بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض (جبر)

گروه علمی ریاضی

عنوان:

نتایجی روی ایده‌آل‌ها و زیرمدول‌های اولیه

زهرا بهزادی شیخ رباط

استاد راهنما :

دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور :

دکتر محبوبه حسین یزدی

تیرماه ۱۳۹۱

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

باسمه تعالی

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **خانم زهرا بهزادی شیخ‌رباط** دانشجوی رشته **ریاضی محض** گرایش **جبر** به شماره دانشجویی **۸۹۰۰۷۳۹۷۱** با عنوان:

" نتایجی روی ایده آل‌ها و زیر مدول‌های اولیه"

با حضور هیات داوران در روز **یک‌شنبه** مورخ **۱۳۹۱/۴/۱۸** ساعت **۹ صبح** در محل ساختمان **اندیشه دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ......۱۸...به حروف......هجده تمام............. با درجه.....عالی........تشخیص داد.

ردیف	نام و نام‌خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر احمد خاکساری	راهنما	دانشیار	پیام نور شیراز	
۲	دکتر محبوبه حسین‌یزدی	مشاور	استادیار	پیام نور شیراز	
۳	دکتر شمس‌الملوک خوشدل	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۰
دورنگار: ۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۹
صندوق پستی :۱۳۶۸- ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب زهرا بهزادی شیخ‌رباط دانشجوی ورودی سال۹۰-۸۹ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است .

نام و نام خانوادگی دانشجو زهرا بهزادی شیخ رباط

تاریخ و امضاء ۹۱/۴/۱۸

اینجانب زهرا بهزادی شیخ رباط دانشجوی ورودی سال۹۰-۸۹ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب ، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

نام و نام خانوادگی دانشجو

تاریخ و امضاء زهرا بهزادی شیخ رباط

۹۱/۴/۱۸

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه مطعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

تیرماه۹۱

خداوند بزرگ را سپاس می گویم که توفیق تحصیل علم را تا این مقطع به من عطا فرمود و از درگاه متعالش توفیق تحصیل در مراحل بالاتر را خواستارم.

در اینجا باید از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر احمد خاکساری که در طول پژوهش مرا همراهی نموده اند نهایت امتنان وقدردانی را بنمایم.

توفیق روز افزون ایشان را از خداوند متعال خواستارم.

همچنین از شکیبایی و همراهی پدر و مادر عزیزم که در طول مدت تحصیل یاری گر من بودند صمیمانه سپاسگزارم.

چکیده:

دراین پایان نامه R را یک حلقه جابه‌جایی با عضو همانی و تمام مدول‌ها را یکانی در نظر می‌گیریم. تعمیم‌های گوناگونی از ایده‌آل‌ها و مدول‌های اولیه را بررسی می‌کنیم. به عنوان مثال، یک ایده‌آل سره I از R را اولیه ضعیف می‌گوییم، اگر از $0 \neq ab \in I$ داریم $a \in I$ یا $b \in Rad(I)$. هم چنین، ایده‌آل‌ها و زیر مدول‌های تقریباً اولیه را به عنوان تعمیمی جدید از ایده‌آل‌های اولیه ضعیف وزیرمدول های اولیه ضعیف تعریف می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

ایده‌آل اولیه ضعیف، زیر مدول اولیه ضعیف، ایده آل تقریباً اولیه، زیر مدول تقریباً اولیه، زیر مدول ϕ –اول کلاسیک، زیر مدول ϕ –اولیه کلاسیک.

عنوان	**فهرست مطالب**	**صفحه**

مقدمه:

R را یک حلقه جا به جایی با عضو همانی و تمام مدول‌ها را یکانی در نظر می‌گیریم. هدف اصلی ما، مطالعه‌ی تعمیم‌های گوناگون از ایده‌آل‌ها و مدول‌های اولیه است.

برای این منظور، ابتدا در فصل اول به بیان تعاریف و قضیه‌های مقدماتی می‌پردازیم.برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توان به مراجع [٤] و [٨] رجوع کرد. سپس در فصل دوم، تعاریفی از جمله ایده‌آل تقریباً اولیه و n– تقریباً اولیه و زیر مدول تقریباً اولیه را بیان می‌کنیم. و با مثال‌هایی نشان می‌دهیم که زیر مدول تقریباً اولیه، در حالت کلی، زیر مدول اولیه ضعیف نیست. مرجع[٩] مرجع مناسبی برای مطالعه‌ی بیشتر این مطالب می‌باشد.

