بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
دانشکده ی علوم
گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد
رشته ی فیزیک گرایش اتمی و مولکولی

عنوان پایان نامه

مطالعه دینامیک درهمتنیدگی سیستمی متشکل از اتم سه-ترازه ۸ -شکل و میدان الکترومغناطیسی دو-مد در یک کاواک غیر خطی

استاد راهنما
دکتر مهیار ماهجویی

استاد مشاور
دکتر حسن رنجبر عسکری

نگارنده
داوود ابراهیمی زاده ابریشمی

بهمن ماه ۱۳۹۲

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
دانشکده ی علوم
گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد فیزیک
رشته ی فیزیک گرایش اتمی و مولکولی

داوود ابراهیمی زاده ابریشمی

عنوان پایان نامه

مطالعه دینامیک درهمتنیدگی سیستمی متشکل از اتم سه-ترازه Λ -شکل و میدان الکترومغناطیسی دو-مد در یک کاواک غیر خطی

در تاریخ ۹۲/۱۲/۱۴ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه‌ی عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مهیار ماهجویی	با مرتبه‌ی علمی استادیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان‌نامه دکتر حسن رنجبر عسکری	با مرتبه‌ی علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه دکتر سیدیحیی میرافضلی	با مرتبه‌ی علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه آقای محمدخان زاده	با مرتبه‌ی علمی استادیار	امضاء
۵ – نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی دکتر حمیدرضا افشین	با مرتبه ی علمی دانشیار	امضاء

سپاسگزاری

اکنون که این پایان نامه به اتمام رسیده است بر خود لازم می دانم مراتب سپاسگذاری خود را به پاس راهنمایی های روشنگرانه و زحمات بی دریغ اساتید گرانقدر خود جناب آقای دکتر مهیار ماهجویی و دکتر حسن رنجبر عسکری تقدیم ایشان کنم. همچنین از اساتید بزرگوار آقایان دکتر محمد خان زاده، دکتر میرافضلی، دکتر رحمتی، دکتر زندی و جناب آقای مجتبی رحیمی که در این مدت من را از راهنمایی های خود بهره مند ساختند کمال تشکر را دارم.

تقدیم به شعله

به پاس شکیبایی بی مانند و محبت های بی دریغش

چکیده

در این پایان نامه رفتار زمانی آنتروپی فون نویمن به عنوان سنجه ای برای اندازه گیری درهمتنیدگی بین یک اتم سه-ترازه Λ-شکل و مجموعه ای از فوتونهای یک میدان الکترومغناطیسی دو-مد، مطالعه شده است. برهمکنش اتم-فوتون در یک کاواک غیر خطی کر-مانند با جفت شدگی وابسته به شدت را در نظر گرفته و به کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیسی در این محیط شروع می کنیم. با معرفی یک عملگر کازیمیر (N)، که ویژه مقادیرش تعداد برانگیختگی های کل سیستم می باشد و با هامیلتونی جابجا می شود نشان خواهیم داد که هامیلتونی به شکل قطعه ای قطری بوده و با افزایش تعداد برانگیختگی ها خواهیم دید که این هامیلتونی از یک قطعه ۲×۲ و N قطعه ۳×۳ تشکیل شده است. سپس به طور تحلیلی عملگر تحول زمانی $\mathrm{U(t)}$ را محاسبه و ویژگیهای آن را با ماتریس هامیلتونی مقایسه می کنیم و مشاهده می شود که دارای هندسه مشابهی است و به طور قطری قطعه ای می باشد. حال با اعمال $\mathrm{U(t)}$ بر روی یک حالت اولیه دلخواه ($|\psi(0)\rangle$)، بردار حالت سیستم را در هر زمان بدست می آوریم. آنگاه ماتریس چگالی $\rho(t)=|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ را محاسبه کرده و با ردگیری روی حالتهای اتمی، ماتریس چگالی کاهش یافته $\rho_f(t)$ را حساب می کنیم که ویژه مقادیرش به ما این اجازه را می دهد که آنتروپی فون نویمن را اندازه بگیریم. در پایان با داشتن آنتروپی فون نویمن تلاش خواهیم کرد تاثیر حالتهای اولیه سیستم و نیز پارامترهایی همچون اثر کر، ثابت جفت شدگی، ثابت جفت شدگی وابسته به شدت و غیره را بر رفتار زمانی درهمتنیدگی و الگوی فروهش و نمو بررسی کنیم.

