بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد
آمار(گرایش آمار ریاضی)

عنوان:

اتورگرسیون‌های t چند متغیره: ابداع‌ها، واریانس‌های پیش‌بینی و معادلات درستنمایی دقیق

استاد راهنما:
دکتر عین اله پاشا

تدوین:
بابک عبدالهی کرده مهین

خرداد ۱۳۸۹

تقدیم به دو گوهر فروزان زندگیم :

مادرم

که ترجمه رسای واژه ی مهر است

و

پدرم

که سایه وجودش سقف آشیان وجود من است.

منت خدای را عزوجل که به انسان نعمت تفکر و اندیشه عطا فرمود و بدینسان بر سایر موجودات برتری داد. پروردگاری متعال که تمامی موفقیت هایم را مرهون الطاف بیکرانش هستم.

هر کس به من کلمه ای بیاموزد، مرا بنده خویش ساخته است.

امام علی (ع)

در مسیر تدوین این مجموعه، مورد الطاف عزیزانی قرار گرفتم که بی شک بدون همکاری ایشان، این مهم به ثمر نمی نشست.

از پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی یار و یاور من بوده اند و جز رشد و تعالی این حقیر دغدغه دیگری نداشته اند قدردانی می نمایم.

از جناب آقای پروفسور عین اله پاشا که با رهنمودهای سازنده خویش مسیر تدوین این پایان نامه را برای بنده هموار نمودند مزید امتنان را دارم. در مکتب این استاد فرزانه علاوه بر کسب آموزه های علمی، درس اخلاق را نیز فرا گرفتم که شاگردی ایشان در این وادی هم افتخاری بس عظیم برای اینجانب بوده است.

از جناب آقای دکتر علی اکبر رحیم زاده ثانی که شاگردی ایشان برایم تحفه ای بس عظیم بود و زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند، تشکر می نمایم.

همچنین از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر غلامحسین یاری که زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند نهایت تشکر را دارم و آرزوی توفیق روز افزون برای ایشان را می نمایم.

جا دارد از بزرگ مرد عرصه تعلیم و تربیت، جناب آقای محسن الویری که با الطاف بیکران خویش راه را برای پیشرفت اینجانب هموار نمودند، خالصانه ترین سپاس ها را داشته باشم.

در پایان از دوستان عزیزم آقایان بهنام عبدالهی، مصطفی پورعلی زاده، سوران بهرام پور، نوید محمدی، مهدی سرباز، عبداله رضایی، خالد زمانی ، احمد سرابیان و...که در مقاطع مختلف یار و همراه من بوده اند، نهایت تشکر را دارم.

چکیده:

توزیع t چند متغیره چهارچوبی را برای مدل بندی داده های سری های زمانی فرار مهیا می کند و در موارد خاص شامل توزیع نرمال و کوشی چند متغیره نیز می گردد. در مدل های اتورگرسیو t چند متغیره به بررسی توزیع ابداع و واریانس خطای پیش بینی می پردازیم. واریانس خطای پیش بینی غیرثابت است و در نوعی مدل ناهمسان واریانس شرطی اتورگرسیو تعمیم یافته صدق می کند. معادلات درستنمایی دقیق برای پارامترهای مدل را بدست می آوریم که این معادلات به معادلات یول- واکر مربوطند و شامل توابع ساده ای از داده ها می باشند. برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم توسط حل متناوب (یک درمیان) دو سیستم خطی بدست می آیند که این روش با استفاده از داده های لینکس توضیح داده می شود. سادگی این معادلات به فهم تئوریک تابع درستنمایی و برآوردگرهایی که از آن بدست می آیند کمک زیادی می کند. محدوده کاربرد آن ها تنها محدود به پارامترهای مدل های اتورگرسیو نیست و در واقع می توان آن ها را برای پارامترهای مدل های ARMA و ماتریس کوواریانس فرآیندهای تصادفی ای که توزیع متناهی بعد آن ها t چند متغیره است به کار برد.

واژه های کلیدی: سببیت، تابع کوواریانس، توزیع گاوسین، مدل های اتورگرسیو شرطی ناهمسان واریانس تعمیم یافته

رده بندی موضوعی: ۶۲M۱۰ و ۳۷M۱۰ و ۹۱B۸۴

مقدمه:

سری های زمانی مشاهداتی اند که در طول زمان جمع آوری می شوند و امروزه تحلیل‌سری های زمانی به یکی از کاربردی ترین شاخه های علم آمار تبدیل گردیده است.

