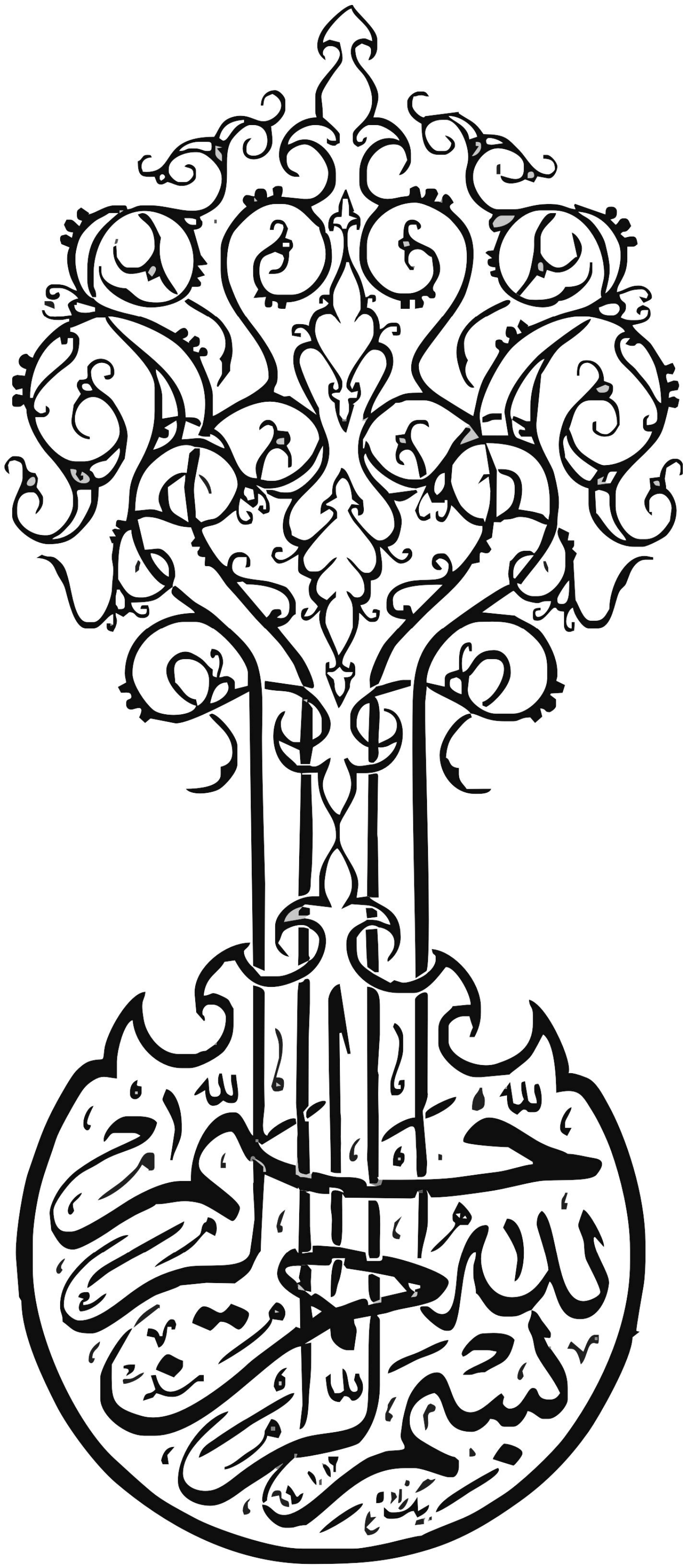
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

عنوان:

تعیین تابع توزیع ماکزیمم آنتروپی با قید معلوم بودن L-گشتاورها

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رحیم زاده ثانی

تدوین:

علی رضا چاجی

شهریور۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر و

خانواده گرامی‌ام

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

تقدیر و تشکر:

بدون شک انجام این پایان‌نامه بدون همکاری اساتید محترم و دوستان گرامی انجام پذیر نبود، لذا وظیفه خود می‌دانم از زحمات جناب آقای دکتر علی اکبر رحیم زاده ثانی که راهنمایی پایان نامه بنده را قبول کردند و جناب آقای دکتر عین اله پاشا که در طول این دوره از توصیه‌های ایشان استفاده نموده‌ام، سپاسگزاری و قدردانی می‌نمایم.

از آقای دکتر شهرام منصوری که داوری این پایان‌نامه را انجام دادند، تشکر کرده و برای ایشان توفیق روز افزون را از درگاه باری تعالی خواستارم.