واژگان کلیدی: درهمتنیدگی، محیط های کر- گونه، اتم Λ- شکل، اثرات غیرخطی، فروهش و نمو، عملگر کازیمیر، ماتریس چگالی کاهش یافته، آنتروپی فون نویمن

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

عنوان	صفحه

فصل اول
درهمتنیدگی: تاریخچه

۱-۱-مقدمه

در این فصل به ارائه تاریخچه مختصری از درهمتنیدگی[1] خواهیم پرداخت. اینکه این لفظ چگونه و توسط چه کسی برای اولین بار بکار گرفته شد و چرا با اینکه هم اکنون درهمتنیدگی از مباحث مهم فیزیک به شمار می رود اما در آن زمان به مدت ۳۰ سال از مطالعه آن چشم پوشی شد. همچنین به توضیح و بررسی پارادوکس EPR خواهیم پرداخت و اینکه چرا انیشتن[2] درباره مکانیک کوانتوم در اشتباه بود و حاصل مقاله ای که وی به اتفاق ۲ فیزیکدان دیگر نوشت به غفلت چند ساله محافل آکادمیک و فیزیکدانان از مفهوم درهمتنیدگی انجامید.

۱-۲-درهمتنیدگی

در سال ۱۹۳۵ اروین شرودینگر[3]، یکی از بنیانگذاران مکانیک کوانتوم، مقاله ای بسیار تاثیر گذار تحت عنوان " موقعیت فعلی کوانتوم مکانیک " منتشر کرد که به توصیف یکی از مسائل مکانیک کوانتوم آن دوره می پرداخت [۱]. در آن مقاله بود که وی برای اولین بار عبارت "درهمتنیدگی" ("Vershankung" در زبان آلمانی) را ساخت و از آن برای توصیف یک ویژگی برجسته کوانتوم که رابطه عجیب و خاصی بین سیستمهای کوانتومی را به نمایش می گذارد، استفاده نمود:

---

1 - Entanglement
2 - Einstein
3 - Erwin Schrodinger

"وقتی دو سیستم که ما حالتهای آنها را از طریق مولفه های مشخصه شان می شناسیم به خاطر نیروهای شناخته شده بینشان وارد برهمکنش فیزیکی موقتی می شوند، و هنگامیکه آن دو سیستم پس از زمان مشخصی از بر همکنش کردن دوباره از هم جدا می شوند، آنگاه دیگر نمی توان آنها را به همان روش پیشین توصیف کرد. به عبارت دیگر نمی توان به هر کدام یک معرف خاص خودش را داد. من این را مشخصه اصلی مکانیک کوانتوم می نامم و نه صرفاً یکی از ویژگی های آن: مشخصه ای که منجر به جدایی کامل (مکانیک کوانتوم) از خطوط فکری کلاسیک می شود. با این برهمکنش، حالتهای کوانتومی معرف دو سیستم با یکدیگر درهمتنیده شده اند.

یک راه دیگر برای توضیح این مورد عجیب این است: آگاهی کامل از یک کل، لزوماً آگاهی کامل از اجزای سازنده آن را در بر نمی گیرد، گر چه آن اجزا بتوانند تماماً از هم مجزا باشند و در نتیجه در عمل قادر باشند «بهترین توصیف در دسترس ممکن» را به عنوان مثال، از یک (حالت کوانتومی) بیانگر خود ارائه دهند."

در همان سال انیشتین، پودولسکی[۱] و روزن[۲] (ERP)، پارادوکسی را مطرح کردند که نشان می داد با قبول غیر جایگزیدگی، مکانیک کوانتوم تبدیل به یک تئوری ناکامل[۳] و غیر موضعی[۴] می شود[۲]. بنابراین، به مدت سی سال از مطالعه درهمتنیدگی چشم پوشی شد تا اینکه بل[۵] در سال ۱۹۶۴ پارادوکس EPR را دوباره مورد بررسی قرار داده و آن را بسط داد [۳]. او نشان داد که روابط آماری ما بین نتایج اندازه گیری کمیتهای مختلف بر روی دو سیستم با نامساوی معروف بل که از فرضیات جدا پذیری و موضعی بودن انیشتین مشتق شده اند، در تضاد هستند. این نامساویهای بل هم اکنون به لحاظ تجربی قابل آزمایشند و به روشنی نشان می دهند که مکانیک کوانتوم کامل و غیر موضعی است.

