دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

کوهمولوژی و توسیع های گروه های توپولوژیک

از

سید سجاد گشتی

استاد راهنما

دکتر حسین سهله

بهمن 89

قدردانی

خداوند بزرگ را شاکرم که به من توانایی رسیدن به هدفم را عطا فرمود و مرا در رسیدن به هدفم همراهی نمود.

در اینجا از زحمات بیکران پدر و مادرم، همسر مهربانم، اعضای خانواده، اساتید و معلمان خود در دوران تحصیلی نهایت تشکر و سپاس را دارم.

از جناب آقای دکتر حسین سهله استاد راهنمای بزرگوارم به خاطر درس ها، تجربیات و زحمات بی دریغش تشکر می کنم و از درگاه خداوند منان برای ایشان سعادت و خوشبختی آرزو دارم.

از جناب آقای دکتر مگردیچ تومانیان استاد محترم انجمن ریاضی ایران که زحمت داوری این رساله را تقبل فرمودند و همچنین از نقطه نظرهای ناب و پیشنهادات ارزنده ایشان سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری و جناب آقای دکتر عباس سهله نیز به خاطر داوری و راهنمایی هایشان در جهت بهبود این رساله تشکر فراوان می کنم.

فهرست مطالب

چکیده فارسی

کوهمولوژی و توسیع های گروه های توپولوژیک نگارنده: سید سجاد گشتی

فرض کنید $\mathbf{l}$ رسته همه گروه های آبلی موضعاً فشرده و ریخت های آن همریختی های پیوسته باشند. در ابتدا دومین کوهمولوژی تحدید شده $H_k^2(G/A, A)$ و گروه توسیع های با برش بسته $Ext_k(G/A, A)$ را وقتی که G موضعاً فشرده، تفکیک پذیر و متر پذیر و A یک زیر گروه نرمال بسته در G باشد، تعریف می کنیم. سپس دنباله های دقیق کوتاه به طور فشرده تولید شده در $\mathbf{l}$ را معرفی کرده و ثابت می کنیم که اگر G ، s - فشرده و A زیر گروه نرمال بسته فشرده از G باشد، آنگاه دنباله $0 \to A \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{p} G \to 0$ در $\mathbf{l}$ دنباله ای به طور فشرده تولید شده است. همچنین مجموعه همه توسیع های به طور فشرده تولید شده در $\mathbf{l}$ را تعریف کرده و نشان می دهیم که تحت جمع بئر تشکیل یک گروه آبلی می دهد.

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و A یک G- مدول دلخواه باشد، اگر G به طور ساده روی A عمل کند، آنگاه $Hom(G,A) = H^1(G,A)$. در این رساله نشان می دهیم که هرگاه G یک گروه نیم فشرده و A متر پذیر باشد آنگاه $Hom(G,A)$ یک گروه موضعاً فشرده است. همچنین ثابت می کنیم اگر G موضعاً فشرده و A فشرده و بدون زیر گروه های کوچک باشد آنگاه با قرار دادن شرایطی روی G و A، $Hom(G,A)$ یک G- مدول انژکتیو در $\mathbf{l}$ است.

کلید واژه: کوهمولوژی تحدید شده، توسیع تحدید شده، برش بسته، توسیع به طور فشرده تولید شده، G- مدول انژکتیو، دنباله دقیق کوتاه و سره.

Abstract

Cohomology and extensions of topological groups

Author: Seyed Sajjad Gashti

Let $\mathbf{l}$ be the category of all locally compact groups and continuous homomorphism as morphism. At first we define the second restricted cohomology $H_k^2(G/A, A)$ and the group of extensions with closed cross section $Ext_k(G/A, A)$, whenever G is a locally compact, seperable and metrizable group and A any closed normal subgroup of G. Then we will introduce the compactly generated short exact sequence in $\mathbf{l}$. We prove that if G is a locally compact, s - compact group and A any compact closed subgroup of G, then the short exact sequence $0 \to A \to Q \to G \to 0$ in $\mathbf{l}$ is a compactly generated exact sequence. Also we define the set of all compactly generated extension in $\mathbf{l}$ and prove that under the Baire sum it forms an abelian group.

Let G be a topological group and A an arbitrary $G-$ module, if G acts simply on A, then $Hom(G,A) = H^1(G,A)$. In this thesis we show that the $Hom(G,A)$ is a locally compact group, whenever G is a hemicompact group and A metrizable group. Also we prove that if G is locally compact and A compact without small subgroups, then, $Hom(G,A)$ under some conditions on G and A, is an injective G–module in $\mathbf{l}$.

