بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

موضوع

قضیه نقطه ثابت و قضیه همه سویی غیر خطی در فضای باناخ

استاد راهنما

دکتر بهرام محمدزاده

استاد مشاور

دکتر محسن علی محمدی

دانشجو

علی محمودی

تابستان ۹۱

تقدیم به

ساحت مقدس امام زمان (عج)

پدر ومادر عزیزو همسر مهربان و فداکارم

که با صبر و تحمل خود به بنده درتهیه این پایان نامه کمک فراوان نمودند.

تقدیر وتشکر

امام علی (ع):

هرکس کلمه ای به من بیاموزد مرا بنده خود کرده است.

در ابتدا بر خود لازم می بینم که از تلاش و راهنماییهای فراوان استاد عزیزم دکتر بهرام محمد زاده صمیمانه قدر دانی وتشکر کنم که از ابتدا تا انتهای این مجموعه با توجه به نظرات و راهنماییهای ایشان تدوین گشته است و اگر عیب و اشکالی در این مجموعه دیده می شود کم توجهی و قصور بنده می باشد. همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکترمحسن علی محمدی که مشاور بنده در این پایان نامه بودند کمال تشکر و سپاس گزاری را می نمایم.

ازاساتید بزرگوار دوران تحصیلم و اساتیدی که در این دوره بر بنده منت نهادند که افتخار شاگردی ایشان را داشته باشم بزرگوارانی مانند جناب آقای دکتر محمدزاده، جناب آقای دکتر هدایتی، جناب آقای دکتر باباخانی، جناب آقای دکتر رسولی و سر کار خانم دکتر خادملو کمال تشکر و قدر دانی را می نمایم.

علی محمودی

چکیده

فرض می کنیم که B یک فضای باناخ یکنواخت محدب باشد. ابتدا قضیه نقطه ثابت بـرای عملگرهـای خطی میان نقطه ای در L^1 را ثابت می کنیم. سپس در ادامه قضیه نقطه ثابت برای نیم گروههای نا آبلـی از نگاشتهای غیرانبساطی که روی زیر مجموعه های بی کران از فضای باناخ B تعریف می شوند را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین قضیه همه سویی غیر خطی برای نیم گروههای نا آبلی از نگاشتهای غیر انبساطی در فضای یکنواخت محدب باناخ و نیم گروههای غیر انبساطی بدون تحدب در فضای هیلبرت را ثابت می کنیم و هم زمان قضیه نقطه ثابت برای نیم گروههای بدون تحدب را بـه قضـیه نقطـه ثابـت برای نیم گروههای میانگین پذیر چپ و نیم گرو ههای برگشت پذیر چپ تعمیم می دهیم. سرانجام اگر C را زیر مجموعه ناتهی ، بسته و محدب از فضای یکنواخت محدب باناخ B در نظر بگیـریم و S یـک نیم گروه توپولوژیکی باشد که در آن RUC(S) زیر میانگین پایای چپ دارد ، ثابت می کنیم قضیه نقطه ثابت برای نمایش پیوسته ازS از نگاشتهای غیر انبساطی روی C برقرار است.

کلید واژه : عملگر خطی میان نقطه ای ، نگاشت غیر انبساطی ، نیم گـروه برگشــت پـذیر ، نـیم گروه میانگین پذیر ، زیر میانگین ، ساختار نرمال.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
مقدمه	٤
فصل ۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی	۷
بخش ۱.۱ تعاریف و مفاهیم توپولوژیکی	۸