فرصت را مغتنم شمرده از دوستان خوبم آقایان: مرتضی رئیسی، حمید رضا طاهری زاده زارچ، احسان قاسمی، مرتضی آقابابایی جزی، حمزه ابراهیمی و ... که در امور تدوین این پایان نامه اینجانب را یاری نموده اند، تشکر می‌نمایم.

چکیده:

محاسبه آماره‌های مرتبه بالا شبیه چولگی و کشیدگی (که به عنوان c-گشتاورها می شناسیم)، نسبت به اندازه نمونه و داده‌های پرت تاثیر پذیرند. برای بر طرف کردن این مشکلات در سال ۱۹۹۰ هاسکینگ [1] آماره‌هایی تحت عنوان L-گشتاورها معرفی کرد. ما با بیان و شرح آنها، توزیع ماکزیمم آنتروپی به شرط معلوم بودن r تای اول L-گشتاورها را تعیین می‌کنیم. این کار معادل با محاسبه امید آماره‌های مرتب از نمونه به اندازه r است. این کلاس از توزیع‌های آنتروپی ماکزیمم شامل توزیع‌های یکنواخت، نمایی و لجستیک می‌باشد. همچنین توزیع‌های آنتروپی ماکزیمم به شرط مقادیر امید آماره‌های مرتب را به دست می‌آوریم.

واژگان کلیدی: برآورد چگالی، تابع چگالی چندک، توزیع لجستیک، ناپارامتری

[1] J.R.Hosking

فهرست مطالب

پیش گفتار:

در این پایان‌نامه هدف معرفی L– گشتاورها و مزایای آن در برآورد چگالی احتمال به روش ماکزیمم آنتروپی است.

L– گشتاورها اولین بار توسط هاسکینگ[1] بیان شدند. این پایان‌نامه که یکی از محورهای اصلی آن مقاله:

J. R. M. Hosking, Distributions with maximum entropy subject to constraints on their L-moments or expected order statistics, 2007

است، به کاربرد L– گشتاورها در تعیین توزیع ماکزیمم آنتروپی می‌پردازد.

فصل اول پایان‌نامه شامل مقدماتی در مورد آنتروپی، نظریه اطلاع، روش ماکزیمم آنتروپی و همچنین مختصری در مورد ارتباط آنتروپی و واریانس است.

فصل دوم به معرفی L– گشتاورها و برآوردگر های آنها می پردازیم، محور اصلی این فصل پایان نامه، مقاله زیر :

Hosking, J.R.M., L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. J. Roy. Statist, 1990.

است. در این فصل مزایای L– گشتاورها ، نسبت به c- گشتاورها بیان می شود، بعلاوه برآورد L– گشتاورها بوسیله PWMS ها نیز آورده شده است

فصل سوم که اساس کار ماست، برآورد توزیع ماکزیمم آنتروپی به شرط L– گشتاورها یا امید آماره‌های مرتب است. در این فصل تابع چندک را، که ماکزیمم آنتروپی به شرط یک مجموعه قیود است، به دست می‌آوریم، این جواب برای شرط روی L– گشتاورها و امید آماره‌های مرتب بکار می‌رود. ضمن بیان مثال‌هایی در این زمینه، مثالی ناپارامتری نیز ارائه می کنیم. در پایان بعضی نکات تکمیلی، همراه با نتیجه گیری بحث، می‌آوریم.

[1] J.R.Hosking

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

آنتروپی

۱-۱مقدمه:

آنتروپی نخستین بار توسط شانون (۱۹٤۸) بیان شد، که می‌توان آنرا با بی نظمی معادل دانست، هرچه نظم سیستمی بالا رود آنتروپی آن کاهش می‌یابد و بالعکس، کاهش نظم باعث افزایش آنتروپی می‌شود.

برای بیان کمی اطلاع، نظریه اطلاع مطرح شد. میزان اطلاعی که هر موضوع به ما می‌دهد، به وسیله نسبت تعداد سوالات لازم برای رسیدن به موضوع، اندازه گیری می‌شود. می‌توان گفت مفهوم آنتروپی شانون هسته اصلی نظریه اطلاع را تشکیل می‌دهد و گاهی اوقات تحت عنوان اندازه عدم قطعیت به کار می‌رود. اگر موضوع مورد نظر ، در فضایی غیر هم شانس قرار داشته باشد، متوسط تعداد سؤالهایی که برای رسیدن به موضوع لازم است ، آنتروپی شانون (اطلاع شانون) گوییم و با $H(X)$ یا $H(f)$ نشان می‌دهیم.