Keywords: restricted cohomology, restricted extension, closed cross section, compactly generated extension, injective G–module, proper short exact sequence.

مقدمه

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. به ازای هر گروه توپولوژیک G، دو نظریه کوهمولوژی وجود دارد:

(1)نظریه کوهمولوژی G به عنوان یک فضای توپولوژیک،

(2)نظریه کوهمولوژی G به عنوان یک گروه مجرد جبری. که این نظریه توسط ایلنبرگ[1] و مک لین[2][2] مطرح شده است.

در نظریه کوهمولوژی گروه توپولوژیک G روی A اگر G گسسته باشد آنگاه با نظریه کوهمولوژی روی گروه مجرد G روی A منطبق می شود. همچنین مور[3] [3] کوهمولوژی گروه های توپولوژیک را وقتی G و A گروه های توپولوژیک موضعاً فشرده و A یک $G-$مدول پیوسته است، مورد مطالعه قرار داده است.

هو[4][4] کوهمولوژی گروه های توپولوژیک و همچنین توسیع آنها را معرفی می کند. وی آن دسته از توسیع گروه های توپولوژیک را بررسی می کند که دارای برش می باشند و نیز ثابت می کند که دومین گروه کوهمولوژی $H^2(G,A)$ با گروه توسیع های A توسط G دارای برش یکریخت است.

این رساله شامل دو بخش است. در بخش اول کوهمولوژی و توسیع های گروه های توپولوژیک را تعریف کرده و گروه هایی را می یابیم که در این تعاریف صدق می کنند. به عنوان مثال توسیع زیر را در نظر بگیرید:

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{R} \xrightarrow{\exp} \mathbf{S}^1 \to 0$$

که در آن i تابع شمول و $\exp$ تابع توان می باشد. این توسیع دارای برش نمی باشد. در اینجا این سئوال مطرح می شود که آیا این دسته از توسیع ها دارای هیچ برشی نیستند؟ در فصل 1 بر این اساس توسیع ها و گروه های کوهمولوژی جدیدی را معرفی می کنیم.

در ادامه توسیع های دیگری را مورد بررسی قرار می دهیم که آن توسیع ها را توسیع های به طور فشرده تولید شده می نامیم. این توسیع ها اول بار در این رساله مورد مطالعه قرار می گیرد. سپس گروه های توپولوژیکی می یابیم که دارای توسیع های به طور فشرده تولید شده هستند، همچنین به آنها ساختار جبری خواهیم داد به طوری

[1] S. Eilenberg
[2] S. Maclane
[3] C. C. Moore
[4] S.T.Hu

که تحت عمل بئر تشکیل یک گروه آبلی جمعی می دهد و آن گروه را با $Ext_c(G,A)$ نشان می دهیم. سپس ثابت خواهیم کرد که هرگاه A یک G - مدول به طور فشرده تولید شده و G فقط دارای یک زیر گروه باز و فشرده مانند H باشد آنگاه $Ext_c(G,A)$ در گروه همریختی های پیوسته از G بتوی H، یعنی $Hom(G,H)$ می نشیند. این مطلب بدین دلیل دارای اهمیت است که می توان با بررسی خواص $Hom(G,H)$ به خواص $Ext_c(G,A)$ پی برد. در واقع یکی از نتایج بخش اول این است که بررسی این زیر گروه ها به شناخت و تحلیل توسیع گروه های توپولوژیک کمک می کند.

می دانیم که اگر گروه توپولوژیک G به طور ساده روی G- مدول A عمل کند، آنگاه گروه همریختی های پیوسته از G بتوی A، یعنی $Hom(G,A)$ برابر با اولین گروه کوهمولوژی $H^1(G,A)$ می باشد. در فصل پنجم این رساله، فرض بر این است که گروه توپولوژیک G به طور ساده روی G- مدول A عمل می کند، و سپس به ارتباط اولین گروه کوهمولوژی و توسیع ها خواهیم پرداخت. همچنین می دانیم که اگر G موضعاً فشرده و A گروهی فشرده و بدون زیر گروه کوچک یا اگر G موضعاً فشرده و به طور فشرده تولید شده باشد و A گروهی موضعاً فشرده و بدون زیر گروه کوچک باشد آنگاه $Hom(G,A)$ موضعاً فشرده است. در بخش اول فصل پنجم ثابت خواهیم کرد که اگر G نیم فشرده و A متر پذیر باشد آنگاه $Hom(G,A)=H^1(G,A)$ موضعاً فشرده است. همچنین در فصل پنجم مدول های انژکتیو را در $\mathbf{l}$ تعریف می کنیم و نشان می دهیم که اگر $G\in\mathbf{l}$ و A گروهی فشرده و بدون زیر گروه های کوچک باشد، آنگاه $Hom(G,A)$در $\mathbf{l}$ مدولی انژکتیو است اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