در فصل سوم، ایده آل ϕ –اول و ϕ –اولیه و هم چنین زیر مدول ϕ –اولیه و ϕ –اول کلاسیک را تعریف می‌کنیم.بعضی رابطه‌های شرطی بین انواع مختلف زیر مدول‌های ϕ –اول (ϕ –اولیه) را مورد بررسی قرار می دهیم. برای مطالعه‌ی بیشتر به مرجع [٣] رجوع کنید.

فصل اول

تعاریف مقدماتی

در این بخش، به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه می‌پردازیم. هم چنین قضیه‌ها و مثال‌هایی را بیان می‌کنیم که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱–۱ ایده‌آل‌ها و مدول‌های اولیه

تعریف ۱–۱–۱ :

فرض کنید J , I ایده‌آل‌های حلقه R باشند، حاصل تقسیم I بر J را با $(I: J)$ نشان می دهیم و داریم :

$(I : J) = \{a \in R : aJ \subseteq I\}$.

تعریف ۱–۱–۲ :

فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل R باشد.

مجموعه $\{r \in R : r^n \in I$ به طوریکه $n \in N$ عددی چون $\}$ وجود داشته باشد $= \sqrt{I}$ را رادیکال I می‌نامیم.

رادیکال I ، یک ایده‌آل R است.

قضیه۱–۱–۱:

فرض کنید R یک حلقه و I ، J ، K سه ایده‌آل R باشند. اگر $I = K \cup J$ باشد آنگاه $I=K$ یا $I=J$.

قضیه ۱-۱-۲:

Rرا یک حلقه با عضو همانی ضربی یک و I را ایده‌آلR در نظر بگیرید. در اینصورت اگر $1 \in I$،

آنگاه داریم $I=R$.

لم ۱-۱-۱ :

فرض کنید R_i $(1 \leq i \leq 2)$حلقه جا به جایی یکدار باشند و $R = R_1 \times R_2$ در اینصورت:

۱-اگر I_1 ایده‌آل R_1باشد آنگاه $Rad(I_1 \times R_2) = Rad(I_1) \times R_2$.

۲- اگر I_2 ایده آل R_2 باشد آنگاه $Rad(R_1 \times I_2) = R_1 \times Rad(I_2)$.

قضیه۱-۱-۳:

R را یک حلقه در نظر بگیرید. اگر I و P ایده‌آل‌های R باشند که $I \subseteq P$. آنگاه داریم:

$$\frac{Rad(P)}{I} = Rad\left(\frac{P}{I}\right)$$

قضیه۱-۱-۴:

R را یک حلقه در نظر بگیرید. اگر P_1 و P_2 ایده‌آل‌های R باشند آنگاه داریم:

$$(P_1 - P_1^2) \times R_2 = (P_1 \times R_2) - (P_1 \times R_2)^2$$

تعریف۱–۱–۳:

فرض کنید P ایده‌آل سره از حلقه R باشد. می‌گوییم P ایده‌آل اول R است اگر برای هر $a,b\in R$ از $ab\in P$ بتوان نتیجه گرفت $a\in P$ یا $b\in P$.

مثال ۱–۱–۱:

ایده‌آل صفر در دامنه صحیح، اول است.

تعریف ۱–۱–۴:

فرض کنید Q ایده آل سره از حلقه R باشد گوییم Q ، ایده‌آل اولیه از R است هر گاه از $ab\in Q$ که $a,b\in R$ نتیجه شود که $a\in Q$ یا $b\in\sqrt{Q}$.

مثال۱–۱–۲:

هر ایده آل اول، اولیه است.

قضیه ۱–۱–۵:

فرض کنید $R=R_1\times R_2$ که در آن هر R_i ، ۲و۱= i حلقه جابه جایی یکدار باشند. آنگاه:

۱)اگر P_1 ایده آل اولیه از R_1 باشد آنگاه $P_1\times R_2$ ایده‌آل اولیه از R است.