بخش۱.۲تعاریف مربوط به فضای اندازه و معرفی برخی از نگاشتهای خاص ---------- ۱۳

بخش۱.۳تعاریف مربوط به نیم گروهها و برخی اصطلا حات کاربردی ------------ ۲٤

فصل۲. قضیه نقطه ثابت

برای عملگر های خطی میان نقطه ای در $L^1(\mu)$--------------------- ۲۹

فصل۳ . قضیه نقطه ثابت

وقضیه همه سویی برای خانواده ای از نگاشتهای غیر انبساطی ---------- ۳٦

بخش۳.۱ . قضیه نقطه ثابت

برای نگاشتهای غیر انبساطی روی مجموعه های بی کران -------------------- ۳۷

بخش۳.۲ .قضیه همه سویی ------------------------------------ ٥۰

فصل٤ . قضیه نقطه ثابت

و همه سویی غیر خطی برای نیم گروههای غیر انبساطی --------------- ٦۲

بخش٤.۱ قضیه نقطه ثابت برای نیم گروههای غیر انبساطی در فضای هیلبرت --------- ٦۳

بخش ٤.۲ قضیه نقطه ثابت برای نیم گروههای غیر خطی بدون تحدب ------------- ۷۱

بخش ٤.۳ قضیه نقطه ثابت برای نیم گروههای غیر انبساطی در فضای باناخ ---------- ۷۷

واژه نامه -- ۸٤

مراجع --- ۸۷

مقدمه

فرض می کنیم B یک فضای باناخ باشد و K زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار ومحدب B باشد. اگر α اندازه کوراتاوسکی غیر فشرده روی B باشد و $T: K \to K$ نگاشت α- غیرانبساطی باشد ، آنگاه فوریه[۱] و ویگنولی[۲] در [۲۰] ثابت کردند که نگاشت T در شرط زیر صدق می کند

$$\inf_{x \in K} \|T(x) - x\| = 0$$

لنارد[۳] در [۳۲] نشان داد که اگر K زیر مجموعه ناتهی، کراندار، فشرده و محدب از $L^1(\mu)$ باشد، هر نگاشت غیر انبساطی مانند $T: K \to K$ حداقل دارای یک نقطه ثابت می باشد. حال اگر چنانچه K زیر مجموعه ناتهی، کرندار، بسته و محدب از فضای یکنواخت باناخ B باشد براودر[٤] در [۱۱] ثابت کرد کهT دارای نقطه ثابت است. حال چنانچه شرط کرانداری را برای مجموعه K در نظر نگیریم، مساله وجود نقطه ثابت برای نگاشت T شکل دیگری پیدا می کند، که ریا ضی دانانی مانند کیرک-ری[٥] در [۲۸] ، پازی[٦] در[۳۷] و تاکاهاشی[۷]در [٤٤] روی این مجموعه های بی کران مطالعه کردند وهمزمان قضیه نقطه ثابت و قضیه همه سویی را برای نیم گروهها تعویض ناپذیر از نگاشتهای غیر انبساطی در فضای باناخ و نیم گروههای میانگین پذیر وبرگشت پذیر از فضای یکنواخت محدب باناخ وفضای هیلبرت گسترش دادند. از جمله کسانی که در این مورد مطالعه کردند می توان به تاکاهاشی ، لائو[۸]،

.

---

۱. Furi

۲. Vignoli

۳. Lennard

٤. Browder

٥. Kirk-Ray

٦. Pazy

۷. Takahashi

۸. Lau

میزوگوچی[۹]، ایشی هارا[۱۰] و بایلون[۱۱] اشاره کرد.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است.