پژوهشهای بل مباحث پیش رونده ای را در ارتباط با پایه های مکانیک کوانتوم پی ریزی کرد. با این وجود در دهه هشتاد میلادی بود که فیزیکدانها، متخصصین کامپیوتر، و رمز نگارها[۶] از روابط غیر موضعی بودن حالتهای کوانتومی درهمتنیده به عنوان منابع کاملاً جدیدی برای پیشبرد کارهایشان استفاده کردند [۴]. در نتیجه، زمینه های علمی جدیدی، همچون اطلاعات کوانتومی[۷]،

---

[1] - Podolsky
[2] - Rosen
[3] - Incomplete
[4] - non-local
[5] - Bell
[6] - Cryptographers
[7] - Quantum Information

رمزنگاری کوانتومی[۱] و فرابرد کوانتومی[۲] پا به عرصه وجود گذاشتند که در فصل سوم به شرح آنها و توصیف ریاضیات درهمتنیدگی خواهیم پرداخت[۴]. همچنین تلاش می کنیم معیارهای موجود برای جدا پذیری [۳] را بدست آوریم که بتوانیم براساس آنها بلافاصله مشخص کنیم که آیا یک حالت درهمتنیده است یا خیر.

۱-۳-پارادوکس EPR

در سال ۱۹۳۵، انیشتین، پودولسکی و روزن در مقاله مشترکی این سوال را مطرح نمودند که: «آیا می توان توصیف کوانتومی واقعیت فیزیکی را کامل در نظر گرفت؟» [۲] در این مقاله آنها سه فرض پایه ای را مطرح نمودند که- بنا به عقیده آنها- هر تئوری فیزیکی باید این سه شرط را برآورد سازد:

۱- شرط کامل بودن[۴]: هر المانی از واقعیت فیزیکی باید در این تئوری فیزیکی برای خود یک همتا داشته باشد.

۲- شرط واقعیت فیزیکی داشتن[۵]:" اگر بدون مختل کردن یک سیستم بتوانیم با قطعیت مقدار یک کمیت فیزیکی را پیش بینی کنیم، آنگاه برای آن کمیت فیزیکی یک عنصر واقعی متناظر با آن موجود است.

۳- شرط موضعی بودن[۶]:" سیستم های فیزیکی به گونه ای می توانند از هم جدا شوند که بر همکنش آنها (هنگامیکه فاصله بین آنها به اندازه کافی زیاد است) قابل چشم پوشی باشد.

آنها یک آزمایش ذهنی[۷] پیشنهاد کردند که طی آن دو ذره که تکانه[۸] و مکان آنها درهمتنیده است را طوری از هم جدا کنیم که به اندازه کافی از هم دور باشند تا شرط موضعی بودن را برآورده سازند. با اندازه گیری مکانی ذره ۱، بنابر مکانیک کوانتوم باید بتوانیم با قطعیت نتیجه اندازه گیری مکانی ذره ۲ را نیز پیش بینی کنیم. بنابراین این مکان المانی از واقعیت فیزیکی است. به روش مشابه می توان نتیجه گرفت که تکانه این ذره نیز بطور واقعی قابل اندازه گیریست که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را نقض می کند. بنابراین پارادوکس EPR نتیجه می گیرد که مکانیک کوانتوم

[1] - Quantum Cryptography
[2] - Quantum Teleportation
[3] - Separability
[4] - Completeness
[5] - Realism
[6] - Locality
[7] - Gedankenexperiment
[8] - Momentum

کامل نیست و یک تئوری بنیادی تری باید وجود داشته باشد که سه فرض اخیر را ارضاء کند و به منظور بسط دادن تئوری کوانتوم به یک تئوری واقعی موضعی کامل[1]، چند به اصطلاح متغیر پنهان موضعی[2] (LHV) معرفی نمودند که بنابر EPR المانهای واقعی هستند که برای توصیف همه جانبه یک سیستم فیزیکی به آنها نیاز است.

