دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض-جبر

n-ابرگروه‌ها، روابط n-تایی و ابرگروه‌های فازی حاصل از روابط فازی

استاد راهنما: دکتر سید محمد انوریه

استاد مشاور: دکتر محمدعلی ایرانمنش

پژوهش و نگارش:

سمیّه مؤمنی

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و روان پاک مادرم

سپاس‌گزاری

به نام آن که دل را مرکز عواطف و قلب را مرکز ایمان و مغز را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

اینک که به یاری حضرت حق سبحانه و تعالی توانسته‌ام در منزلی دیگر از منازل تحصیل، خوشه‌چین میوه‌هایی جانبخش از درخت دانش و معرفت باشم بر خویش وظیفه می‌دانم به پاس تلاش و لطف همیشگی استادان گرانقدر، از آنان قدردانی کنم.

از جناب آقای دکتر سید محمد انوریه، استاد راهنمای بزرگوارم به پاس تمامی زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های دلسوزانه‌اشان کمال تشکر و سپاس را دارم، همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر محمدعلی ایرانمنش که استاد مشاور اینجانب بودند، تشکر می‌کنم. خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودش بیاسایم و از ریشه آن شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودش در راه کسب علم ودانش تلاش نمایم . پدری که بودنش تاج افتخاری است بر سرم و نامش دلیلی است بر بودنم، چرا که این وجود پس از پروردگار مایه هستی من بوده، دستم را گرفته و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب به من آموخته است. از برادران عزیزم که همواره حامی و پشتیبان من بوده‌اند بسیار ممنون و سپاسگزارم و از خداوند منان برای آن‌ها طول عمر، سلامتی و سعادت را خواستارم.

چکیده

ابرگروه‌ها یکی از مهمترین شاخه‌های ابرساختارهای جبری هستند. در این پایان نامه ابتدا به بیان ارتباط ابرگروه‌ها و روابط n-تایی پرداخته و سپس ارتباط بین n-ابرگروه‌ها و روابط دوتایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس مطالب فوق را تعمیم داده و $(n+۱)$-ابرگروه‌وارهای وابسته به روابط n-تایی که روی مجموعه ناتهی تعریف می‌شود را بیان می‌کنیم. در ادامه با قرار دادن شرایطی ثابت می‌کنیم که چنین $(n+۱)$-ابرگروه‌وارهایی یک H_v-گروه $(n+۱)$-تایی، یک $(n+۱)$-ابرگروه یا $(n+۱)$-فضای الحاقی است.

در ادامه با قرار دادن $n=۲$، به بحث روی ابرگروه‌های خاص تحت عنوان C-ابرگروه‌ها پرداخته و رابطه ابرعملی R_* را که از یک ابرگروه‌وار غیرجزئی یا جزئی حاصل می‌شود، معرفی می‌کنیم. همچنین، یک طبقه بندی از تمام ابرگروه‌وارهای غیرجزئی یا جزئی ارائه می‌دهیم که این طبقه‌بندی بر پایه R_* و C-ابرگروه‌وارهای غیرجزئی یا جزئی وابسته به روابط دوتایی روی مجموعه H می‌باشد.

در پایان ابرعمل فازی و ابرگروه‌وار فازی وابسته به رابطه فازی را مطالعه کرده و شرط لازم و کافی برای این‌که ابرگروه‌وار فازی به ابرگروه فازی تبدیل شود را بیان می‌کنیم. علاوه براین، نشان می‌دهیم که رسته $NFHG$ از ابرگروه‌های فازی نرمال در تمامی شرایط توپوس بجز اصل زیرشیء رده بندی شده صدق می‌کند.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