فصل اول شامل سه بخش است که به مفاهیم وتعاریف مورد نیاز در طول این پایان نامه می پردازد. بخش اول مربوط به مفاهیم توپولوژیکی است. بخش دوم در مورد تعاریف مربوط به عملگرهای خطی میان نقطه ای و نگاشتهای غیر انبساطی و محدب و مفاهیم مرتبط با آنها می باشد. بخش سوم در مورد نیم گروههای میانگین پذیر و میانگین های پایا و تعریف برخ اصطلاحات کاربردی می باشد. فصل دوم راجع به قضیه نقطه ثابت برای عملگرهای خطی میان نقطه ای می باشد. فصل سوم قضیه نقطه ثابت و قضیه همه سویی برای خانواده ای از نگاشتهای غیر انبساطی در فضای محدب یکنواخت با ناخ می باشد که خود شامل دو بخش است بخش اول قضیه نقطه ثابت برای نگاشتهای غیر انبساطی روی مجموعه های بی کران است و بخش دوم قضیه همه سویی برای نیم گروههای میانگین پذیر در فضای هیلبرت می باشد. فصل چهارم در مورد قضیه نقطه ثابت وقضیه همه سویی غیر خطی برای نیم گروههای غیر انبساطی در فضای باناخ می باشد که مشتمل بر چهار بخش می باشد. بخش اول که قضیه نقطه ثابت برای نیم گروههای غیر انبساطی در فضای هیلبرت را بیان می کند. بخش دوم قضیه نقطه ثابت برای نیم گروههای غیر خطی بدون تحدب را مرد بررسی قرار می دهد. بخش سوم قضیه نقطه ثابت برای نیم گروههای غیر انبساطی در فضای محدب یکنواخت باناخ را بیان می کند.

لازم به یاد آوری که است که این پایان نامه با توجه به پنج مقاله زیر تدوین گشته است.

---

۹. Mizoguchi

۱۰. Ishihara

۱۱. Baillon

M. Chermisi and A. Martellotti, Fixed point theorems for middle point linear operators in L^1 , Fixed Point Theory Appl. Vol 2008, Article ID 648591, 13 pages doi:10.1155/2008/648591.

W.Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc.,81 (1981), 253-256.

W.Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36(1984), 543-553

W.Takahashi, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpahsive semigroups without convexity, Can. J. Math., 35(1992),1-8

W.Takahashi and D.H.Jeong, Fixed point theorem for nonexpansive semigroups on Banach space, Proc. Amer. Math. Soc., 122(1994),1175-1179.

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایای اولیه مورد نیازراکه در بررسی واثبات قضایا و مفاهیم اصـلی بکـار می رود را بیان می کنیم. این فصل به سه بخش تقسیم شده است. که در بخش اول به تعاریف ومفـاهیم توپولوژیکی اختصاص داده شده است. در بخش دوم مفاهیم و قضایای مربوط به فضاهای اندازه پـذیر و نیز عمگرهای خطی و آفین و مجموعه های محدب وتوابع محدب و... می پردازیم. در آخر نیز تعـاریف مربوط به نیم گروههای میانگین پذیر و برگشت پذیر، فضاهای محدب ویکنواخت محدب می پردازیم.

بخش اول

تعاریف و مفاهیم توپولوژیکی

تعریف ۱.۱.۱ : فرض کنید X یک مجموعه و (Y , τ_Y) فضای توپولوژیک باشند و $\mathcal{F}$ خانواده ایی از توابع از X به Y باشند، قرار می دهیم :

$$S = \{U \subset X \,;\, \exists\, V \subset Y, \exists f \in \mathcal{F} \,, U = f^{-1}(V)\}$$

به سادگی دیده می شود که S را می توان بعنوان زیر پایه ای برای یک توپولوژی روی X در نظر گرفت. آن توپولوژی را با نماد $\sigma\,(X \,, \mathcal{F})$ نشان می دهیم. حال فرض می کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی با توپولوژی τ_X باشد و X^* فضای دوگان آن باشد که نقاط X را از هم جدا می کند. د راین صورت توپولوژی $\sigma\,(X \,, X^*)$ بر روی X را توپولوژی ضعیف[1] می نامیم.

۱. Weak topology

تعریف :

۱) یک مجموعه بطور ضعیف فشرده است اگر در تـوپـولـوژی ضعیف فشرده باشد.

۲) یک مجموعه به طور ضعیف بسته است اگر در تـوپـولـوژی ضعیـف بـسته باشد.

۳) یک نگاشت به طور ضعیف پیوسته است اگر در تـوپولوژی ضعیف پیوسته باشد.