آنالیز بسیاری از سری‌های زمانی کلاسیک به آنالیز داده‌هایی از یک فرآیند تصادفی ایستای $\{X_t\}$ که توزیع گاوسین دارد، مرتبط است. مدل آنالیز بسیاری از آنها بر مبنای مدل اتورگرسیو (AR) می باشد که اگر $\{X_t\}$ یک فرآیند گاوسین باشد آنگاه می‌توان در این مدل فرآیند ابداع $\{\varepsilon_t\}$ را به عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 ناهمبسته درنظر گرفت. مواردی پیش می‌آید به عنوان مثال در بازارهای مالی، پردازش سیگنال ها و ترافیک شبکه که توزیع داده‌ها غیر گاوسین و دم کلفت است.

موضوع مورد مطالعه ما فرآیندهای اتورگرسیو است که نمونه مشاهده شده $X=(X_1,\ldots,X_n)$ در آنها توزیع t چند متغیره با ν درجه آزادی و ماتریس مقیاس Σ_n دارد.

پایان نامه ای که پیش رو دارید شامل ۴ فصل است که در فصل اول ضمن ارائه تعریف رسمی سری های زمانی با سری های زمانی ایستا، توابع میانگین، واریانس، اتوکوواریانس، خودهمبستگی و برآوردکننده های آن ها برای سری های ایستا آشنا می شویم. علاوه بر این، در این فصل با بهترین برآوردگر خطی وچگونگی محاسبه ضرایب آن آشنا خواهیم شد. همچنین در این فصل به معرفی خانواده مدل های اتورگرسیو- میانگین متحرک پرداخته و مفهوم سببیت را بیان نموده ایم. البته به دلیل موضوع پایان نامه بیشتر در مورد سری های اتورگرسیو بحث کرده ایم و روش برآورد پارامترهای این مدل را بیان نموده ایم. در فصل دوم به بررسی توزیع های t چند متغیره پرداخته و برخی از ویژگی های این توزیع ها را بیان نموده ایم. نشان داده ایم که توزیع های t چند متغیره تحت شرط و همچنین تحت تبدیلات خطی بسته هستند که در فصل چهارم از این مطلب استفاده نموده‌ایم. درفصل سوم مدل‌های اتورگرسیو شرطی ناهمسان واریانس(ARCH) و مدل‌های اتورگرسیو شرطی ناهمسان واریانس تعمیم یافته(GARCH)معرفی گردیده اند. در فصل چهارم که شالوده اصلی این پایان نامه است، اتورگرسیون هایt چند متغیره مورد بررسی گرفته اند. مزیت کار با ابداع های ناهمبسته که توزیع توام t دارند در مقابل ابداع های مستقل با توزیع t نشان داده شده است. معادلات درستنمایی دقیق را برای مدل‌های اتورگرسیو t چند متغیره ارایه نموده و ارتباط این معادلات را با معادلات

یول واکر نشان داده‌ایم. همچنین روشی مکرر برای محاسبه برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم ارایه نموده واین روش را همراه با یک مثال توضیح داده ایم. در پایان نشان خواهیم داد که چگونه واریانس خطای پیش بینی در مدل‌های اتورگرسیو t چند متغیره غیر ثابت است و از یک نوع مدل GARCH پیروی می کند. برهان قضایای ۴-۱و ۴-۲ در مرجع [۱۸] آمده است که ما آن ها را کامل نموده ایم.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین شده است:

Pourahmadi, M. (2003) Multi-variate t autoregressions: Innovations, prediction variances and exact likelihood equations. Journal of Time Series Analysis, 24 (6), 739-54.

فهرست مطالب

فصل سوم: مدل های ARCH و GARCH

فصل چهارم: اتورگرسیون‌های t چند متغیره: ابداع‌ها، واریانس‌های پیش‌بینی و معادلات درستنمایی دقیق

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اساسی سری زمانی

۱-۱ مقدمه

سری های زمانی مشاهداتی هستند که در طول زمان جمع آوری می شوند. فراوانی چنین مشاهداتی تحلیل سری های زمانی را به یکی از کاربردی ترین شاخه های علم آمار تبدیل نموده است.