در این فصل ضمن تعریف آنتروپی و ویژگی های آن ، مقدماتی در زمینه روش ماکزیمم آنتروپی ارائه می‌دهیم، در پایان به رابطه آنتروپی و واریانس می‌پردازیم.

۱-۱-۱-آنتروپی شانون:

تعریف عمومی و کلی آنتروپی به صورت زیر است:

تعریف ۱-۱: فرض کنید (Ω,β,μ) فضای اندازه باشد به طوری که $\Omega=R$ یا $\Omega=N$ و f تابع اندازه پذیر از Ω به $R^+=[0,\infty)$ باشد، به طوری که در آن $\int_\Omega f d\mu=1$. آنتروپی شانون f نسبت به μ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$H(f,\mu)=-\int_{\Omega} f\ln f d\mu,$$

که در آن، اگر $f=0$ ، مقدار $f\ln f=0$ و همچنین فرض کنید flnf انتگرال پذیر است. اگر متغیر X دارای تابع چگالی احتمال f باشد، آنتروپی X را با H(X) نشان می‌دهیم. در حالتی که μ اندازه شمارا روی $N=\{0,1,2,...\}$ باشد، آنگاه:

$$H(f,\mu)=H(X)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i=1, \quad p_i \geq 0, \qquad (1-1)$$

و اگر μ اندازه لبگ باشد، داریم:

$$H(f,\mu)=-\int_{\Omega} f(x)\ln f(x)dx$$

در تعریف ۱-۱ پایه لگاریتم e (عدد نپر) در نظر گرفته شده است، واحد آنتروپی را در این حالت نات می‌نامند. اگر پایه لگاریتم ۲ باشد، واحد آنتروپی بیت است.

مثال ۱-۱ . فرض کنید X دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشد، آنتروپی متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

$$H(X)=-\sum_{x=0}^{1} p^x(1-p)^{1-x}\ln\left(p^x(1-p)^{1-x}\right)$$

$$=-(1-p)\ln(1-p)-p\ln p$$

$$=\ln\frac{(1-p)^{p-1}}{p^p}.$$

مثال ۱–۲ . متغیر تصادفی هندسی X با پارامتر p را در نظر بگیرید H(X) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H(X)=-\sum_{x=۰}^{\infty}p(۱-p)^{x}\ln\left(p(۱-p)^{x}\right)$$

$$=-\sum_{x=۰}^{\infty}p(۱-p)^{x}\left(\ln p+x\ln(۱-p)\right)\frac{۱}{۲}$$

$$=-p\ln p\sum_{x=۰}^{\infty}(۱-p)^{x}-p\ln(۱-p)\sum_{x=۰}^{\infty}x(۱-p)^{x}$$

$$=-\ln p-\frac{۱-p}{p}\ln(۱-p)$$

$$=\frac{\ln\frac{(۱-p)^{p-۱}}{p^{p}}}{p}=\frac{h(p)}{p}.$$

که در آن $h(p)$ با توجه به مثال قبل آنتروپی توزیع برنولی با پارامتر p است.

۲–۱- ویژگی و مفاهیم آنتروپی شانون :

۱)توسعه[۱]: اگر پیشامد جدید $E_{n+۱}$ با احتمال $P_{n+۱}=۰$ را به تابع احتمال اضافه کنیم، آنتروپی تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر

کاور (۱۹۹۱) $$H(P_۱,...P_n)=H(P_۱,...P_n,۰)$$

برهان :با توجه به این که $P_{n+۱}=۰$ و plnp وقتی $P=۰$ است، صفر در نظر می‌گیریم، این ویژگی اثبات می‌شود.

[۱] Expansibility

۲) تقارن[۱]: با توجه به فرمول (۱-۱) $H(P_1,P_2,...,P_n)=H(P_2,P_1,...,P_n)$ ، به عبارت دیگر آنتروپی در رابطه با ترتیب پیشامدها پایا می‌باشد [۳۲].

۳)پیوستگی[۲] : $H(P_1,P_2,...,P_n)$ تابعی پیوسته از $(P_1,P_2,...,P_n)$ است [۳۲].

٤) ماکزیمم[۳] : برای هر $n\in N$ ماکزیمم $H(P_1,P_2,...,P_n)$ زمانی به دست می‌آید که $P_1=P_2=...=P_n=\frac{1}{n}$ و مقدار آن برابر $\ln n$ می‌باشد.[٤۱]

۵) $H(p)$ یک تابع مقعر از P می‌باشد[۳۲] .