بور[3] به این نتیجه گیری EPR چنین پاسخ داد که تعریف یک المان واقعی بدون در نظر گرفتن ابزار تجربی امکان پذیر نیست [۵]. و از آنجائیکه EPR اندازه گیری روی مشاهده پذیرهای مکمل را در نظر می گیرد، به واقع به دو ساز و کار اندازه گیری مکمل و مختلف نیاز است که بتوان در رابطه با مقادیر آنها اطلاع کسب کرد؛ در نتیجه این درست نیست که از واقعیت فیزیکی همزمان مکمل سخن گفت و بنابراین او نتیجه گیری آنان را در ارتباط با ناکامل بودن مکانیک کوانتوم رد کرد. شرودینگر نیز در مقاله‌ای تحت عنوان «موقعیت فعلی کوانتوم مکانیک[4]» که در آن برای اولین بار از عبارت درهمتنیدگی استفاده کرد، این نتایج را جمع بندی نمود. بحث اولیه EPR مبتنی بر درهمتنیدگی بین مکان و تکانه بود و این به دلیل ابعاد بیشمار فضای هیلبرت متناظرش به لحاظ ریاضی بحث پیچیده ای است. چندی بعد، بوهم[5] فرمالیسم ریاضی ساده تری از بحث درهمتنیدگی ارائه داد که بل در بدست آوردن نامساوی خود از آن بهره زیادی برد [۶، ۷].

---

[1] - a complete local realistic theory
[2] - local hidden variables (LHV)
[3] - Bohr
[4] - "The present situation of quantum mechanics"
[5] - Bohm

فصل دوم

بر همکنش اتم- فوتون در یک محیط غیر خطی

در این فصل تلاش خواهیم کرد مدلی برای برهمکنش یک اتم سه ترازه Λ- شکل و یک میدان الکترومغناطیسی با دو مد فوتونی بدست آوریم تا در ادامه بتوانیم هامیلتونی چنین سیستمی را محاسبه کنیم. بدیهی است که هامیلتونی این سیستم از سه بخش تشکیل شده است: هامیلتونی میدان (H_F) هامیلتونی اتم سه ترازه (H_A) و هامیلتونی برهمکنش (H_I). بدین منظور در ابتدا نیاز داریم که میدان الکترومغناطیسی را در یک کاواک غیر خطی کوانتیزه نماییم تا به ما این امکان را بدهد که هامیلتونی کل را محاسبه کنیم.

۲-۱- کوانتیزه کردن میدان در یک کاواک غیر خطی

همانطور که می دانیم در یک محیط غیر خطی و در نبود وجود چشمه، معادلات ماکسول بدین گونه اند [۸]:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=0 \tag{۱-۲}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0 \tag{۲-۲}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{\nabla}\times\vec{H} \tag{۳-۲}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\times\vec{E} \tag{۴-۲}$$

توابع برداری $\vec{D}(t)$و $\vec{B}(t)$ در یک محیط غیر خطی در واقع توابع غیرخطی پیچیده ای از $\vec{E}(t)$ و $\vec{H}(t)$ می باشند. در چنین محیطی انرژی الکترومغناطیسی بدین صورت است:

$$dU(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t).d\vec{D}(\vec{r},t) + \vec{H}(\vec{r},t).d\vec{B}(\vec{r},t) \qquad (۵-۲)$$

و هامیلتونی (یا انرژی) اینگونه می باشد،

$$H = \int d^3\vec{r}\, U(\vec{r},t) \qquad (۶-۲)$$

بطور کلی برای میدان الکترومغناطیسی در محیط غیر خطی از روش کوانتیزه کردن کانونیک استفاده می شود برای این منظور از پتانسیل برداری $\vec{A}$ به عنوان مختصه اصلی در پیمانه کولن ($\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$) استفاده می شود. پتانسیل برداری $\vec{A}$ و تکانه مزدوج آن را می توان بر حسب مجموعه کاملی از توابع فضایی عرضی[1] بسط داد که ضرائب این بسط در قالب عملگرهای خلق و نابودی[2] بیان می شوند. آنگاه با جانشین کردن بسط های $\vec{A}$ و تکانه مزدوجش در هامیلتونی، میدان الکترومغناطیسی کوانتیزه در یک محیط خطی بدست می آید.