به عنوان مثال متوسط درجه حرارت، رطوبت یا سرعت باد که بسته به نیاز به طور روزانه، هفتگی یا ماهیانه ثبت می شوند، قیمت سهامی خاص یا شاخص کلی در بازار بورس، مقدار تقاضا، تولید یا فروش محصولات یک شرکت، درآمد این شرکت و مبلغی که این شرکت بابت تبلیغات محصولات خود صرف می کند، نمونه هایی از سری های زمانی هستند.

هر چند توصیف رفتار یک سری زمانی از لحاظ تغییرات موضعی و دراز مدت در آن یا مطالعه‌ی وابستگی های موجود بین عناصر سری از بررسی های متداولی است که روی سری های زمانی انجام می شود. ولیکن می توان چنین اذعان نمودکه مهمترین هدف از تحلیل یک سری زمانی پیش بینی مقادیر آینده است.

۱-۲ سری زمانی و مشخصه های آن

در تحلیل سری های زمانی، ماهیت تصادفی صفت مورد مطالعه منجر به این می شود که در هر لحظه از زمان (t) آنچه دیده شده یا دیده خواهد شد را بتوان مقداری از یک متغیر تصادفی (X_t)تصور کرد. پس یک سری زمانی را می توان به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱-۱ یک سری زمانی دنباله ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t,\ t \in T\}$ است. هر چند در این

تعریف مجموعه ی اندیس گذار T می تواند زیرمجموعه‌ی دلخواهی از اعداد حقیقی باشد. ولیکن در این پایان نامه T را مجموعه اعداد صحیح اختیار می کنیم. اگر Ω فضای نمونه ای متناظر با این متغیرهای تصادفی باشد، آن گاه برای $X_t(\omega), \omega \in \Omega$ تابعی از زمان روی T است که به آن یک تحقق از سری زمانی $\{X_t\}$اطلاق می شود. یک سری زمانی در واقع فرآیندی تصادفی است و مدل احتمالی نظیر سری زمانی $\{X_t\}$ توسط خانواده توزیع های توأم با بعد متناهی یعنی خانواده ای شامل توزیع های

$$F_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}(x_1,\dots,x_n) = P\left(\left\{\omega : X_{t_1}(\omega) \le x_1,\dots,X_{t_n}(\omega) \le x_n\right\}\right)$$

به ازای $n = 1,2,\dots$ و هر انتخابی از $t_1,\dots,t_n$ در T تعیین می گردد.

در تعریف زیر با بعضی از مشخصه های مهم سری های زمانی آشنا می شویم.

تعریف ۱-۲ فرض کنید سری زمانی $\{X_t\}$ دارای گشتاورهای اول و دوم متناهی باشد. به ازای هر $s,t \in T$ توابع زیر را چنین تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}
&\mu_X(t) = E(X_t) \qquad t \in T\ , \\
&\sigma_X^2(t) = Var(X_t) = E\left(X_t - \mu_X(t)\right)^2 \qquad t \in T\ , \\
&C_X(t,s) = Cov(X_t, X_s) = E\left(X_t - \mu_X(t)\right)\left(X_s - \mu_X(s)\right) \qquad t,s \in T\ , \\
&R_X(t,s) = \frac{C_X(t,s)}{\sigma_X(t)\ \sigma_X(s)} \qquad t,s \in T\ .
\end{aligned}$$

این توابع به ترتیب تابع میانگین، تابع واریانس، تابع اتوکوواریانس (ACVF)[1]وتابع خود همبستگی (ACF)[2] برای $\{X_t\}$ نامیده می شوند. در صورتی که نیاز به تأکید نباشد، زیرنویس x را در نمایش ضابطه‌ی توابع فوق حذف می کنیم.

تعریف ۱-۳ اگر $\{X_t\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی غیروابسته با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشد، یعنی:

$$\mu(t) = 0, Var(X_t) = \sigma^2, C(t,s) = \begin{cases} \sigma^2 & t = s \\ 0 & t \ne s \end{cases}\ ,\ R(t,s) = \begin{cases} 1 & t = s \\ 0 & t \ne s \end{cases}\ .$$

[1]Autocovariance Function
[2]Autocorrelation Function

آن گاه چنین دنباله ای را سری نوفه سفید نامیده و می نویسیم : $\{X_t\} \sim WN(۰, \sigma^۲)$.

سری های نوفه سفید نقش زیادی در ساختار سری های زمانی ایفا می کنند.