1) G گسسته و A بخش پذیر است،

2) G کلاً ناهمبند و شامل یک زیر گروه فشرده و تابی کراندار مانند K باشد به طوری که G/K گسسته و A همبند است،

3) G کلاً ناهمبند و A گسسته و بخش پذیر است،

4) G کلاً ناهمبند و $A=I\oplus D$ که I انژکتیو در $\mathbf{l}$ و D گروهی گسسته و بخش پذیر است،

5) G کلاً ناهمبند و $A=D\oplus\mathbf{T}^s\oplus\mathbf{R}^n$ که D گروهی گسسته و بخش پذیر است،

6) G همبند و $A=\mathbf{T}^s\oplus\mathbf{R}^n$، ($\mathbf{T}^s$چنبره احتمالا با بعد نامتناهی است)

7) $G=\sum_s \mathbf{Z}\oplus\mathbf{R}^m$ و A کلاً ناهمبند است،

8) $G=\mathbf{R}^m\oplus M$ که M یک زیر گروه باز فشرده ای است که دارای دوگان هم تابی است و A همبند است،

9) G و A تفکیک پذیر است و A در مرکز G قرار دارد و $G=[G,G]$ ،

10) G و A تفکیک پذیر و A یک گروه برداری حقیقی با بعد متناهی و G دارای زیر گروه گسسته ای مانند K باشد که G/K فشرده است.

سپس خواص دیگر $Hom(G,A)$ از قبیل همبند بودن، به طور فشرده تولید شدن، بخش پذیری، نیم فشردگی و ... را بررسی می کنیم، همچنین خواصی از گروه مشخصه اش یعنی گروه $Hom(G,A)^*$ را از قبیل تصویری بودن، بدون تاب بودن، به طور توپولوژیکی بدون تاب بودن، بدون زیر گروه های کوچک بودن و به طور توپولوژیک کامل بودن را ثابت می کنیم. و در نهایت نشان می دهیم که با توجه به شرایطی یک همریختی پیوسته از $Hom(G,A)^*$ بتوی $Hom(G,A)$ موجود است.

می دانیم که اگر G یک گروه توپولوژیک و A یک زیر گروه دلخواه از G باشد، آنگاه لزوماً G/A دارای یک متر پایا نمی باشد. در پیوست 1 ابتدا با استفاده از پوشش گروه G ، پوششی برای G/A خواهیم ساخت و سپس نشان می دهیم که هرگاه G گروهی توپولوژیک تفکیک پذیر و متر پذیر، A زیر گروهی نرمال بسته از G باشد، آنگاه یک متر پایای دوطرفه روی G/A وجود دارد.

در ادامه یکی از مسائل قدیمی که در توپولوژی به آن پاسخ کاملی داده نشده است، یعنی قانون حذف در فضاهای توپولوژیک را بررسی می کنیم. بدین معنی که به ازای سه فضای A، B و H که $B\times H \approx A\times H$ ، چه وقت می توان نتیجه گرفت که $B \approx A$ ؟ به عبارت دیگر، چه وقت می توان H را حذف نمود؟ در پیوست 2 نشان می دهیم که اگر A و B زیر مجموعه هایی از خط حقیقی $\mathbf{R}$ و H فضایی توپولوژیک همبند موضعی و فشرده باشد، آنگاه قانون حذف برقرار است.

تذکر: نحوه شماره گذاری تعریف و قضایا به ترتیب فصل، بخش و شماره از چپ به راست می باشد. برای مثال تعریف 1.3.2، یعنی دومین تعریف بخش سوم از فصل اول.

فصل اول : پیش نیازها

1.1. فضاهای توپولوژیک

در این بخش تعاریف اولیه را از منبع [1] ارائه می کنیم.