٦) $H(X_1,X_2,...,X_n)\le\sum_{k=1}^{n}H(X_k)$ و برابری تنها هنگامی رخ می‌دهد که $X_1,X_2,...,X_n$ از هم مستقل باشند[۳۲] .

مثال۱-۳. آنتروپی توزیع نرمال یک متغیره با انحراف استاندارد σ به صورت $H(X)=\ln\sqrt{2\pi e}\sigma$ است. به طور مشابه برای توزیع نرمال n متغیره با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس K، آنتروپی به صورت $H(X)=\frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\right)^n|K|$ است.

لم ۱-۱. فرض کنید $p_1, p_2, ..., p_m$ و $q_1, q_2, ..., q_m$ اعداد مثبت دلخواهی باشند. به طوری که $\sum_{i=1}^{m}p_i=\sum_{i=1}^{m}q_i=1$ در اینصورت:

$$-\sum_{i=1}^{m}p_i\ln p_i\le-\sum_{i=1}^{m}p_i\ln q_i\ .$$

[۱] Symmetry

[۲] Continuity

[۳] Maximum

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $(i=١,٢,...,m)$ $p_i = q_i$.[٣٢]

قضیه ١-١ . فرض کنیم $S_X = \{x_١, x_٢, ..., x_n\}$، تکیه‌گاه متغیر تصادفی X باشد و داشته باشیم $P = \{p_١, p_٢, ..., p_n\}$ در اینصورت:

الف) آنتروپی X کمیتی نامنفی است، یعنی $H(X) \geq ٠$.

ب) آنتروپی X صفر است اگر و تنها اگر X در وضعیت قطعیت کامل باشد.

ج) $H(X) \leq \ln n$، و تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر X دارای توزیع یکنواخت باشد. یعنی $p_١ = p_٢ = ... = p_n = \frac{١}{n}$.[٤١]

١-٣-آنتروپی توام و شرطی متغیر های تصادفی گسسته

تعریف ١-٢. آنتروپی توأم دو متغیر تصادفی گسسته Y و X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(X,Y) = -E(\ln P(x,y))$$
$$= -\sum_x \sum_y p(x,y) \ln p(x,y).$$

که در آن $P(x,y) = P(X=x, Y=y) = f(x,y)$، تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y است.

قضیه ١-٢. بین آنتروپی توأم و آنتروپی فردی رابطه زیر برقرار است.

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y),$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر X و Y مستقل باشند[٣٢] **.**

تعریف ١-٣. آنتروپی شرطی X به شرط $Y = y$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(X\,|\,Y=y)=-\sum_{x}p(x\,|\,y)\log p(x\,|\,y),$$

که $p(x\,|\,y)=P(X=x\,|\,Y=y)=f(x\,|\,y)$ تابع احتمال شرطی $(X\,|\,Y=y)$ است.

تعریف ۱-٤. آنتروپی شرطی X به شرط Y عبارت است از میانگین موزون توابع $H(X\,|\,Y=y)$ با وزن‌های $p(y)$، یعنی:

$$\begin{aligned}H(X\,|\,Y)&=-\sum_{y}p(y)\sum_{x}p(x\,|\,y)\ln p(x\,|\,y)\\&=-\sum_{y}\sum_{x}p(y)p(x\,|\,y)\ln p(x\,|\,y)\\&=-\sum_{y}\sum_{x}p(x,y)\ln p(x\,|\,y).\end{aligned}$$

قضیه ۱-۳. بین آنتروپی فردی و آنتروپی شرطی رابطه زیر برقرار است:

$$H(X\,|\,Y)\le H(X).$$

و تساوی زمانی برقرار است که X و Y مستقل باشند.[۳۲]

به عبارت دیگر میزان عدم حتمیت متغیر تصادفی X به طور متوسط، با مشاهده متغیر تصادفی Y کاهش می‌یابد.

۱-٤- آنتروپی توام و شرطی متغیرهای تصادفی پیوسته

تعریف ۱-۵. متغیر تصادفی پیوسته X، با تابع چگالی $f(x)$ را در نظر بگیرید. آنتروپی X عبارت است از:

$$H(X)=H(f(X))=-E(\ln f(X))=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\ln f(x)\,dx.$$

مثال ۱-۴. اگر $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. خواهیم داشت:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$H\left(X\right)=E\left(-\ln f\left(X\right)\right)$$

$$=\ln\sqrt{2\pi\sigma^2}+\frac{E(X-\mu)^2}{2\sigma^2}=\ln\sqrt{2\pi e\sigma^2}$$

در این مثال پایه لگاریتم را e گرفتیم. پس واحد آنتروپی بدست آمده نات خواهد بود.