۳-۱ سری های زمانی ایستا

در تحلیل سری زمانی $\{X_t\}$ معمولاً بخشی از یک تحقق این سری در اختیار ما است. در صورتی که خواص سری زمانی $\{X_t\}$ در گذر زمان تغییر نکند، انتظار داریم که اطلاعات حاصل از این بخش را بتوان در برآورد مشخصه های $\{X_t\}$ و پیش بینی آینده آن به کار برد. یک سری زمانی با این مطلوبیت که خواصش با انتقال زمان تغییر نکند را سری ایستا می نامیم.

در ادامه با دو نوع ایستایی آشنا خواهیم شد.

تعریف ۱-۴ سری $\{X_t\}$ را اکیداً ایستا (ایستای قوی) می گوییم هرگاه برای هر k, n بردارهای تصادفی $(X_{t_۱}, ..., X_{t_n})'$ و $(X_{t_۱+k}, ..., X_{t_n+k})'$ هم توزیع باشند. یعنی:

$$F_{X_{t_۱}, ..., X_{t_n}}(x_۱, ..., x_n) = F_{X_{t_۱+k}, ..., X_{t_n+k}}(x_۱, ..., x_n)$$

به عنوان مثال هر دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع، یک سری زمانی اکیداً ایستا است.

تعریف ۱-۵ سری $\{X_t\}$ را ایستای کوواریانس (ایستای ضعیف) می گوییم هرگاه برای هر t، $E\left(X_t^۲\right) < \infty$ و تابع میانگین $\{X_t\}$ ثابت و تابع اتوکوواریانس آن تابعی از فاصله‌ی زمانی باشد. یعنی :

$$\mu_X(t) = \mu \;,\; C_X(t, t+h) = g_X(|h|) = \gamma_X(h)$$

$\gamma_X(h)$ در تعریف فوق اتوکوواریانس $\{X_t\}$ در تأخیر h نامیده می شود. خود همبستگی در تأخیر h را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(۰)}$$

بدیهی است در صورتی که $\{X_t\}$ ایستای کوواریانس باشد، $Var(X_t) = \gamma(۰)$ مقداری ثابت است.

در تعاریف فوق اگر نیاز به تأکید نباشد، زیرنویس x را حذف می کنیم.

نکته قابل تامل این است که هر سری اکیداً ایستا لزوماً ایستای کوواریانس نیست. اما هر سری اکیداً

ایستای $\{X_t\}$ با شرط $E\left(X_t^2\right) < \infty$ ایستای کوواریانس نیز خواهد بود. از طرفی بدیهی است از این که یک سری ایستای کوواریانس است ، نمی توان اکیداً ایستا بودن آن را نتیجه گرفت. البته فرآیندهای گاوسی که در زیر توضیح داده خواهند شد استثنا هستند.

تعریف ۱-۶ سری $\{X_t\}$ را که در آن کلیه توزیع های توأم با بعد متناهی نرمال هستند، سری گاوسی می نامیم. اگر $\{X_t\}$ گاوسی باشد و قرار دهیم:

$$t=(t_1,\ldots,t_n)',\ \ X_{n,t}=(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})',\ \ x_n=(x_1,\ldots,x_n)',\ \ \mu_{n,t}=(\mu_{t_1},\ldots,\mu_{t_n})'$$

$$,\Gamma_{n,t}=\begin{bmatrix} C(t_1,t_1) & C(t_1,t_2) & \cdots & C(t_1,t_n) \\ C(t_2,t_1) & C(t_2,t_2) & \cdots & C(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C(t_n,t_1) & C(t_n,t_2) & \cdots & C(t_n,t_n) \end{bmatrix}$$

آن گاه چگالی توأم $X_{n,t}$ عبارت است از :

$$f_{X_{n,t}}\left(x_n;\mu_{n,t},\Gamma_{n,t}\right)=\left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\left|\Gamma_{n,t}\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_n-\mu_{n,t}\right)'\Gamma_{n,t}^{-1}\left(x_n-\mu_{n,t}\right)\right\}$$

و در صورتی که برای هر عدد طبیعی n و اعداد صحیح $t_1,t_2,\ldots,t_n,k$ داریم :

$$(I)\ \ \mu_{n,t}=\mu_{n,t+k}$$
$$(II)\ \ \Gamma_{n,t}=\Gamma_{n,t+k}$$

این چگالی با چگالی بردار تصادفی $X_{n,t+k}$ برابر بوده و سری گاوسی اکیداً ایستا می باشد.

