۱ هموتوپی در توپولوژی

در این بخش با مفهوم توپولوژیک هموتوپی آشنا می‌شویم [۴۷].

تعریف ۱.۵.۱. یک توپولوژی[1] روی یک مجموعه‌ی ناتهی X، گردایه‌ای چون τ از زیر مجموعه‌های X است که درشرایط زیر صدق می‌کند:

الف: X و $\varnothing$ عضو τ هستند؛

ب: اجتماع هر زیر گردایه از اعضای τ عضو τ است؛

ج: اشتراک هر زیر گردایه‌ی متناهی از اعضای τ به τ تعلق دارد.

[1] Topology

تعریف ۲.۵.۱. مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی τ، یک فضای توپولوژیک[۱] نامیده می‌شود و فضای توپولوژیک X و τ را با (X, τ) نمایش می‌دهیم. عناصر τ را مجموعه‌های باز می‌نامیم.

تعریف ۳.۵.۱. فرض کنید (X, τ) و (Y, τ) دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \to Y$ را یک نگاشت پیوسته می‌نامیم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی باز در Y مانند p، مجموعه‌ی $f^{-1}(p)$ در X باز باشد.

مثال ۱.۵.۱. اگر X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد، آنگاه مجموعه‌ی توانی آن (مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های X) یک توپولوژی روی X تعریف می‌کند که این توپولوژی، توپولوژی گسسته نامیده می‌شود. همچنین مجموعه‌ی شامل X و $\varnothing$ یک توپولوژی روی X است و توپولوژی بدیهی یا ناگسسته نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۵.۱. فرض کنید $I = [0, 1]$ بازه‌ی واحد حقیقی، X و Y فضاهای توپولوژیک و f و f' دو نگاشت پیوسته از فضای X بتوی فضای Y باشند. در این صورت نگاشت‌های f و f' را هموتوپ[۲] می‌نامیم، هرگاه نگاشت پیوسته‌ای چون $F : I \times X \to Y$ موجود باشد به طوری که به ازای هر x از X

$$F(0, x) = f(x), \quad F(1, x) = f'(x),$$

نگاشت F را یک هموتوپی[۳] بین f و f' می‌نامیم. هموتوپ بودن f و f' با $f \simeq f'$ نمایش داده می‌شود.

به عبارت دیگر هر هموتوپی، یک خانواده از توابع تک پارامتری پیوسته از نگاشت‌های تعریف شده از فضای X بتوی Y است. اگر t پارامتر معرف زمان باشد، هنگامی که زمان از صفر تا یک تغییر می‌کند، هموتوپی F نمایشگر دگردیسی (تغییر شکل) پیوسته‌ی f به f' است.

لم ۱.۵.۱. رابطه‌ی $\simeq$ یک رابطه‌ی هم ارزی است.

---

۱ Topological space

۲ Homotop

۳ Homotopy

برهان. برای اثبات این لم خواص یک رابطه‌ی هم ارزی را بررسی می‌کنیم.

به ازای هر تابع مفروض f، با تعریف نگاشت $F(t,x) = f(x)$ به وضوح نتیجه می‌شود $f \simeq f$. حال فرض کنید $f \simeq f'$ ، نشان می‌دهیم $f' \simeq f$ و رابطه‌ی $\simeq$ انعکاسی است. F را هموتوپی بین f و f' در نظر می‌گیریم. در این صورت، نگاشت $G(t,x) = F(1-t,x)$ یک هموتوپی بین f' و f است. پس $f' \simeq f$ و رابطه‌ی $\simeq$ تقارنی است. و بالاخره فرض کنید $f \simeq f'$ و $f' \simeq f''$ ، نشان می‌دهیم $f \simeq f''$. فرض کنید F هموتوپی بین f و f' باشد و F' هموتوپی بین f' و f'' . نگاشت $G : I \times X \to Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(t,x) = \begin{cases} F(2t,x), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F'(2t-1,x), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad (7.5.1)$$

به ازای $t = \frac{1}{2}$ داریم:

$$F(2t,x) = F(1,x) = f'(x) = F'(0,x) = F'(2t-1,x)$$

پس G خوش‌تعریف است. حال بنابر لم چسب [63]، از آنجا که G روی هر دو زیر مجموعه‌ی بسته‌ی $X \times [0,\frac{1}{2}]$ و $X \times [\frac{1}{2},1]$ از $I \times X$ پیوسته است، پس بر کل $I \times X$ پیوسته می‌شود. در نتیجه G یک هموتوپی بین f و f'' است و $f \simeq f''$. □

برای آشنایی بیشتر با هموتوپی‌ها، اکنون یک حالت خاص را که در آن f یک راه در X است، در نظر می‌گیریم.