۱.۰ تاریخچه و مقدمه

نظریه ابرساختارهای جبری اولین بار در سال ۱۹۳۴، توسط مارتی[۱] [۲۴] در هشتمین کنگره ریاضیدانان اسکاندیناوی مطرح شد. در این کنگره مارتی برای اولین بار، مفهوم ابرگروه را به عنوان تعمیم گروه‌ها معرفی کرد. یک ابرگروه در نظریه‌ی مارتی عبارت است از یک مجموعه ناتهی H همراه با ابرعمل $\circ$، از $H \times H$ به خانواده همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی H که در قوانین شرکت‌پذیری و تکثیر صدق می‌کند. این اولین گام در تاریخ ریاضیات در نظریه ابرساختارهای جبری بوده است. نظریه ابرساختارهای جبری کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از جمله: هندسه، توپولوژی، گروه‌های متناهی، گراف‌ها و ابرگراف‌ها، نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه روابط دوتایی و احتمالات دارد[۵]. اولین بار حدود هشتاد سال پیش دورنت[۲] گروه‌های n-تایی را به عنوان تعمیمی از گروه‌ها معرفی کرد[۱۷]. ابرگروه‌های n-تایی به عنوان تعمیمی از گروه‌ها، ابرگروه‌ها و گروه‌های n-تایی در سال ۲۰۰۶ توسط دواز و وجیوکلیس[۳] ارائه شد [۱۳]. از آن زمان تاکنون روابط بسیاری بین ابرساختارها و روابط دوتایی برقرار بوده است و توسط بسیاری دانشمندان مورد مطالعه قرار گرفته است از جمله: روزنبرگ[۴] [۲۹]، کرسینی[۵] [۸]، کرسینی و لئورئانو[۶] [۶]، چاولینا[۷] [۲]، اسپرتالیس[۸] [۳۴, ۳۳, ۳۲]، دی سالوو[۹] و لوفارو[۱۰] [۱۶] و غیره.

ابرعمل‌های بسیاری به روشهای مختلف می‌توانند حاصل شوند[۲۹, ۳, ۲]. در این پایان نامه با ابرعمل معرفی شده توسط کرسینی[۴] و مطالعه شده توسط کرسینی و دیگران سروکار داریم که به روش زیر حاصل

[۱] Marty

[۲] Dornte

[۳] Vougiouklis

[۴] Rosenberg

[۵] Corsini

[۶] Leoreano

[۷] Chvalina

[۸] Spartalis

[۹] De Salvo

[۱۰] Lo Faro

می‌شود[۲۱, ۲۰, ۴]:

$$*_R : H \times H \longrightarrow \wp(H) \qquad : (x,y) \longrightarrow x *_R y = \{z \in H | xRz, zRy\}.$$

اخیراً لئورئانو-فوتئا[۱۱] و دواز، n-ابرگروه‌های وابسته به روابط دوتایی را مورد مطالعه قرار داده‌اند[۲۲]. روابط n-تایی به‌طور عمیق توسط نواک[۱۲] و نووتنی[۱۳] ، به خاطر کاربردشان در نظریه فضای وابسته مورد مطالعه قرار گرفته است[۲۸, ۲۷, ۲۶]. همچنین، یوسان[۱۴] و سه‌سلجا[۱۵]، تعمیم‌های مختلفی از مفهوم روابط n-تایی بازتابی، تقارنی و تعدی ارائه داده‌اند و بین برخی از آن‌ها روابطی را برقرار کرده‌اند[۳۶]. علاوه‌براین، روابط n-تایی در نظریه پایگاه داده استفاده می‌شوند، چراکه آنها ابزاری مناسب برای پردازش داده‌ها می‌باشند.

منطق فازی در سال ۱۹۶۵ توسط عسگرزاده پروفسور علوم کامپیوتر دانشگاه برکلی کالیفرنیا ارائه شد[۳۸]. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. بویژه، روزنفلد[۱۶][۳۱] اولین مقاله را در زمینه گروه‌های فازی ارائه کرد و پس از آن محققین بسیاری در این زمینه کار کرده‌اند[۲۵, ۱۲, ۱].