شرط (I) معادل این است که برای هر عدد صحیح t ، $\mu_t=\mu$ و شرط (II) معادل این است که برای اعداد صحیح s,t,k ، $C(t,s)=C(t+k,s+k)$ و اگر در این تساوی وقتی $t \ge s$ قرار دهیم $k=-s$ و وقتی $t<s$ قرار دهیم $k=-t$، این شرط با این که $C(t,s)=g\left(\left|t-s\right|\right)$ یا $C(t,s)=\gamma\left(t-s\right)$ معادل می‌شود. بنابراین چنین می توان استنباط نمود سری گاوسی، ایستا است در صورتی که تابع میانگینش ثابت و تابع اتوکوواریانس آن تابعی از فاصله زمانی s,t باشد. ایستایی کوواریانس در فرآیندهای گاوسی، ایستایی اکید را نتیجه می دهد.

در این پایان نامه منظور از ایستایی همان ایستایی کوواریانس خواهد بود.

۴-۱ پیش بینی کمترین مربعات خطی در سری های زمانی ایستا

یکی از مهمترین اهداف تحلیل سری های زمانی پیش بینی آینده سری است. در این بخش به چگونگی پیش بینی مقدار $X_{n+\ell}$ به ازای $\ell = ۱,۲,...$ با استفاده از مقادیر $X_{۱},...,X_{n}$ از یک سری ایستای $\{X_t\}$ با میانگین و تابع اتوکوواریانس معلوم μ , $\gamma(\cdot)$ خواهیم پرداخت. بدین منظور پیش بینی های خطی یعنی $a_{\circ}^{*} + a_{۱}^{*}X_{n} + ... + a_{n}^{*}X_{۱}$ ،$(a_{\circ}^{*}, a_{۱}^{*}, ..., a_{n}^{*})' \in R^{n+۱}$را مدنظرقرار داده و بهترین پیش بینی خطی به این معنی که امید ریاضی توان دوم خطای پیش بینی را حداقل کند را با

$$P_{n}X_{n+\ell} = a_{\circ} + a_{۱}X_{n} + ... + a_{n}X_{۱} \qquad (۱-۱)$$

نشان می دهیم. در نهایت بهترین پیش بینی خطی $X_{n+\ell}$ به کمک $X_{۱},...,X_{n}$ عبارت است از:

$$P_{n}X_{n+\ell} = \mu + \sum_{i=۱}^{n} a_{i}\left(X_{n+۱-i} - \mu\right)$$

که در آن a_iها از حل معادله زیر بدست می آیند:

$$\Gamma_{n}a_{n} = \gamma_{n}(\ell) \qquad (۲-۱)$$

که در آن:

$$a_{n} = (a_{۱},...,a_{n})', \gamma_{n}(\ell) = \left(\gamma(\ell), \gamma(\ell+۱), ..., \gamma(n+\ell-۱)\right)'$$

و

$$\Gamma_{n} = \begin{bmatrix} \gamma(\circ) & \gamma(۱) & \cdots & \gamma(n-۱) \\ \gamma(۱) & \gamma(\circ) & \cdots & \gamma(n-۲) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma(n-۱) & \gamma(n-۲) & \cdots & \gamma(\circ) \end{bmatrix} = \left[\gamma(i-j)\right] \qquad \begin{matrix} i = ۱,...,n \\ j = ۱,...,n \end{matrix}$$

همچنین خطای این پیش بینی یعنی $e_{n}(\ell) = X_{n+\ell} - P_{n}X_{n+\ell}$ دارای امید ریاضی صفر و واریانس زیر است:

$$Var\left(e_{n}(\ell)\right) = \gamma(\circ) - a_{n}'\gamma_{n}(\ell). \qquad (۳-۱)$$

۱-۵ برآورد میانگین، اتوکوواریانس ها و خودهمبستگی های یک سری ایستا

در این بخش با برآورد کننده های رایج $\rho(h),\gamma(h),\mu$ برای یک سری ایستا آشنا خواهیم شد.

۱-۵-۱ برآورد μ

برآورد کننده معمول برای μ برآورد کننده گشتاوری آن یعنی $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$ است. این برآورد کننده نااریب و دارای واریانس زیر است:

$$\operatorname{var}\left(\bar{X}_n\right) = \frac{\gamma(0)}{n}\left[1+2\sum_{h=1}^{n-1}(1-\frac{h}{n})\rho(h)\right].$$

اگر $\left\{X_t\right\}$ یک سری ایستا با تابع خودهمبستگی $\rho(\cdot)$ باشد، به طوری که $\lim_{h\to\infty}\rho(h)=0$، آن گاه $\bar{X}_n$ برآورد کننده ای سازگار برای μ است.