۲) اگر P_2 ایده‌آل اولیه از R_2 باشد آنگاه $R_1\times P_2$ ایده‌آل اولیه از R است.

برهان:

۱) $(a,b)(c,d)=(ac,bd)\in P_1\times R_2$ در نظر می‌گیریم به طوریکه $(a,b),(c,d)\in R$ بنابراین چون P_1، ایده‌آل اولیه است داریم، $a\in P_1$ یا $c\in Rad(P_1)$ و در نتیجه $(a,b)\in P_1\times R_2$ یا $(c,d)\in Rad(P_1)\times R_2=Rad(P_1\times R_2)$ و بنابراین $P_1\times R_2$ ایده‌آل اولیه است.

۲) شبیه اثبات قسمت (۱).

تعریف ۱-۱-۵:

فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد. منظور از R- مدول M، گروه آبلی جمعی M است، همراه با یک ضرب اسکالر $R\times M\to M$، $(r,m)\to rm$ که برای هر $x,y\in M$ و $r_1,r_2\in R$ داشته باشیم:

۱) $r_1(x+y)=r_1x+r_1y$

۲) $(r_1+r_2)x=r_1x+r_2x$

۳) $(r_1r_2)x=r_1(r_2x)$

٤) $1x=x$

تعریف ۱-۱-۶:

یک زیر مجموعه N از R– مدول M را زیرمدول M گوییم هر گاه N خود یک R– مدول باشد. در اینصورت می‌نویسیم $N\leq M$.

تعریف۱–۱–۷:

اگر R– مدول M و زیر مدولی مانند N را داشته باشیم می‌دانیم که $(M,+)$آبلی است و N زیر گروهی از آن پس $\frac{M}{N}$ متشکل از تمام کلاس‌های $x+N$ یعنی $\frac{M}{N}=\{x+N|x\in M\}$ با عمل $(x+N)+(y+N)=x+y+N$ گروه‌آبلی‌است‌ضرب در اسکالر را به صورت $r(x+N)=rx+N$ تعریف می‌کنیم. با تعریف ضرب اسکالر، $\frac{M}{N}$ به R– مدول تبدیل می‌شود و آن را R– مدول خارج قسمتی می‌نامیم.

تعریف ۱–۱–۸:

فرض کنید M یک R– مدول و K زیر مدول آن باشد در این صورت حاصل تقسیم K برM را با (K:M) نشان می دهیم وداریم:

$$(K:M)=\{r\in R: rM\subseteq K\}$$

واضح است که (K:M) یک ایده‌آل R است.

تعریف ۱–۱–۹:

زیر مدول سره N از ،R- مدول M را زیر مدول اول گویند اگر برای $r\in R$و $m\in M$ ، $rm\in N$ نتیجه دهد $m\in N$ یا $rM\subseteq N$.

تعریف ۱–۱–۱۰:

زیر مدول سره Q از R- مدول M را زیر مدول اولیه گویند اگر برای $a \in R$ و $m \in M$ ، $am \in Q$ نتیجه دهد $m \in Q$ یا $a^k M \subseteq Q$ ($k \geq 1$).

تعریف ۱–۱–۱۱:

$\phi : S(M) \to S(M) \cup \{\emptyset\}$ را یک تابع و S(M) را مجموعه‌ای از تمام زیر مدول‌های M ، R − مدول، در نظر می‌گیریم.زیر مدول سره P از ، R- مدول M را زیر مدول ϕ − اول گویند، اگر برای $a \in R$ و $x \in M$ از $ax \in P - \phi(P)$ بتوان نتیجه گرفت که $a \in (P :_R M)$ یا $x \in P$.

تعریف ۱–۱–۱۲:

زیر مدول سره P از R- مدول M را زیر مدول اول کلاسیک می‌گویند، اگر برای $a, b \in R$ و $m \in M$ از $abm \in P$ داریم $am \in P$ یا $bm \in P$.

تعریف ۱–۱–۱۳:

زیر مدول سره Q از R − مدول M را زیر مدول اولیه کلاسیک می‌گویند، اگر برای $a, b \in R$ و $m \in M$ از $abm \in Q$ داریم $bm \in Q$ یا $a^k m \in Q$ ($k \geq 1$).