این رساله در ۵ فصل تنظیم گردیده است. پس از بیان تاریخچه و مقدمه در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی ابرگروه‌ها می‌پردازد. در فصل دوم ابرگروه‌ها و روابط n-تائی را بررسی کرده و به اثبات قضایا و لم هایی در این زمینه می‌پردازد، همچنین ارتباط بین n-ابرگروه‌ها و روابط دو تائی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد. در فصل ۳ تعمیمی از مطالب گفته شده در فصل‌های قبلی با عنوان n-ابرگروه‌های وابسته به روابط n-تایی را مطرح کرده و با ارائه برخی تعاریف و مثالها شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن $(n+۱)$-ابرگروه‌وارهای وابسته به روابط n-تایی به $(n+۱)$-ابرگروه، H_v گروه $(n+۱)$-تایی یا فضای $(n+۱)$-الحاقی تبدیل شود. در فصل ۴ با قرار دادن $n = ۲$، ابرگروه‌های خاصی تحت عنوان

[۱۱] Fotea

[۱۲] Novak

[۱۳] Novotny

[۱۴] Usan

[۱۵] Seselja

[۱۶] Rosenfeld

C-ابرگروه‌ها مطرح و یک طبقه بندی از C-ابرگروه‌وارهای غیر جزئی یا جزئی ارائه می‌شود. در فصل ۵ با معرفی ابرگروه‌های فازی و ابرگروه‌های فازی نرمال نشان داده می‌شود که یک رسته از ابرگروه‌های فازی نرمال در تمامی خواص توپوس[۱۷] به جز اصل زیر شیئ رده بندی شده صدق می‌کند.

[۱۷] topos

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ n-ابرگروه‌ها

فرض کنید H مجموعه‌ای ناتهی و $f : H^n \longrightarrow \wp^*(H)$، که در آن $\wp^*(H)$ مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های ناتهی از H می‌باشد. در اینصورت f یک n-ابرعمل روی H و زوج (H, f) یک n-ابرگروه‌وار نامیده می‌شود [۲۲].

اگر $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ زیرمجموعه‌هایی از H باشند آن‌گاه

$$f(A_۱, A_۲, \ldots, A_n) = \cup\{f(a_۱, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i \in \{۱, ۲, \ldots, n\}\}.$$

در ادامه دنباله $a_i, a_{i+۱}, \ldots, a_j$ را با نماد a_i^j نشان می‌دهیم و برای $j < i$، a_i^j مجموعه‌ای تهی است. اگر به ازای هر $a_۱^n \in H$ رابطه $f(a_۱^n) \neq \emptyset$ برقرار باشد، آن‌گاه (H, f) را n-ابرگروه‌وار غیرجزئی یا n-ابرگروه‌وار و در غیر این‌صورت آن‌را n-ابرگروه‌وار جزئی می‌نامند.

n-ابرگروه‌وار جزئی (H, f) یک n-نیم ابرگروه نامیده می‌شود اگر به ازای هر $i, j \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $a_۱^{۲n-۱} \in H$،

$$f(a_۱^{i-۱}, f(a_i^{n+i-۱}), a_{n+i}^{۲n-۱}) = f(a_۱^{j-۱}, f(a_j^{n+j-۱}), a_{n+j}^{۲n-۱}).$$

n-ابرگروه‌وار (H, f) که در آن به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ و $a_۱, \ldots, a_{i-۱}, a_{i+۱}, \ldots, a_n, b \in H$، معادله $b \in f(a_۱^{i-۱}, x_i, a_{i+۱}^n)$ دارای جواب $x_i \in H$ باشد، یک شبه ابرگروه n-تایی نامیده می‌شود.

یک n-ابرگروه، نیم ابرگروهی n-تایی است که شبه ابرگروهی n-تایی نیز باشد.

n-ابرگروه‌وار (H, f) یک H_v-نیم‌گروه n-تایی نامیده می‌شود اگر در اصل شرکت‌پذیری ضعیف به صورت زیر صدق کند:

$$\bigcap_{i=۱}^{۲n-۱} f(x_۱^{i-۱}, f(x_i^{n+i-۱}), x_{n+i}^{۲n-۱}) \neq \emptyset,$$

به ازای هر $x_۱, x_۲, \ldots, x_{۲n-۱} \in H$.

H_v-نیم گروه n-تایی که در اصل تکثیر صدق کند، یک H_v-گروه n-تایی نامیده می‌شود. در حالتی که $n = ۲$ باشد، یک n-ابرگروه را ابرگروه می‌نامند.

مثال ۱.۱.۱. مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به همراه ابرعمل $\circ$ که به صورت زیر تعریف می‌شود یک ابرگروه‌وار

است:

$$\circ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \wp^*(\mathbb{N}) \qquad : n \circ m = \{n, m, n+m, nm\}$$

اگر برای هر $x, y \in H$ داشته باشیم $x \circ y = H$، آنگاه $(H, \circ)$ ابرگروه کامل نامیده می‌شود.

اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از H باشند، آن‌گاه:

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b.$$

به ازای هر زوج $(a, b) \in H^۲$ نمادهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$b \setminus a = \{y | a \in b \circ y\} \text{ و } a/b = \{x | a \in x \circ b\}$$

اگر A و B زیرمجموعه‌های ناتهی H باشند، آن‌گاه

$$A/B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a/b.$$

یک ابرگروه تعویض پذیر $(H, \circ)$ یک فضای الحاقی نامیده می‌شود هرگاه در استلزام زیر صدق کند: برای هر $(a, b, c, d) \in H^۴$،

$$a/b \cap c/d \neq \emptyset \Longrightarrow a \circ d \cap b \circ c \neq \emptyset.$$

۲.۱ C-ابرگروه‌وارها

ابرگروه‌وار جزئی $(H, *)$، مجموعه‌ای ناتهی همراه یک ابرعمل است، یعنی،

$$* : H \times H \longrightarrow \wp(H)$$

$$(x, y) \mapsto x * y.$$

علاوه بر این، $(H, *)$ یک ابرگروه‌وار تبهگون شدنی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x, y \in H$ داشته باشیم $x * y = \emptyset$ و یک ابرگروه‌وار کامل نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x, y \in H$ داشته باشیم $x * y = H$. همچنین $(H, *)$ ابرگروه‌وار به‌طور ضعیف تعویض پذیر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in H$

$$x * y \cap y * x \neq \emptyset.$$

روابط دوتایی تعریف شده روی H را با $\Re_H = \{R|R \subseteq H \times H\}$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $(H, \bullet)$ و $(H, *)$ ابرگروه‌وارهای غیرجزئی یا جزئی تعریف شده روی H هستند. ابرعمل $(\bullet)$ کوچکتر یا مساوی $(*)$ نامیده می‌شود، اگر و فقط اگر اتومورفیسمی مانند $f \in Aut(H, *)$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x, y \in H$، $x \bullet y \subseteq f(x * y)$. در این‌صورت گوئیم که $(H, *)$ در بردارنده یا شامل $(H, \bullet)$ است و می‌نویسیم "$\bullet \leq *$". در حالتی که f تابع همانی باشد به جای $f(x * y)$ قرار می‌دهیم $x * y$ و در نتیجه به ازای هر $x, y \in H$، $x \bullet y \subseteq x * y$ خواهد بود. بنابراین $H_\bullet \leq H_*$.

فرض کنید $H \neq \emptyset$. در این صورت به ازای هر ابرگروه‌وار غیر جزئی یا جزئی $(H, *) = H_*$، یک رابطه‌ی دوتایی یکتا مانند $R_* \in \Re_H$ به روش زیر تعریف می‌شود:

(۱) به ازای $x, y \in H$ که در نظر می‌گیریم $z \in x * y \neq \emptyset$ اگر و فقط اگر xR_*z و zR_*y.

(۲) $H * H = \emptyset$ اگر و فقط اگر $R_* = R_o = \emptyset$.

رابطه دوتایی فوق رابطه ابرعملی از $(H, *)$ نامیده می‌شود و با R_* نشان داده می‌شود. ابرعمل‌های بسیاری با روش‌های مختلف حاصل می‌شوند. در این‌جا با ابر عمل کرسینی سرو کار خواهیم داشت که این ابرعمل به روش زیر تعریف می‌شود:

$$*_R : H \times H \longrightarrow \wp(H) \qquad : (x, y) \mapsto x *_R y = \{z \in H | xRz, zRy\}.$$

از آن‌جایی که ابر ساختار گفته شده همواره ناتهی نیست، ابر ساختار $(H, *_R)$ یک ابرگروه‌وار جزئی است که " ابر گروه‌وار جزئی کرسینی وابسته به رابطه دوتایی R" (به طور خلاصه، C-ابرگروه‌وار جزئی) نامیده می‌شود و با H_R نشان داده می‌شود.