تعریف(1.1.1): هر فضای توپولوژیک عبارت است از یک زوج (X, t) که شامل یک مجموعه X و یک مجموعه t از زیر مجموعه های X ، به گونه ای که در شرایط زیر صدق کند:

الف) اجتماع اعضای هر زیر گردایه t، متعلق است به t.

ب) اشتراک اعضای هر زیر گردایه متناهی τ ، متعلق است به t.

ج) مجموعه های X و $\varnothing$ به t تعلق دارند.

به هر عنصر مجموعه t، مجموعه باز گفته می شود.

در تعریف بالا، tرا توپولوژی روی فضای X و (X, t) فضای توپولوژیک گوییم. به طور معمول، نماد توپولوژی را حذف می کنیم و فقط از یک فضای توپولوژیک X سخن خواهیم گفت.

تعریف(1.1.2): فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد.

الف) زیر مجموعه $A \subset X$ را بسته گوییم هرگاه $X \setminus A$ باز باشد.

ب) زیر مجموعه $U \subset X$ را یک همسایگی نقطه $x \in X$ گوییم، هرگاه یک مجموعه باز V موجود باشد به طوری که $x \in V \subset U$.

تعریف(1.1.3): فرض کنید (X, t) فضای توپولوژیک و $A \subset X$ باشد، مجموعه

$$t|A := \{U \cap A : U \in t\},$$

را توپولوژی زیر فضایی و فضای توپولوژیک $(A, \tau|_A)$ را یک زیر فضای توپولوژیک (X, t) می خوانند.

تعریف(1.1.4): یک متر در مجموعه X ، تابعی است مانند

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

که دارای خواص زیر است:

1)به ازای هر x و y از X ، $d(x, y) \geq 0$. تساوی زمانی برقرار است اگر و فقط اگر $x = y$.

۲) به ازای هر x و y از X ، $d(x,y)=d(y,x)$.

3)(نامساوی مثلثی) به ازای هر x ، y و z از X ،

$$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z).$$

تعریف(1.1.5): فضای متر پذیر عبارت است از فضایی متر مانند X همراه با متر مشخص d که توپولوژی X را تولید می کند.

تذکر(1.1.6): فرض کنید (X,t) فضای توپولوژیک و $B\subset A\subset X$ باشد . زیر مجموعه B در A باز است اگر و فقط اگر اشتراک A با یک مجموعه باز در X باشد.

تعریف(1.1.7): فضای X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. نگاشت $f:X\to Y$ را پیوسته گوییم هرگاه تصویر وارون مجموعه های باز در Y ، در X باز باشند.

تعریف(1.1.8): فرض کنید X و Y دو فضا توپولوژیک باشند**.** نگاشت یک به یک و پوشای $f:X\to Y$ را یک هومئومرفیسم گوییم هرگاه f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند.

تعریف(1.1.9): یک فضای توپولوژیک را همبند گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت اجتماع دو زیر مجموعه ناتهی باز و جدا از هم نوشت.

تذکر(1.1.10): فرض کنید X یک مجموعه و ~ یک رابطهٔ هم ارزی روی X باشد.

مجموعه رده های هم ارزی را با $X/\sim$ ، و رده هم ارزی یک عضو $x\in X$ را با $[x]$، و نگاشت تصویر کانونی $X\to X/\sim$ را با π نمایش می دهیم که ضابطه آن به صورت $p(x):=[x]$ می باشد.

تعریف(1.1.11): در فضای توپولوژیک مفروض X ، رابطه هم ارزی~ را چنین تعریف می کنیم:

$x\sim y$ هرگاه زیر مجموعه همبندی وجود داشته باشد که شامل هر دوی x و y باشد. رده های هم ارزی حاصل از آن را مولفه های X می نامند.

تعریف(1.1.12): گوییم گردایه $\mathfrak{I}$ از زیر مجموعه های فضای X یک پوشش X است، یا X را می پوشاند، در صورتی که اجتماع اعضای $\mathfrak{I}$ مساوی X باشد. اگر اعضای $\mathfrak{I}$ زیر مجموعه های باز X باشند، آن را یک پوشش باز X گویند.

تعریف(1.1.13): فضای X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز آن، مانند $\Im$، شامل یک زیر گردایه متناهی باشد که آن نیز X را بپوشاند.

تعریف(1.1.14): یک فضای توپولوژیک را فضای هاسدورف گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز آن، همسایگی های جدا از هم وجود داشته باشند.