تعریف ۱-۶. آنتروپی توأم دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y به صورت:

$$H\left(X,Y\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)\ln f\left(x,y\right)dxdy\,.$$

تعریف می‌شود.

۱-۴-۱-مقایسه آنتروپی متغیرهای تصادفی پیوسته و گسسته:

۱) الزاما آنتروپی یک توزیع پیوسته موجود نست، ولی آنتروپی هر متغیر گسسته موجود است..

مثال ۱-۵: فرض کنید که X دارای تابع چگالی احتمال $x \geq e$; $f(x)=\frac{(\ln x)^{-2}}{x}$ باشد. در این صورت انتگرال $-\int_{e}^{\infty}\frac{(\ln x)^{-2}}{x}\ln\left[\frac{(\ln x)^{-2}}{x}\right]dx=\infty$ واگراست و لذا $H(X)$ وجود ندارد.

۲) آنتروپی متغیر تصادفی پیوسته ممکن است منفی باشد. زیرا تابع چگالی احتمال ممکن است بزرگتر از یک باشد. در حالیکه آنتروپی متغیرهای تصادفی گسسته نمی‌تواند منفی باشد.ولی ممکن است صفر باشد:

مثال ۱-٦. فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در فاصله $\left[0,a\right]$ باشد در اینصورت:

$$H\left(X\right)=-\int_0^a \frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}dx=\ln a\,.$$

پس $H\left(X\right)$ تمام مقادیر حقیقی را می‌پذیرد.

۳) آنتروپی متغیرهای تصادفی پیوسته تحت تبدیل‌های یک به یک لزوما پایا نیستند. اگر $Y=h(x)$ یک تابع معکوس پذیر باشد.

- در حالت گسسته $H(Y)=H(X)$
- در حالت پیوسته $H(Y)=H(X)+E(\ln|h'(x)|)$

[۱۰]

مثال ۱-۷ :فرض کنید متغیر تصادفی X با مقادیری در بازه (۱و۰) یک متغیر تصادفی لگ لگ نرمال با پارامتر های $\mu_\circ$ و σ نامیده می‌شود، اگر $\ln(\ln(X^{-1}))$ دارای توزیع $N(\mu_\circ,\sigma^2)$باشد در این مورد آنتروپی به صورت:

$$H(X)=\frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2)+\mu_\circ-e^{\mu_\circ+\frac{\sigma^2}{2}}$$

است و اگر $\mu_\circ=0$ آنگاه:

$$H(X)=\frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2)-e^{\frac{\sigma^2}{2}}\,.$$

با توجه به این که آنتروپی توزیع لگ لگ نرمال با پارامتر های μ و σ برابر $\frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2)+\mu_0$ است، در نتیجه تفاوت آنتروپی توزیع نرمال با توزیع لگ لگ نرمال برابر $e^{\sigma^2/2}$ می‌باشد و هر چه σ بزرگتر شود، این تفاوت بیشتر می‌شود.

۱-۵-آنتروپی شانون در حالت چند متغیره:

اگر $\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$ یک بردار تصادفی باشد، آنگاه آنتروپی شانون به صورت زیر تعریف می‌شود (داربلای[1] و وجدا[2] (۲۰۰۰))،

$$H(\underline{X})=-\int_{R^n} f(\underline{x})\,\mathrm{Ln}\, f(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

که در آن $d\underline{x}=dx_1\dots dx_n$.

لم ۱-۲ : فرض کنید $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ دو بردار تصادفی در R^n باشد، به طوری که $\underline{Y}=f(\underline{X})$ و f تبدیلی مشتق پذیر و یک به یک از R^n به R^n است. در این صورت:

$$H(\underline{Y})=H(\underline{X})-\int_{R^n} f(\underline{x})\,\mathrm{Ln}\left|J\left(f(\underline{x})\right)\right| d\underline{x},$$

که در آن $f(\underline{X})$ تابع چگالی $\underline{X}$ و

$$J(\underline{y})=\det\left(\frac{\partial f_i^{-1}(\underline{y})}{\partial y_j}\right)_{1\le i,j\le n},$$

ژاکوبین تبدیل معکوس f^{-1} (با نماد $f_i^{-1}\equiv\left(f^{-1}\right)_i$) می‌باشد [۱۰].