واضح است که C-ابرگروه‌وار جزئی H_R یک C-ابرگروه‌وار است اگر و فقط اگر $R \circ R = H \circ H$.

۳.۱ مجموعه‌های فازی

یک مجموعه فازی اجتماعی از اشیا همراه با درجه عضویت می‌باشد. در واقع مجموعه فازی، مجموعه‌ای است که در آن به جای اینکه عضویت یا عدم عضویت یک عنصر مطرح شود، میزان عضویت آن بررسی می‌شود. مجموعه فازی A در X توسط تابع عضویت $f_A(x)$ مشخص می‌شود که به هر نقطه‌ای در X

یک عدد حقیقی در بازه صفر و یک ($[۰, ۱]$) نسبت می‌دهد که مقدار $f_A(x)$ در x درجه عضویت x در A نامیده می‌شود[۳۹].

یک مجموعه فازی تهی است اگر و فقط اگر تابع عضویت آن روی X متحد با صفر باشد.

دو مجموعه فازی A و B برابرند و بصورت $A = B$ نوشته می‌شوند، اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$، $f_A(x) = f_B(x)$.

مکمل مجموعه فازی A با A' نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{A'} = ۱ - f_A.$$

اجتماع دو مجموعه فازی A و B که به ترتیب با تابع عضویت $f_A(x)$ و $f_B(x)$ نشان داده می‌شوند، مجموعه‌ای فازی مانند C است که به صورت $C = A \cup B$ نوشته می‌شود و تابع عضویت آن بصورت

$$f_C(x) = Max[f_A(x), f_B(x)], \qquad x \in X,$$

بیان می‌شود یا به طور خلاصه تر بصورت $f_C = f_A \vee f_B$.

اشتراک دو مجموعه فازی A و B که به ترتیب با تابع عضویت $f_A(x)$ و $f_B(x)$ نشان داده می‌شوند، مجموعه‌ای فازی مانند C است، که به صورت $C = A \cap B$ نوشته می‌شود و تابع عضویت آن بصورت

$$f_C(x) = Min[f_A(x), f_B(x)], \qquad x \in X,$$

بیان می‌شود یا به طور خلاصه‌تر بصورت $f_C = f_A \wedge f_B$.

فصل ۲

ابرگروه‌ها و روابط n-تایی، n-ابرگروه‌ها و روابط دوتایی

۱.۲ ابرگروه‌ها و روابط n-تایی

در این بخش ابرگروه‌وار $(H, \otimes_\rho)$ را به یک رابطه n-تایی ρ تعریف شده روی مجموعه ناتهی H وابسته کرده و شرایطی را بیان می‌کنیم که ابرگروه‌وار حاصل از این رابطه یک H_v-گروه، گروه یا یک فضای الحاقیی است.

تعریف ۱.۱.۲. [۲۷]. رابطه‌ی n-تایی ρ یک رابطه‌ی:

۱. بازتابی است، اگر به ازای هر $x \in H$، $(x, \cdots, x) \in \rho$،

۲. n-تعدی است اگر دارای خاصیت زیر باشد:

اگر $(x_1, \ldots, x_n) \in \rho$ و $(y_1, \ldots, y_n) \in \rho$ و اعداد طبیعی $i_0 > j_0$ وجود داشته باشند، به‌طوری‌که $1 < i_0 \leq n$ و $1 \leq j_0 < n$ و $x_{i_0} = y_{j_0}$، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی $1 \leq k < n$ و $i_1, \ldots, i_k, j_{k+1}, \ldots, j_n$ که در آن

$$1 \leq i_1 < \ldots < i_k < i_0, j_0 < j_{k+1} < \ldots < j_n \leq n$$

داشته باشیم $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, y_{j_{k+1}}, \ldots y_{j_n}) \in \rho$.

۳. متقارن است، اگر از $(x_1, \ldots, x_n) \in \rho$ نتیجه شود که $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) \in \rho$،

۴. به طور قوی متقارن است، اگر از $(x_1, \ldots, x_n) \in \rho$ نتیجه شود که $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in \rho$، به ازای هر جایگشت σ روی مجموعه $\{1, \ldots, n\}$،

۵. یک شبه ترتیب n-تایی روی H است، اگر بازتابی و n-تعدی باشد،

۶. n- هم ارزی روی H است، اگر بازتابی، به طور قوی متقارن و n-تعدی باشد.