تعریف(1.1.15): فضای X را درنقطه x فشرده موضعی گوییم در صورتی که زیر مجموعه فشرده ای از X مانند C موجود باشد که شامل یک همسایگی x است.

تعریف 1.1.15، در فضای هاسدورف شرایط زیر معادل اند[5]:

الف) X دارای پایه ای است که شامل مجموعه های باز و فشرده می باشد.

ب) به ازای هر $x \in X$ و هر همسایگی U_x ، مجموعه باز و فشرده V وجود دارد به طوری که $x \in V \subset \bar{V} \subset U$.

تعریف(1.1.16): فضای توپولوژیک X را s - فشرده گوییم هرگاه X اجتماعی شمارا از زیر مجموعه های فشرده باشد.

برای مثال $\mathbf{R}$ و دایره واحد فضاهای s - فشرده هستند.

تعریف(1.1.17): فضای توپولوژیک X را تفکیک پذیر گوییم هرگاه دارای زیر مجموعه چگال و شمارش پذیر باشد.

تعریف(1.1.18): زیر مجموعه A از فضای توپولوژیک X را G_d گوییم هرگاه اشتراک شمارایی از مجموعه های باز در X باشد.

تعریف(1.1.19): فرض کنید X فضای توپولوژیک و ~ یک رابطه هم ارزی روی X باشد. یک مجموعه $U \subset X/\sim$ را در توپولوژی خارج قسمت باز گوییم اگر و فقط اگر $p^{-1}(U)$ در X باز باشد. مجموعه $X/\sim$ همراه با این توپولوژی فضای خارج قسمت X بر ~ نامیده می شود.

1.2 گروه های توپولوژیک

در این بخش تعاریف اولیه را از منبع [6] ارائه می کنیم.

تعریف(1.2.1): هر گروه توپولوژیک G گروهی است که در عین حال فضای توپولوژیک است، با این شرط که نگاشت از $G\times G$ به G که (x,y) را به $x.y$ می نگارد، و نگاشت از G به G که x را به x^{-1} می نگارد پیوسته باشند. در واقع هرگاه G یک گروه و همچنین یک فضای توپولوژیک باشد، آن را یک گروه توپولوژیک می نامند هرگاه ساختارهای گروه و توپولوژی با هم سازگار باشند. معمولاً e را به عنوان عضو همانی گروه و همچنین مولفه عنصر همانی را با G_0 نشان می دهیم.

قرارداد: عمل در گروه های آبلی را با $+$ نشان می دهیم و به جای x^{-1} می نویسیم $-x$.

تعریف(1.2.2): سیستم کامل از همسایگی های x در G گردایه ای مانند $\wp$ از همسایگی x است به طوری که هر همسایگی x شامل یک عضو از $\wp$ باشد. اگر هر عضو $\wp$ باز باشد آنگاه سیستم حاصل را یک سیستم اساسی همسایگی های باز x گویند.

تعریف(1.2.3): خواص سیستم کامل از همسایگی ها:

هر سیستم اساسی همسایگی های باز e دارای خواص زیر است:

الف) اگر $U,V\in\wp$، آنگاه $\exists W\in\wp$ به طوری که $W\subseteq U\cap V$.

ب) اگر $a\in U\in\wp$، آنگاه $\exists V\in\wp$ به طوری که $Va=\{xa;x\in V\}\subseteq U$.

ج) اگر $U\in\wp$، آنگاه $\exists V\in\wp$ به طوری که $V^{-1}V=\{xy^{-1}:x,y\in V\}\subseteq U$.

د) اگر $U\in\wp$ ، $x\in G$ آنگاه $\exists V\in\wp$ به طوری که $x^{-1}Vx=\{x^{-1}yx:y\in V\}\subseteq U$.

تعریف(1.2.4): اگر در هر گروه توپولوژیک G نگاشتی که از $G\times G$ به G و (x,y) را به $x.y$ می نگارد، و نگاشت از G به G که x را به x^{-1} می نگارد مشتق پذیر باشند. آنگاه گروه توپولوژیک G را گروه لی گویند.

نظریه عمومی گروه های توپولوژیک یکی از جدیدترین نظریه های آنالیز است، از مدت ها پیش گروه های توپولوژیک را می شناختند، و در نیمه دوم قرن نوزدهم، لی[5] نظریه وسیع گروه های توپولوژیک با نام «گروه های پیوسته» را بنا نهاده بود، که امروزه آنها را گروه های لی می نامند. بررسی گروه های توپولوژیک عمومی با کار شریر[6] در 1926 آغاز شد.