تعریف ۱.۱.۲ : فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی است که X^* فضـای دوگـان آن می باشد. برای هر $x \in X$ تعریف زیر را در نظر می گیریم:

$$\varphi_x : X^* \to R \qquad [\, \varphi_x(f) = f(x)]$$

بـا توجـه بـه خطـی بـودن f براحتـی مـی تـوان نشـان داد کـه φ_x نیـز خطـی اسـت. بنـابراین $\Phi = \{\varphi_x \, ; x \in X\}$ یـک فضـای بـرداری مـی سـازد. همچنـین Φ نقـاط X^* را از هـم جـدا مـی کنـد. تـوپـولـوژی $б(X^*, \Phi)$ را تـوپـولـوژی ضـعیف سـتاره[۲] مـی گـوییم. تحـت ایـن تـوپـولـوژی کلیه عناصر خـانواده Φ پیوسـته هسـتند. ایـن توپولـوژی رابـا نمـاد $б(X^*, X)$ نشـان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۳ : فرض کنید X یک فضـای خطـی نـرم دار و X^* فـضای دوگـان آن بـاشـد می دانیم که X^* فضای خطی نرم دار و باناخ است. دوگان X^* را که خود یـک فضـای بـانـاخ اسـت بـا X^{**} نمایش می دهیـم و آن را دوگـان دوم فضـای X می نـامیم. فضـای بـانـاخ X را انعکاسـی[۳] می گوییم اگر $\Phi(X)=X^{**}$.

۲. Weak *-topology

۳. Reflexive

. **تعریف۱.۱.٤**: مــجموعه دلــخواه A را مــحدب[٤] گوییـــــم، اگــر بــه ازای هــر $\lambda \in [0,1]$ و x و $y \in A$ داشته باشیم :

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

تعریف۱.۱.۵: فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد، می گوییم X موضـعا محـدب[٥] اسـت اگـر یک مـجموعه بـاز محدب حول صفر وجود داشته باشد و X موضعا فشرده است اگر یـک همسـایگی حول صفر با بستار فشرده وجود داشته باشد.

تعریف۱.۱.٦: فرض کنید X یک فضای بـرداری توپولـوزیکی و E زیـر مجموعـه آن باشـد. E را کراندار گوییم اگر به ازای هر باز حول صفر مانند W یـک ضـریب وابسـته بـه Wماننـد λ پیـدا شـود بطوریکهλW، E را در بر گیرد.

تذکر۱.۱.۷ : اگرX یک فضای برداری توپولوژیکی باشد و $K \subseteq X$ فشرده باشد آنگـاه K بسـته و کراندار است واگر K کراندار باشد، بستار آن نیز کراندار است.

تعریف ۱.۱.۸ : فرض کنید X یک فضای برداری توپولوزیکی باشد، X را موضعا کراندار گوییم، اگر یک پایه موضعی شمارا متشکل از مجموعه های کـراندار وجود داشته باشد به عبارت دیگر یک باز کراندار حول صفر وجود داشته باشد.

---

٤. Convex

٥. Locally convex

تعریف۱.۱.۹ : فرض کنید X و Y دو فضای برداری توپولوژیکی باشند، عملگر T:X→Y را کراندار گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه کراندار X مانند E، T(E)⊆Y کراندار باشد.

تعریف ۱.۱.۱۰ : فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد. می گوییم دنباله (x_n) در **X** در نرم همگرای قوی[6] است اگر عضوی مانند x در X وجود داشته باشد بطوریکه $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ و همگرای ضعیف[7] است اگر عضوی مانند x در X وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر f عضو X* داشته باشیم :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

و این همگرایی را بصورت $x_n \xrightarrow{w} x$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۱ : فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار باشند، B(x,y) را مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار از X به Y در نظر می گیریم. دنباله (T_n) از عملگرهای $T_n \in B(X,Y)$ را در نظر گرفته و می گوییم (T_n) به T عضو B(x,y)

۱)همگرای یکنواخت[8] است هرگاه (T_n) در نرم روی B(X,Y) همگرا باشد، یعنی عملگری خطی مانند T:X→ Y پیدا شود بطوریکه $\|T_n - T\| \to 0$.