با این وجود، این نوع کوانتیزه کردن کانونیک برای یک محیط غیر خطی پیچیده تر است چرا که $\vec{A}$و $\vec{E}$ که در روش اولیه به عنوان متغیرهای کانونیک انتخاب می کنیم در معادله (۲-۱) صدق نمی کنند. در حقیقت تا زمانیکه هیلری[3] و ملودینوف[4] پتانسیل دو گانه[5] را معرفی کردند [۱۰] و با استفاده از آن به کوانتیزه کردن کانونیک میدان پرداختند هیچ رویکرد موشکافانه و همه جانبه ای برای محیط های غیر خطی پیشنهاد نشده بود. در ادامه با الهام از کار این دو فیزیکدان، به منظور کوانتیزه کردن میدان به جای $\vec{E}$ یا $\vec{A}$ از میدانهای $\vec{D}$ و $\vec{B}$ - که در محیط های خطی ناهمگن روابط جابجایی مستقل از محیط دارند- استفاده می کنیم [۹، ۱۱، ۱۲]. این انتخاب هم چنین با نتایج بدست آمده از محاسباتی که در آن میدان $\vec{D}$ به عنوان تکانه کانونیک ظاهر می شود نیز هماهنگ است. حال با بسط دادن میدانهای $\vec{D}$ و $\vec{B}$، و با استفاده از معادلات ماکسول می توانیم فرمول بندی دقیقی برای کوانتیزه کردن عملگرهای میدان ارائه دهیم.

1 - Transverse complete spatial function
2 - Creation and annihilation operators
3 - Hilleary
4 - Molodinov
5 - Dual potential

با استخراج از معادلات (۲-۱) و (۲-۲)، می توان میدانهای $\vec{D}$ و $\vec{B}$ را به ترتیب براساس رشته ای از توابع فضایی کامل عرضی $\left\{\vec{f}_{\vec{k}\mu}(\vec{r})\right\}$ و $\left\{\vec{\nabla}\times\vec{f}_{\vec{k}\mu}(\vec{r})\right\}$ بسط داد.

$$\vec{D}(\vec{r},t) = -\sum_{\vec{k}\mu} P_{\vec{k}\mu}(t)\,\vec{f}^{\,*}_{\vec{k}\mu}(\vec{r}) \tag{۲-۷}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = c\sum_{\vec{k}\mu} Q_{\vec{k}\mu}(t)\vec{\nabla}\times\vec{f}^{\,*}_{\vec{k}\mu}(\vec{r}) \tag{۲-۸}$$

توابع و ضرائب این بسط شرایط هرمیتی بودن را دارا می باشد.

$$\vec{f}^{\,*}_{\vec{k}\mu} = \vec{f}_{-\vec{k}\mu} \tag{۲-۹}$$

$$Q^{\dagger}_{\vec{k}\mu} = Q_{-\vec{k}\mu} \tag{۲-۱۰}$$

$$P^{\dagger}_{\vec{k}\mu} = P_{-\vec{k}\mu} \tag{۲-۱۱}$$

علاوه بر این تابع $\vec{f}_{\vec{K}\mu}(\vec{r})$ نیز شرایط عرضی بودن[1]، عمود بودن[2] و کامل بودن[3] را داراست:

$$\vec{\nabla}.\vec{f}_{\vec{k}\mu} = 0 \tag{۲-۱۲}$$

$$\int d^3\vec{r}\,\vec{f}^{\,*}_{\vec{k}\mu i}(\vec{r})\,\vec{f}_{\vec{k}'\mu' j}(\vec{r}) = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\mu\mu'}\delta_{ij} \tag{۲-۱۳}$$

$$\sum \vec{f}^{\,*}_{\vec{k}\mu i}(\vec{r})\,\vec{f}_{\vec{k}\mu j}(\vec{r}\,') = \delta^{T}_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{۲-۱۴}$$

که در آن تابع دلتای دیراک عرضی δ^{T}_{ij} بدین صورت تعریف می شود:

---

[1] - Transversality
[2] - Orthonormality
[3] - Completeness

$$\delta_{ij}^{T}=\frac{1}{(2\pi)^{3}}\int d^{3}\vec{k}\left[\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{\left|\vec{k}\right|^{2}}\right]e^{i\vec{k}.\vec{r}} \qquad (۱۵-۲)$$

در فضای تهی، موج تخت به عنوان تابع بسط انتخاب می شود.

$$\vec{f}_{\vec{k}\mu}(\vec{r})==\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\vec{e}_{\vec{k}\mu}e^{i\vec{k}.\vec{r}} \qquad (۱۶-۲)$$

که در آن بردارهای واحد $\vec{e}_{\vec{k}\mu}(\mu=1,2)$ در رابطه زیر صدق می کنند:

$$\vec{k}.\vec{e}_{\vec{k}\mu}=0 \qquad (۱۷-۲)$$

بسط های (۲-۷) و (۲-۸) همان شکل معادلهایشان در محیط خطی را دارا هستند. ما هم چنین فرض خواهیم کرد که عملگرهای ضریب بسط در روابط جابه جایی مشابهی صدق می کنند. بنابراین

$$[Q_{\vec{k}\mu}(t),P_{\vec{k}'\mu'}(t)]=i\hbar\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\mu\mu'} \qquad (۱۸-۲)$$