۲-۵-۱ برآورد $\rho(h),\gamma(h)$

در حالت کلی به کمک اطلاعات حاصل از زوج های $\left(X_t, X_{t+h}\right), t=1,2,\ldots,n-h$ به برآورد $\rho(h),\gamma(h)$ می پردازیم. برای این منظور از میان برآورد کننده های مختلف، برآورد کننده های زیر را ترجیح می دهیم:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X})$$

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

به کمک این روابط $\hat{\rho}(h),\hat{\gamma}(h)$ را به ازای $h=0,1,\ldots,n-1$ می توان محاسبه نمود. با افزایش h تعداد زوج هایی که در $\hat{\rho}(h),\hat{\gamma}(h)$ دخالت دارند کاهش می یابد (برای $h=n-1$ فقط یک زوج). بنابراین برای h های بزرگ $\hat{\rho}(h),\hat{\gamma}(h)$ برآوردکننده های مطلوبی نیستند. برای کاربردهای عملی برآوردکننده های فوق به ازای $h\leq\frac{n}{4}$ و برای حداقل ۵۰ مشاهده مفید خواهند بود. (رجوع شود به [۴]). $\hat{\rho}(h),\hat{\gamma}(h)$ به ترتیب اتوکوواریانس نمونه و خود همبستگی نمونه در تأخیر h نامیده می شوند.

۱-۶ سری های ARMA

در این فصل با خانواده‌ی مدل های اتورگرسیو- میانگین متحرک (ARMA) به منظور مدلسازی سری های زمانی ایستا آشنا خواهیم شد. اگر $\gamma(\cdot)$ تابع اتوکوواریانس یک سری ایستا باشد به طوری که $\lim_{h\to\infty}\gamma(h)=0$ آن گاه برای هر $k\in N$ یک سری ARMA با تابع اتوکوواریانس $\gamma^*(\cdot)$ می توان یافت به طوری که برای $\gamma^*(h)=\gamma(h), h=0,1,2,\ldots,k$. به تعبیری این نوع سری های ایستا را می توان توسط سری های ARMA تقریب کرد. از دیگر مزایای این مدل ها ساختار خطی آن ها می باشد که علاوه بر سادگی در بسیاری از محاسبات، امکان استفاده بهینه از نتایج بحث پیش بینی های خطی در بخش ۱-۴ را نیز به همراه دارد. تنوع عناصر این خانواده به گونه ای است که رفتارهای متنوعی را که توابع اتوکوواریانس سری های ایستا می توانند از خود بروز دهند به خوبی پوشش می دهند. از طرفی بسیاری از سری های زمانی ناایستا با تبدیلاتی ساده به یک سری ایستا تبدیل می شوند و در نتیجه روش های مدل بندی و برازش و پیش بینی سری های ایستا را می توان برای سری تبدیل شده نیز بکار برد. چون خانواده‌ی مدل های ARMA زیرمجموعه ای از فرآیندهای خطی کلی اند در این فصل ابتدا با این فرآیندها و بعضی خواصشان در بخش ۱-۶-۱ آشنا خواهیم شد.

۱-۶-۱ فرآیندهای خطی کلی

والد(۱۹۳۸)[۱] [۲۲] ثابت کرده است که هر سری ایستا را می توان به دو سری غیروابسته تجزیه کرد. یکی از این سری ها تعیینی و دیگری یک فرآیند خطی کلی است که به صورت زیر تعریف می شوند.

تعریف ۱-۷ سری زمانی که آینده آن توسط گذشته اش بدون خطا پیش بینی می شود را سری تعیینی می نامیم.

تعریف ۱-۸ فرآیند $\{X_t\}$را خطی کلی (با میانگین صفر) گوییم هرگاه سری نوفه‌ی سفید $\{Z_t\}$ و دنباله‌ی به طور مطلق جمع پذیر $\{\psi_j\}$، (یعنی $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j|<\infty$) از اعداد حقیقی، موجود باشند به طوریکه:

---
[۱] Wold

$$X_t = \ldots + \psi_{-1} Z_{t+1} + \psi_0 Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \ldots = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \qquad (۱-۴)$$

فرآیند $\{X_t\}$ را خطی کلی با میانگین μ گوییم هرگاه $\{X_t - \mu\}$ فرآیند خطی کلی باشد.