---

[5] Lie
[6] Schreier

فرض کنید $\mathbf{R}$ مجموعه اعدادحقیقی جمعی با توپولوژی معمولی، $\mathbf{Z}$ مجموعه اعداد صحیح با توپولوژی القایی و $\mathbf{T}$ گروه خارج قسمتی $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ باشد.

مثال(1.2.5): هرگروه با توپولوژی گسسته، $\mathbf{Z}$ ، $\mathbf{R}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{T}$ گروه توپولوژیک هستند.

تعریف(1.2.6): فرض کنید G و G' دو گروه توپولوژیکی باشند. آنگاه نگاشت $f: G \to G'$ را یکریختی توپولوژیکی گوییم، هرگاه f یکریختی گروهی باشد و همچنین f یک هومئومرفیسم از فضای توپولوژیک G به فضای توپولوژیک G' باشد.

تعریف(1.2.7): فرض کنید G و H دو گروه توپولوژیک باشند به طوری که H آبلی است. فرض کنید $Hom(G,H)$ مجموعه تمام همریختی های پیوسته از G به H باشد. به ازای هر f,g متعلق به $Hom(G,H)$ و هر $x \in G$، تعریف می کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

آنگاه $Hom(G,H)$ با عمل فوق یک گروه است.

اگر K زیر مجموعه فشرده ای از G و U زیر مجموعه بازی از H باشد، (K,U) را چنین تعریف می کنیم:

$$(K,U) = \{f : f \in Hom(G,A), f(K) \subset U\},$$

مجموعه های (K,U) تشکیل زیر پایه ای برای یک توپولوژی روی $Hom(G,H)$ می دهند، که به توپولوژی فشرده- باز موسوم است که با توپولوژی فشرده - باز، $Hom(G,H)$ یک گروه توپولوژیک آبلی است[6].

تذکر(1.2.8): به ازای دو مجموعه X و Y، مجموعه تمام توابع $f: X \to Y$ با نماد Y^X نشان داده می شود.

تعریف(1.2.9): اگر A یک گروه آبلی باشد، در این صورت گروه $Hom(A,\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{T}^A$ متشکل از همه همریختی هایی ازگروه آبلی A بتوی $\mathbf{T}$، گروه مشخصه A نامیده می شود و با A^* نشان داده می شود. اگر A گروه آبلی باشد، در این صورت تابع $h_A: A \to A^{**}$ که $h_A(a)(c) = c(a)$ یک همریختی یک به یک ازگروه های آبلی است[6].

مثال(1.2.8):

گروه	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{Z}^n$	$\mathbf{T}^n$

گروه مشخصه	**T**	**Z**	**R**	$\mathbf{T}^n$	$\mathbf{Z}^n$

لم(1.2.10): اگر A گروهی آبلی گسسته باشد، آنگاه A^* گروهی آبلی فشرده است.

اثبات: رجوع شود به منبع [6].

تعریف(1.2.11): گوییم گروه A، P - بازتابی است اگر همریختی $h_A : A \to A^{**}$ یکریختی توپولوژیکی باشد.

تعریف(1.2.12): یک رسته $\mathcal{C}$، ساختاری با داده های زیر است:

الف) یک رده، که اعضای آن را اشیاء گویند.

ب) به ازای هر دو شی ء A و B یک مجموعه $\mathcal{C}(A,B)$ وجود دارد که آن را مجموعه ریخت های از A به B گوییم. هر ریخت را به صورت $f: A \to B$ می نویسیم.

ج) قانون ترکیب، یعنی برای هر سه شی ء A، B و C و ریخت های $f: A \to B$ و $g: B \to C$ ترکیب $fg: A \to C$ تعریف شده باشد.

تعریف(1.2.13): فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته دلخواه باشند. تابعگون $T: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ تابعی است که:

الف) اگر $A \in \mathcal{C}$، آنگاه $T(A) \in \mathcal{D}$.

ب) اگر $f: A \to B$ در $\mathcal{C}$ باشد، آنگاه $T(f): T(A) \to T(B)$ در $\mathcal{D}$ یک ریخت باشد.

ج) اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ در $\mathcal{C}$ باشد، آنگاه $T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B) \xrightarrow{T(g)} T(C)$ نیز متعلق به $\mathcal{D}$ باشد، و $T(gof) = T(g)oT(f)$ اگر T همورد و $T(gof) = T(f)oT(g)$ اگر T پاد همورد باشد.