مثال ۲.۱.۲. (۱) به ازای $n = 2$ یک رابطه‌ی دوتایی ۲-تعدی است اگر و فقط اگر متعدی به معنای معمولی باشد. به‌علاوه یک ۲-هم‌ارزی است اگر هم‌ارزی به معنای عام باشد.

(۲) فرض کنید $n = 3$ است. رابطه سه تایی ρ یک رابطه‌ی ۳-تعدی است اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند:

(الف) اگر $(x, y, z) \in \rho$ و $(y, u, v) \in \rho$، آن‌گاه $(x, u, v) \in \rho$.

(ب) اگر $(x, y, z) \in \rho$ و $(z, u, v) \in \rho$، آن‌گاه $(x, y, u) \in \rho$ و $(x, y, v) \in \rho$ و $(x, u, v) \in \rho$ و

$.(y,u,v)\in\rho$

(ج) اگر $(x,y,z)\in\rho$ و $(u,z,v)\in\rho$ است، آن‌گاه $(x,y,v)\in\rho$.

(۳) قرار دهید $H=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_n\}$ و فرض کنید $\rho=\{(a_i,\ldots,a_i)|۱\leq i\leq n\}$ رابطه‌ای قطری روی H است. در این صورت، ρ یک n-هم‌ارزی است.

(۴) فرض کنید $H=\{۱,۲,۳\}$ و ρ رابطه‌ای سه تایی روی H است که به‌صورت

$$\rho=\{(۱,۱,۳),(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),(۳,۳,۳),(۱,۳,۳)\}$$

تعریف می‌شود. در این صورت، ρ یک شبه ترتیب سه تایی روی H است اما یک سه هم‌ارزی نیست. اگر $(۱,۱,۳)\in\rho$ و $\sigma=(۱۳)$ است، آن‌گاه $\rho\notin(۳,۳,۱)=(\sigma(۱),\sigma(۱),\sigma(۳))$ و این نتیجه می‌دهد که رابطه فوق به‌طور قوی متقارن نیست.

مثال ۳.۱.۲. قرار دهید $H=\mathbb{C}$. $(x_۱,\ldots,x_n)\in R$ اگر $|x_n|=\ldots=|x_۲|=|x_۱|$. در این صورت، R بازتابی، قویاً متقارن و n-تعدی است.

مثال ۴.۱.۲. فرض کنید $H=\mathbb{N}$. $(x_۱,\ldots,x_n)\in R$ اگر $x_n<\ldots<x_۲<x_۱$. به آسانی مشاهده می‌شود که R بازتابی و به‌طور قوی متقارن نیست، اما n-تعدی است.

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید ρ رابطه‌ای n-تایی روی مجموعه ناتهی H است. می‌توان به ρ یک رابطه‌ی دوتایی ρ^b را به صورت زیر وابسته کرد :

به ازای هر $(x,y)\in H^۲$ قرار دهید $(x,y)\in\rho^b$، اگر $(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)\in\rho$ و اعداد طبیعی i,j وجود داشته باشند به گونه‌ای که $۱\leq i<j\leq n$ و $x=x_i,y=x_j$.

مثال ۶.۱.۲. فرض کنید ρ رابطه‌ای سه تایی روی H است. در این صورت رابطه‌ی دوتایی ρ^b وابسته به ρ همانند تعریف قبلی به صورت زیر تعریف می‌شود: $(x,y)\in\rho^b$ اگر $z\in H$ی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(x,y,z)\in\rho$ یا $(z,x,y)\in\rho$ یا $(x,z,y)\in\rho$.

برای مثال، رابطه‌ی دوتایی ρ^b وابسته به رابطه‌ی سه تایی ρ در مثال ۲.۱.۲ قسمت ۴ به صورت $\rho^b=\{(۱,۱),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۳)\}$ می‌باشد که شبه ترتیب هست ولی یک هم‌ارزی نیست.

لم ۷.۱.۲. فرض کنید ρ یک شبه ترتیب n-تایی روی H است. در این صورت، $(x,y)\in\rho^b$ اگر و فقط