با تعریف عملگر پسروی B به طوریکه $BZ_t = Z_{t-1}$ و استفاده از پیامد آن یعنی $B^j Z_t = Z_{t-j}$ تساوی (۱-۴) را می توان به صورت $X_t = \psi(B) Z_t$ نوشت که در آن $\psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$ عملگر خطی یا صافی خطی این فرآیند نامیده می شود. بنابراین به تعبیری فرآیند خطی کلی $\{X_t\}$ حاصل عبور سری نوفه سفید $\{Z_t\}$ از صافی خطی $\psi(B)$ است. سری $\{Z_t\}$ را ورودی به این صافی و سری $\{X_t\}$ را خروجی می نامیم.

۱-۶-۲ سری های ARMA

سری های ARMA غالباً با مرتبه ای پایین(p,q کوچک) می توانند رفتار بسیاری از سری های زمانی را که مشاهده می کنیم ، تبیین کنند. این سری ها به صورت زیر تعریف می شوند.

تعریف ۱-۹ سری ایستای $\{X_t\}$ صادق در معادله تفاضلی

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \ldots + \theta_q Z_{t-p} \quad \forall t \qquad (۱-۵)$$

که $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ است را سری اتورگرسیو- میانگین متحرک از مرتبه(p,q) نامیده و به اختصار می نویسیم $\{X_t\} \sim \text{ARMA}(p,q)$. سری $\{X_t\}$ را ARMA(p,q) با میانگین μ گوئیم هرگاه $\{X_t - \mu\} \sim \text{ARMA}(p,q)$ باشد.

مدل (۱-۵) نیز مدل ARMA ی مرتبه‌ی (p,q) نامیده می شود. با استفاده از عملگر پسروی B می توان این مدل را به شکل

$$\phi_p(B) X_t = \theta q(B) Z_t \qquad (۱-۶)$$

نوشت که در آن عملگرهای $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ و $\theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q$ به ترتیب عملگرهای اتورگرسیو مرتبه p و میانگین متحرک مرتبه q نامیده می شوند.

عملگر پسرو B هم این طور تعریف می شود:

$$B^{j} X_{t} = X_{t-j} \qquad j = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$$

تعریف ۱-۱۰ در مدل ARMA(p,q) ، اگر q = ۰ $\left(\theta(B) = ۱\right)$ باشد آن گاه مدل به صورت زیر بدل خواهد گشت:

$$\phi(B) X_{t} = Z_{t}$$

یا

$$X_{t} - \phi_{۱} X_{t-۱} - \ldots - \phi_{p} X_{t-p} = Z_{t} \qquad \textbf{(۷-۱)}$$

در این حالت سری $\{X_{t}\}$ را سری اتورگرسیو مرتبه p نامیده و می نویسیم $\{X_{t}\} \sim AR(p)$.

تعریف ۱-۱۱ سری ARMAی $\{X_{t}\}$ را (نسبت به $\{Z_{t}\}$) سببی گوییم هرگاه دنباله‌ی به طور مطلق جمع پذیر $\{\psi_{j}\}$ موجود باشد به طوریکه برای هر t :

$$X_{t} = \sum_{j=۰}^{\infty} \psi_{j} Z_{t-j} = \sum_{j=۰}^{\infty} \psi_{j} B^{j} Z_{t} = \psi(B) Z_{t} \qquad \textbf{(۸-۱)}$$

قضیه ۱-۱۲ اگر $\{X_{t}\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی باشد بطوریکه $\sup_{t} E\left|X_{t}\right| < \infty$ و نیز $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\psi_{j}\right| < \infty$ ، آن گاه سری

$$\psi(B) X_{t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{j} B^{j} X_{t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{j} X_{t-j} \qquad \textbf{(۹-۱)}$$

با احتمال یک همگراست. بعلاوه اگر $\sup_{t} E\left|X_{t}\right|^{۲} < \infty$ آن گاه سری در میانگین مرتبه دوم نیز به همان حد همگراست.