د) به ازای هر $A \in \mathcal{C}$، $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

تذکر(1.2.14): در این رساله $\mathbf{l}$ رسته ای است که اشیاء آن گروه های موضعاً فشرده و ریخت های آن همریختی های پیوسته هستند، و Ω رسته ای است که اشیاء آن گروه های موضعاً فشرده و به طور فشرده تولید شده و ریخت آن نیز همریختی پیوسته هستند.

1.3. گروه کوهمولوژی

در تعریف گروه کوهمولوژی گروه های توپولوژیک دو دیدگاه وجود دارد که عبارتند از دیدگاه همگن و دیدگاه غیر همگن، که هر کدام را به اختصار توضیح خواهیم داد.

تعریف(1.3.1): فرض کنید G و A گروه های توپولوژیک دلخواهی باشند و G روی A از چپ عمل کند، یعنی به ازای هر $g \in G$ و $a \in A$ عنصر ga متعلق به A باشد و همچنین

الف)نگاشت $(g,a) \to ga$ در g و a به طور هم زمان پیوسته باشد.

ب) $g(a_1+a_2)=ga_1+ga_2$ ،

ج) $g_1(g_2a)=(g_1g_2)a$ ،

د) $1a=a$.

اگر به ازای هر $g \in G$ و $a \in A$ داشته باشیم $ga=a$ آنگاه گوییم G روی A به طور ساده عمل می کند.

همگن:

فرض کنید A و G دو گروه توپولوژیک دلخواه و G روی A از چپ عمل کند. اگر $G^{n+1}=\underbrace{G\times\cdots\times G}_{n+1}$، به ازای هر $n \geq 0$، نگاشت پیوسته

$$F:G^{n+1} \to A$$

را در نظر می گیریم. نگاشت F را هم زنجیر G روی A با بعد n ($n-$ بعد) می نامیم اگر به ازای هر $g \in G$ و $(x_0,\ldots,x_n) \in G^{n+1}$ در شرط زیر صدق کند:

$$F(gx_0,\ldots,gx_n)=gF(x_0,\ldots,x_n).$$

مجموعه همه هم زنجیر های G روی A با بعد n تشکیل یک گروه آبلی جمعی می دهد که آن را با $C^n(G,A)$ نمایش می دهیم.

به ازای هر $F \in C^n(G,A)$، نگاشت پیوسته $d_nF:G^{n+2} \to A$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$d_n F(x_0,\ldots,x_{n+1})=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i F(x_0,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}).$$

به سادگی می توان نشان داد که عملگر d خواص زیر است:

الف) d_nF یک هم زنجیر با بعد $n+1$ است،

ب) $d_n(F_1+F_2)=d_nF_1+d_nF_2$ ،

ج) $d_{n+1}(d_nF)=0$.

عملگر d را عملگر هم مرز و هم زنجیر dF را هم مرز F گوییم.

فرض کنید F یک $n-$ هم زنجیر دلخواه باشد به طوری که $d_nF=0$، در این صورت F را $n-$ هم دور گوییم. $n-$هم دور ها تشکیل زیر گروهی از $C^n(G,A)$ می دهند که آن را با $Z^n(G,A)$ نمایش می دهیم.

اگر $n>0$، $n-$هم زنجیر هایی که به ازای $F'\in C^{n-1}(G,A)$ به صورت $F=d_{n-1}F'$ می باشد را $n-$هم مرز می نامیم. مجموعه همه $n-$ هم مرز ها را با $B^n(G,A)$ نشان می دهیم، که تشکیل زیر گروهی از $C^n(G,A)$ می دهند.

با توجه به این خاصیت که $d_{n+1}(d_nF)=0$، لذا می توان نتیجه گرفت که $B^n(G,A)$ زیر گروهی از $Z^n(G,A)$ می باشد.

گروه خارج قسمتی

$$\frac{Z^n(G,A)}{B^n(G,A)}$$

را n – امین گروه کوهمولوژی گروه G روی A گوییم. و آن را با $H^n(G,A)$ نمایش می دهیم.