---

[1] Darbellay

[2] Vajda

برای چگالی‌های متعلق به خانواده نمایی محاسبه آنتروپی با استفاده از فرمول موجود در لم (۱–۲) ساده تر می‌باشد. این چگالی ها به فرم زیر می‌باشند:

$$f(\underline{x})=\frac{1}{C(\theta)}e^{\theta T(\underline{x})}$$

که در آن $\theta\in R^n$ یک بردار از پارامترها، T یک تبدیل از R^n به R^n،و

$$C(\theta)=\int_{R^n}e^{\theta.T(\underline{x})}d\underline{x}. \qquad (۲–۱)$$

ثابت می‌باشد. (توجه شود که ۰ نشان دهنده ضرب داخلی در R^n می‌باشد.)

لم ۱–۳ : آنتروپی متغیر تصادفی $\underline{X}$، که در آن تابع چگالی $f(\underline{X})$ متعلق به خانواده نمایی رابطه (۱–۲) است به صورت زیر مشخص می‌شود [۱۰]:

$$H(\underline{X})=\text{Ln}\, C(\theta)-\frac{\theta}{C(\theta)}\int_{R^n}e^{\theta.T(\underline{x})}d\underline{x}.$$

به عنوان مثال آنتروپی تعدادی از توزیع های چند متغیره در زیر آمده است (داربلای و جدا (۲۰۰۰)).

۱) توزیع پارتوی $n-$ بعدی از نوع IV دارای تابع چگالی زیر می‌باشد:

$$f(\underline{x})=\prod_{i=}^{n}\frac{\alpha+i-1}{\gamma_i\theta_i}\left(\frac{x_i-\lambda_i}{\theta_i}\right)^{\frac{1}{\gamma_i}-1}\left[1+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j-\lambda_j}{\theta_j}\right)^{\frac{1}{\gamma_j}}\right]^{-(\alpha+n)} \qquad (۳–۱)$$

که در آن $x_i>\lambda_i,\alpha>0,\gamma_i>0,\theta_i>0,i=1,...,n$. یک توزیع پارتوی از نوع III با قرار دادن $\alpha=1$، توزیع پارتوی نوع II با قرار دادن $\gamma_i=1$ برای $i=1,...,n$ و توزیع پارتوی نوع I با قرار دادن $\gamma_i=1$ و $\lambda_i=\theta_i$ برای $i=1,...,n$ بدست می‌آید. چگالی توأم هر زیر مجموعه از مؤلفه‌های

یک بردار تصادفی پارتو، به شکل (۱-۳) می‌باشد (آرنولد[۱] (۱۹۸۳)). در این صورت آنتروپی آن به فرم زیر می‌باشد.

$$H(\underline{X})=-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}\left(\frac{\alpha+i-1}{\theta_i}\right)+(\alpha+n)\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\alpha+i-1}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\ln y_i-\left[\Psi(1)-\Psi(\alpha)\right]\left(n-\sum_{i=1}^{n}y_i\right).$$

برای بردار تصادفی پارتو $\underline{X}$ نوع II، آنتروپی با انتگرال گیری مستقیم بدست می‌آید. برای یک بردار تصادفی پارتو $\underline{Y}$ نوع IV ، آنتروپی با استفاده از رابطه $Y_i=\theta_i\left(X_i-\lambda_i/\theta_i\right)^{\gamma_i}+\lambda_i$ برای $i=1,\dots,n$ به دست می‌آید. تابع دای گاما[۲] به صورت:

$$\Psi(z)=d\left[\ln\Gamma(z)\right]/dz=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$$

تعریف می‌شود.

۲) توزیع لجستیک n- بعدی دارای تابع چگالی زیر می‌باشد.

$$f(\underline{y})=\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha+i-1}{\theta_i}\exp\left(-\frac{y_i-\lambda_j}{\theta_i}\right)\left[1+\sum_{j=1}^{n}\exp\left(-\frac{y_j-\lambda_j}{\theta_j}\right)\right]^{-(\alpha+n)} \qquad (٤-١)$$

که در آن برای $\theta_i>0, \underline{y}\in R^n$ و $i=1,\dots,n$ و $\alpha>0$. تابع چگالی توام هر زیرمجموعه از مولفه های یک بردار تصادفی لجستیک $\underline{Y}$ به شکل (۱-٤) می‌باشد (جانسون[۳] و کوتز[۱] (۱۹۷۲)). در این صورت آنتروپی آن به فرم:

[۱] Arnold

[۲] Digamma

[۳] Johnson