برهان.[۵]

$$E\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\psi_{j} X_{t-j}\right|\right) = E\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n}\left|\psi_{j}\right|\left|X_{t-j}\right|\right)$$

حال چون $A_n = \sum_{j=-n}^{n} |\psi_j||X_{t-j}|$ یک دنباله صعودی ونامنفی از متغیرهای تصادفی است، بنابر قضیه همگرایی یکنوا و متناهی بودن $\sup_t E|X_t|$ داریم:

$$E\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=-n}^{n}|\psi_j||X_{t-j}|\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{j=-n}^{n}|\psi_j||X_{t-j}|\right)$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=-n}^{n}|\psi_j|\right)\sup_t E|X_t| < \infty$$

که نتیجه می دهد $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j||X_{t-j}|$ و $\psi(B)X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j X_{t-j}$ هر دو با احتمال یک متناهی اند. اگر $\sup_t E|X_t|^۲ < \infty$ و $n > m > ۰$ آن گاه:

$$E\left|\sum_{m<|j|\leq n}\psi_j X_{t-j}\right|^۲ = \sum_{m<|j|\leq n}\ \sum_{m<|k|\leq n}\psi_j\bar{\psi}_k E\left(X_{t-j}\bar{X}_{t-k}\right)$$
$$\leq \sup_t E|X_t|^۲\left(\sum_{m<j\leq n}|\psi_j|\right)^۲ \xrightarrow[m,n\to\infty]{} ۰\ .$$

حال با استفاده از معیار کوشی سری (۱-۹) در میانگین مرتبه دوم همگراست. اگر حد میانگین مرتبه دوم را با s نمایش دهیم آن گاه با استفاده از لم فاتو داریم:

$$E|S-\psi(B)X_t|^۲ = E\ \liminf_{n\to\infty}\left|S-\sum_{j=-n}^{n}\psi_j X_{t-j}\right|^۲ \leq \liminf_{n\to\infty} E\left|S-\sum_{j=-n}^{n}\psi_j X_{t-j}\right|^۲ = ۰$$

لذا حدود S و $\psi(B)X_t$ با احتمال یکسان برابرند. □

قضیه۱-۱۳ اگر $\{X_t\}$ یک فرآیند ایستا با تابع اتوکوواریانس $\gamma(\cdot)$ و $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j| < \infty$ باشد آن گاه برای هر $t\in\mathbb{Z}$ سری (۱-۹) $\psi(B)X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j X_{t-j}$ با احتمال یک و بعلاوه در میانگین مرتبه دوم نیز همگراست که این دو حد با هم برابرند. اگر:

$$Y_t = \psi(B)X_t$$

آن گاه فرآیند $\{Y_t\}$ ایستا و با تابع اتوکوواریانس زیراست:

$$\gamma_Y(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma(h-j+k)$$

برهان. [۵] مشاهده می کنیم که اگر $\{X_t\}$ ایستا باشد، آن گاه:

$$E|X_t| \le \left(E|X_t|^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = C$$

که C متناهی و مستقل از t است. لذا با استفاده از قضیه (۱-۱۲)، همگرایی ثابت می شود. برای بررسی ایستایی $\{Y_t\}$ از همگرایی میانگین مرتبه دوم در (۱-۹) و پیوستگی ضرب داخلی استفاده می کنیم که داریم:

$$EY_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \psi_j \ EX_{t-j} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j\right) EX_t$$

و

$$E\left(Y_{t+h}Y_t\right) = \lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{j=-n}^{n} \psi_j X_{t+h-j}\right)\left(\sum_{k=-n}^{n} \psi_k X_{t-k}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \left(\gamma(h-j+k) + (EX_t)^{۲}\right)$$

بنابراین EY_t و $E\left(Y_{t+h}\ Y_t\right)$ متناهی و مستقل از t هستند. تابع اتوکوواریانس $\gamma_Y(\cdot)$ برای $\{Y_t\}$ به صورت زیر است:

$$\gamma_Y(h) = E\left(Y_{t+h}\ Y_t\right) - EY_{t+h}EY_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma(h-j+k) \qquad \square$$

عطف به قضیه قبل، در فرآیند خطی کلی $\{X_t\}$ که در تعریف (۱-۸) بیان گردید شرط به طور مطلق جمع پذیر بودن ضرایب صافی خطی $\psi(B)$، علاوه بر این که برای هر t همگرایی (در میانگین مرتبه دوم و با احتمال یک) سری سمت راست در (۱-۴) را تضمین می کند، شرطی کافی برای ایستایی سری $\{X_t\}$نیز می باشد. البته ذکر این مطلب شایسته است که همچنان سری نوفه سفید $\{Z_t\}$ ایستاست.