غیر همگن:

فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. گروه n –هم زنجیر های غیر همگن $\tilde{C}^n(G,A)$ عبارت است از نگاشت های پیوسته ای مانند f از $\underbrace{G\times\cdots\times G}_{n}$ بتوی A که n –هم مرز آن نگاشت

$$d_n:\tilde{C}^n(G,A)\to\tilde{C}^{n+1}(G,A)$$

با ضابطه زیر می باشد:

$$\begin{aligned} d_n f(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= x_1.f(x_2,\ldots,x_{n+1}) \\ &+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1,\ldots,x_i x_{i+1},\ldots,x_{n+1}) \\ &+(-1)^{n+1} f(x_1,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

که در آن $x_1,\ldots,x_{n+1}\in G$. به سادگی می توان نشان داد که d_n به ازای هر $n\geq 0$ یک همریختی است و $d_{n+1}d_n=0$.

اگر $n=0$ ، هم زنجیر $f\in \hat{C}^0(G,A)$ عنصری در G است. هم مرز f هم زنجیر $d_0 f\in \hat{C}^1(G,A)$ است که به ازای هر $x_1\in G$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$d_0 f(x_1)=x_1 f-f.$$

تذکر(1.3.2): به ازای هر $n\geq 0$، یک تناظر یک به یک بین $n-$هم زنجیر های همگن F و $n-$هم زنجیر های غیر همگن f وجود دارد که این تناظر در زیر بیان می شود.

اگر $n>0$ باشد آنگاه

$$F(x_0,\ldots,x_n)=x_0 f(x_0^{-1}x_1,x_1^{-1}x_2,\ldots,x_{p-1}^{-1}x_n),$$

$$f(x_1,\ldots,x_n)=F(1,x_1,x_2,\ldots,x_1x_2\ldots x_n).$$

اگر $n=0$ باشد تناظر به صورت زیر است:

$$F(x_0)=x_0 f \quad , \quad f=F(1).$$

بنابراین یک یکریختی پوشا بین $C^n(G,A)$ و $\hat{C}^n(G,A)$ وجود دارد.

تذکر(1.3.3): اگر $n=1$، هم زنجیر $f\in \hat{C}^1(G,A)$ نگاشت پیوسته $f:G\to A$ و به صورت زیر است:

$$d_1 f(x_1,x_2)=x_1.f(x_2)-f(x_1x_2)+f(x_1).$$

بنابرا ین f هم دور است اگر و فقط اگر $f(x_1x_2)=x_1.f(x_2)+f(x_1)$. مجموعه چنین همریختی هایی را با $\hat{Z}^1(G,A)$ نمایش می دهیم. اگر $f\in \hat{B}^1(G,A)$ آنگاه به ازای هر $g\in G$، $f(x)=xg-g$ است.

بدین ترتیب اولین گروه خارج قسمتی

$$\frac{Z^1(G,A)}{B^1(G,A)}$$

را اولین گروه کوهمولوژی گروه G روی A گوییم. و آن را با $H^1(G,A)$ نمایش می دهیم.

تذکر(1.3.4): اگر G روی A به طور ساده عمل کند، آنگاه $H^1(G,A)$ برابر با گروه همریختی های پیوسته $Hom(G,A)$ است.

1.4 توسیع گروه های توپولوژیک

تعریف(1.4.1): فرض کنید G و A دو گروه توپولوژیک و A آبلی باشد. گوییم A یک G - مدول پیوسته است هرگاه A یک $G-$ مدول و عمل گروه G روی A، یعنی تابع $l : G \times A \to A$ با ضابطه $l(g,a) = g.a$ پیوسته باشد.

تعریف(1.4.2): دنباله

$$0 \to A \xrightarrow{p} E \xrightarrow{q} G \to 0$$

در **l** را دنباله دقیق کوتاه گوییم اگر و فقط اگر $\operatorname{Im}(p) = Ker(q)$ و p همریختی یک به یک و q همریختی پوشا باشد.

تعریف(1.4.3): همریختی $f : G \to H$ را سره گوییم هرگاه بروی تصویرش باز باشد، یعنی از G به $f(G)$ باز باشد.

تعریف(1.4.4): دنباله $0 \to A \xrightarrow{p} Q \xrightarrow{q} G \to 0$ در **l** را دقیق کوتاه سره گوییم هرگاه دقیق کوتاه باشد و p و q سره باشند.

تعریف(1.4.5): توسیع گروه توپولوژیک A توسط G عبارت است از دنباله دقیق کوتاه

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 0$$

که در آن i هومئومرفیسمی از A بتوی زیر گروه بسته ای از E و p همریختی باز و پیوسته می باشد که آن را با نماد (E,p) نمایش می دهیم.