تعریف ۱-۱-۱۴:

زیرمدول سره N از،R- مدول M را زیر مدول تقریبا اول گویند، اگر برای $r\in R$ و $m\in M$ از

$rm\in N-(N:M)N$ داریم $m\in N$ یا $r\in(N:M)$.

۱–۲ ایده‌آل‌ها و زیر مدول‌های اولیه ضعیف

تعریف ۱–۲–۱:

ایده‌آل سره P از R را اول ضعیف می‌گویند اگر برای $a,b \in R$ از $0 \neq ab \in P$ داریم $a \in P$ یا $b \in P$.

مثال۱–۲–۱ :

هر ایده‌آل اول، اول ضعیف است.

مثال۱–۲–۲ :

ایده‌آل صفر، همیشه اول ضعیف است.

قضیه۱–۲–۱:

P را ایده‌آل سره حلقه R در نظر بگیرید. در اینصورت شرایط زیر معادلند.

۱–P، ایده‌آل اول ضعیف است.

۲– برای $x \in R-P$ ، $(P:x)=P\cup(0:x)$.

۳–برای $x \in R-P$ $(P:x)=(0:x)$ یا $(P:x)=P$.

٤–برای ایده‌آل‌های A و B از R که $0 \neq AB \subseteq P$ داریم $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف ۱-۲-۲:

ایده‌آل سره P ازحلقه R را اولیه ضعیف می‌گوییم اگر برای $a, b \in R$ از $0 \neq ab \in P$ داریم $a \in P$ **یا** $b \in \sqrt{P}$.

مثال۱-۲-۳:

هر ایده‌آل اولیه، اولیه ضعیف است.

قضیه ۱-۲-۲:

I و P را ایده‌آل‌های سره R در نظر بگیرید به طوریکه $I \subseteq P$ در اینصورت:

۱)اگر P ایده آل‌اولیه ضعیف باشد، آنگاه $\frac{P}{I}$ اولیه ضعیف است.

۲)اگر I و $\frac{P}{I}$ اولیه ضعیف باشند، آنگاه P اولیه ضعیف است.

برهان:

۱)در نظر می‌گیریم $0 \neq (a+I)(b+I) = ab + I \in \frac{P}{I}$ که $a, b \in R$ و بنابراین $ab \in P$. اگر $ab = 0 \in I$ آنگاه $(a+I)(b+I) = 0$ که تناقض است. بنابراین $0 \neq ab \in P$ و چون P اولیه ضعیف است پس $a \in P$ یا $b \in \mathrm{Rad}(P)$. بنابراین داریم $a + I \in \frac{P}{I}$ یا $b^m + I \in \frac{P}{I}$(برای بعضی مقادیر صحیح m) .

۲) در نظر می‌گیریم $0 \neq ab \in P$ که $a,b \in R$ و بنابراین $(a+I)(b+I) \in \frac{P}{I}$. اگر $ab \in I$ باشد، آنگاه داریم $a \in I \subseteq P$ یا $b \in Rad(I) \subseteq Rad(P)$. حال اگر فرض کنیم که $ab \notin I$، آنگاه $(a+I) \in \frac{P}{I}$ یا $b^m + I \in \frac{P}{I}$ (برای بعضی مقادیرصحیح m) و در نتیجه داریم $a \in P$ یا $b \in Rad(P)$.

تعریف ۱-۲-۳:

زیر مدول سره N از R- مدول M را زیر مدول اول ضعیف از M گویند اگر برای $x \in M$ و $r,s \in R$ از $rsx \in N$ داریم $sx \in N$ یا $rx \in N$.

تعریف۱-۲-۴:

زیر مدول سره N از R- مدول M را زیر مدول اولیه ضعیف از M گویند اگر برای $m \in M$ و $r \in R$ از $0 \neq rm \in N$ داریم $m \in N$ یا $r^n M \subseteq N$ (برای بعضی مقادیر طبیعی n).

فصل دوم

ایده‌آل‌ها و زیر مدول‌های تقریباً اولیه