تعریف 5.5.1. اگر $f : [0,1] \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که

$$f(0) = x_0, \quad f(1) = x_1$$

گوییم f در X، یک راه از x_0 به x_1 است. همچنین x_0 را نقطه‌ی آغازی و x_1 را نقطه‌ی انجامی راه f می‌نامیم.

می‌توان بین راه‌ها در X ، هموتوپی خاصی موسوم به هموتوپی راهی تعریف کرد.

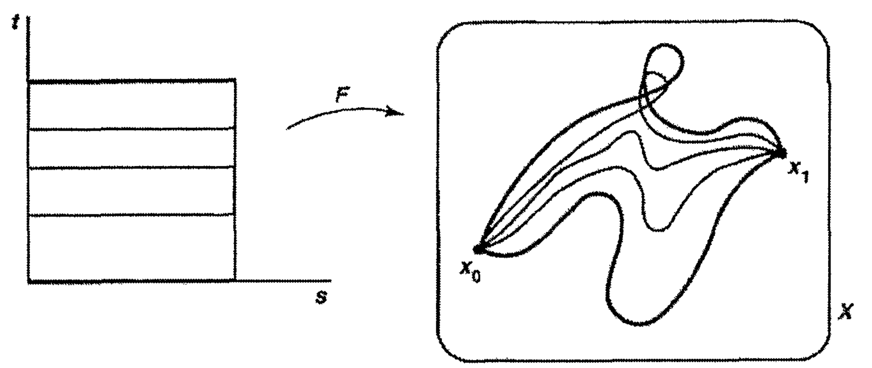
تعریف 6.5.1. راه‌های f و f' را در X که بازه‌ی $I = [0,1]$ را بتوی X می‌نگارند هموتوپ راهی می‌نامیم، هرگاه هر دو دارای نقطه‌ی آغازی x_0 و نقطه‌ی انجامی x_1 باشند و نگاشت

پیوسته‌ای مانند $F : I \times I \to X$ موجود باشد به طوری که به ازای هر s و t از I روابط

$$F(s,\circ) = f(s), \qquad F(s,\text{۱}) = f'(s) \tag{۸.۵.۱}$$

$$F(\circ,t) = x_\circ, \qquad F(\text{۱},t) = x_\text{۱} \tag{۹.۵.۱}$$

برقرار باشند. F را هموتوپی راهی[۱] بین f و f' می‌نامیم. اگر f و f' هموتوپ راهی باشند، می‌نویسیم $f \simeq_p f'$ (شکل (۱.۵.۱) ملاحظه شود).



شکل ۱.۵.۱ : نمایش هموتوپی راهی بین f و f' [۴۷].

در تعریف (۶.۵.۱) شرط (۸.۵.۱) در واقع هموتوپ بودن f و f' را بیان می‌کند و شرط (۹.۵.۱) بیانگر این است که به ازای هر t، نگاشت $s \longmapsto F(s,t)$ یک راه از $x_\circ$ به $x_\text{۱}$ است. به عبارت دیگر شرط اول حاکی از این است که F نمایشگر یک دگردیسی پیوسته است که راه f را به f' می‌نگارد و شرط دوم بیانگر ثابت ماندن نقاط انتهایی راه‌ها در این دگردیسی است.

لم ۲.۵.۱. رابطه‌ی $\simeq_p$ یک رابطه‌ی هم ارزی است.

برهان. مشابه لم (۱.۵.۱). $\square$

مثال ۲.۵.۱. فرض کنید f و g دو نگاشت دلخواه از فضای توپولوژیک X بتوی $\mathbb{R}^\text{۲}$ باشند. به سادگی می‌توان هموتوپ بودن f و g را بررسی کرد. در واقع نگاشت

$$F(t,x) = (\text{۱}-t)f(x) + tg(x)$$

[۱] Path homotopy