میدانهای $\vec{E}(\vec{r},t)$ و $\vec{H}(\vec{r},t)$ را می توان با استفاده از روابط تابع غیر خطی بین آنها توسط $\vec{D}(\vec{r},t)$ و $\vec{B}(\vec{r},t)$ توصیف کرد. با استفاده از معادلات (۲-۵) و (۲-۶)، هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی، تابع غیر خطی از $\vec{D}(\vec{r},t)$ و $\vec{B}(\vec{r},t)$ می شود. پس از جایگزین کردن بسط های (۲-۷) و (۲-۸) در آن، هامیلتونی مورد نظر براساس عملگرهای خلق و نابودی بدست می آید. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن روابط تابعی بین $\vec{E}(\vec{r},t)$، $\vec{H}(\vec{r},t)$ و $\vec{D}(\vec{r},t)$، $\vec{B}(\vec{r},t)$، شکل این هامیلتونی تماماً بوسیله این روند کوانتیزه کردن تعیین می شود.

۲-۲- کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیسی در یک دی الکتریک با تقارن مرکزی

در یک محیط غیر مغناطیسی $(\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{B}(\vec{r},t))$، هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی از این رابطه بدست می آید:

$$H = \frac{1}{2}\int dr^3 (\vec{E}.\vec{D} + \vec{B}.\vec{B}) \quad (۱۹-۲)$$

با بسط دادن بردار قطبش در محیطی با تقارن مرکزی، میدان الکترومغناطیسی چنین شکلی خواهد داشت:

$$E_j = \varepsilon_{ij}^{-1} D_i - \varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{mq}^{-1}\varepsilon_{nk}^{-1}\varepsilon_{pl}^{-1}\chi_{iqkl} D_m D_n D_p \quad (۲۰-۲)$$

$i, j, k, \ldots = 1,2,3$

که جمع بندی روی اندیس های تکرار شونده را در نظر گرفته و از جملات مرتبه های بالاتر صرف نظر می کنیم. ε_{ij} ها در عبارت $\varepsilon_{ij} = 1 + \chi_{ij}^{(1)}$، اعضای تانسور دی الکتریک خطی می باشند و $\chi_{iqkl}^{(3)}$ در واقع تانسور پذیرفتاری مرتبه سوم است. بنابراین،

$$\vec{D}_{(\vec{r},t)} = -i\sum_{\vec{k},\lambda}\left[\frac{\hbar\omega_{\vec{k}.\lambda}}{2}\right]^{1/2}\left((\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}(t) - \hat{a}_{-\vec{k},\lambda}(t)\right)\vec{f}_{\vec{K},\lambda}^{*}(\vec{r}) \quad (۲۱-۲)$$

که $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ و $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}$ به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق برای مد $(\vec{k},\lambda)$ می باشند و برای میدان الکترومغناطیسی کوانتیزه داریم:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = c\sum\left(\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k},\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t) + \hat{a}_{-\vec{k},\lambda}^{\dagger}(t)\right)\nabla\times\vec{f}_{\vec{K},\lambda}(\vec{r}) \quad (۲۲-۲)$$

که بنابراین با استفاده از معادله هلمهولتز $(\nabla^2\times\vec{f}_{\vec{k},\lambda} = \frac{-\omega_{\vec{k}}^2}{c^2}\vec{f}_{\vec{k},\lambda}$ می توان نوشت:

$$\frac{1}{2}\int B^2(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \frac{C^2}{2}\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'} Q_{\vec{k},\lambda}(t)Q_{\vec{k}',\lambda'}(t)\int\left(\nabla\times\vec{f}_{\vec{k},\lambda}(\vec{r})\right).\left(\nabla\times\vec{f}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{r})\right)d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\vec{k},\lambda}\hbar\omega_{\vec{k},\lambda}(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\hat{a}_{-\vec{k},\lambda} + \hat{a}_{\vec{k}.\lambda}\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} + \hat{a}_{-\vec{k},\lambda}^{\dagger}\hat{a}_{-\vec{k},\lambda} + \hat{a}_{-\vec{k},\lambda}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}) \quad (۲۳-۲)$$