---

۶. Strong convergence

۷. Weak convergence

۸. Uniformly operator convergent

۲)همگرای قوی[۸] است هرگاه $(T_n x)$ به زای هر x عضو X همگرای قوی در Y باشد.

۳)همگرای ضعیف[۹] است هرگاه $(T_n x)$ به زای هر x عضو X همگرای ضعیف در Y باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲ : فضای X را هاوسدورف[۱۰] می گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز X مانند x و y مجموعه های بازی مانند U و V (در X) موجود باشند بطوریکه $x \in U$ ، $y \in V$ و $V \cap U = \phi$.

تعریف ۱.۱.۱۳ : مجموعه X را با توپولوژی τ در می گیریم. اگر فضای توپولوژیکی (X, τ) یک فضای هاوسدورف باشد آنگاه τ را یک توپولوژی هاوسدورف می گوییم.

۸. Strongly operator convergent

۹. Weakly operator convergent

۱۰. Hausdorff

بخش دوم

تعاریف مربوط به فضای اندازه و معرفی برخی از نگاشتهای کاربردی

تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنید X یک مجموعه و $\mathcal{M} \subseteq P(X)$ یک σ- جبر باشد . زوج $(X , \mathcal{M})$ را فضای اندازه پذیر می نامیم وعناصر $\mathcal{M}$ را مجموعه های اندازه پذیر می گوییم.

تعریف ۱.۲.۲ : اگر μ یک اندازه روی $(X , \mathcal{M})$ باشد آنگاه $(X , \mathcal{M}, \mu)$ را یک فضـای انـدازه می نامیم .

تعریف ۱.۲.۳ : فرض کنید $(X , \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد ، اگر $\mu(X)<\infty$ ، آنگاه μ را

اندازه متناهی می نامیم . و اگر $X=\cup_1^{\infty} E_j$ بطوریکه به ازای هر j ، $E_j \in \mathcal{M}$ و $\mu(E_j) < \infty$ ،μ

اندازه σ- متناهی نامیده می شود.

تعریف ۱.۲.٤ : فرض کنید $(X , \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، $L^1(\mu)$ که بصورت زیر تعریف می شود را فضای توابع اندازه پذیرمی نامیم.

$$L^1(\mu) = \left\{ f \;\middle|\; f\colon X \to C\ ;\ \int_X |f|\, d\mu < \infty\ ;\ \text{اندازه پذیر است}\ f \right\}$$

فرض کنید(Ω,Σ,μ) یک فضای اندازه σ- متناهی باشد و $(\boldsymbol{\Omega_m})_{\boldsymbol{m=1}}^{\infty}$ یک μ – افراز از $\boldsymbol{\Omega}$ باشد که به ازای هر $m=1,2,3,\ldots$ ، $\boldsymbol{\mu} (\boldsymbol{\Omega_m}) < +\infty$. فرض می کنیم $M(\mu)$ خانواده ای از توابع هم ارز با $x\colon \Omega \to \tilde{R}$ هستند که تقریبا همه جا μ – اندازه پذیر و متناهی و همنهشت با μ هستند. $M(\mu)$ را می توان با متر زیر توصیف کرد:

$$\rho\,(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{1}{\mu(\Omega_m)} \int_{\Omega_m} \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\, d\mu \quad ; \quad x,y \in M(\mu)$$

می دانیم که متر ρ یک تبدیل پایاست وتوپولوژی القایی آن موضعا همگرا در اندازه است. اگر $\mu(\Omega) < +\infty$ باشد آنگاه همگرایی موضعی در اندازه روی توپولوژی $M(\mu)$ با همگرا یی موضعی در اندازه در توپولوژی القایی توسط متر

$$\rho\,(x,y) = \int_{\Omega} \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\, d\mu$$

هم ارز می باشند. توجه داریم که $L^1(\mu)$ را می توان با توپولوژی تولید شده توسط نرم و توپولوژی القایی توسط ρ توصیف کرد. بنابراین زیر مجموعه ای از $L^1(\mu)$ را کراندار ، بسته یا

کامل می گویم اگر نسبت به نرم $\|.\|_{L^1}$ کراندار، بسته یا کامل باشد، که با $\|.\|_{L^1}$- کراندار یا $\|.\|_{L^1}$ –بسته یا $\|.\|_{L^1}$ – کامل نشان می دهیم.

تعریف ۱.۲.۵ : فرض کنید X_1 یک گوی بسته از فضای نرم دار X *باشد*(این فرض در همه جا برقرار است.) و K زیرمجموعه محدب X (که $K=X$) باشد. عملگر پیوسته $T: K\to X$ ، یک عملگر خطی میان نقطه ای[1] است هر گاه به ازای هر عدد مثبت r ، داشته باشیم :

$$x \text{ و } y \in K \text{ و } T(x) \in x + rX_1 \quad \text{و} \quad T(y) \in y + rX_1 \quad \text{که } T\left(\frac{x+y}{2}\right) \in \frac{x+y}{2} + rX_1$$

تعریف ۱.۲.٦ : فرض کنید M زیر مجموعه ای از فضای برداری مختلط X باشد که

$$\forall \;\; x\,, y \;\in M\,, \lambda \in [0,1] \qquad : \qquad \lambda x + (1-\lambda)y \quad \in M$$

آنگاه عملگر $T: M \to M$ را آفین[2] گوییم اگر:

$$\forall\, x, y \;\in M \;\;, \lambda \in [0,1]:\;\; T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda Tx + (1-\lambda)T(y)$$

تذکر ۱.۲.۷ : اگر X یک فضای نرم دار باشد و $\lambda \in [0,1]$ باشد آنگاه عملگر آفین $T: X \to X$ یک عملگر خطی میان نقطه ای است.

مثال ۱.۲.۸ : فرض $\varphi: [0,\infty] \to [0,1]$ یک تابع پیوسته و نزولی باشد، $T{:}X\to X$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$T(x) = \varphi(\|x\|)x \qquad , \qquad \forall x \in X$$

۱. Middle point linear operator

۲. Affine

عملگر T ، عملگرخطی میان نقطه ای است. فرض $r > 0$ ، ثابت دلخواه باشد و X $\in$ y و x باشند بطوریکه داشته باشیم:

$$\|x - T(x)\| = \|x - \varphi(\|x\|)x\| = \|1 - \varphi(\|x\|)\|\|x\| \le r$$

و

$$\|y - T(y)\| = \left\|1 - \varphi(\|y\|\right\|\|y\| \le r$$

حال فرض می کنیم که $\|x\| \le \|y\|$. چون φ نزولی است و $\frac{\|y\|}{2} \le \frac{\|x\|}{2}$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{\|x + y\|}{2} \le \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \le \frac{\|y\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} = \|y\|$$

لذا

$\varphi(\|y\|) \le \varphi\left(\frac{\|x+y\|}{2}\right)$ در نتیجه

$$\left\|\frac{x+y}{2} - T\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\| = \left[1 - \varphi\left(\frac{\|x+y\|}{2}\right)\right]\left\|\frac{x+y}{2}\right\|$$

$$\le [1 - \varphi(\|y\|)]\|y\| \le r$$

و این یعنی $T\left(\frac{x+y}{2}\right) \in \frac{x+y}{2} + rX_1$.

تعریف ۱.۲.۹ : تابع $f: R^n \to R$ را محدب گوییم ، اگر $dom\ f$ محدب باشد وداشته باشیم: