پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

موضوع :

روشهای هم مکانی و هم مکانی تفاضلات متناهی برای حل معادلات غیر خطی کلین - گوردون

نگارش :

زهرا رمضان پناه سورکوهی

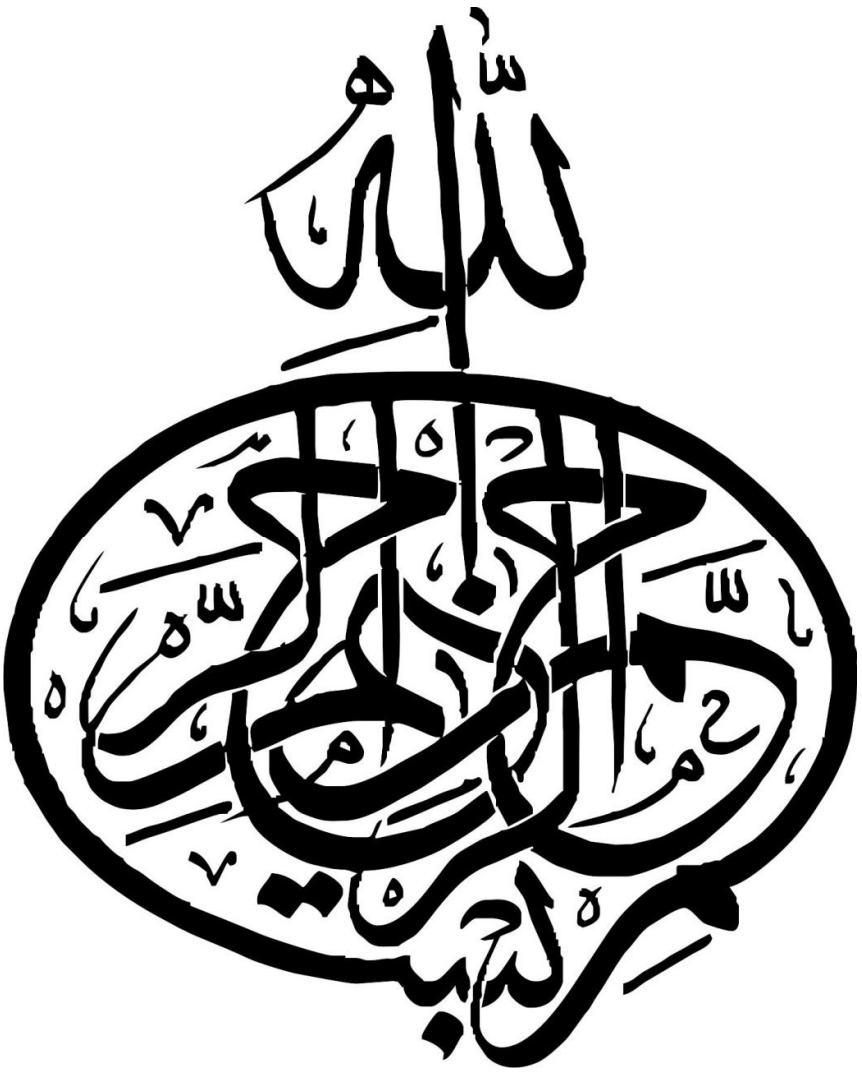
استاد راهنما:

دکتر عظیم امین عطائی

استاد مشاور :

دکتر علی ذاکری

دی ماه ۱۳۹۰



تقدیم به

پدرم، اسطوره تلاش و استقامت

مادرم، الگوی پشتکار و امید

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

تقدیر و تشکر

پس از ستایش و سپاس خداوند یکتا، سپاس بی اندازه خود را از استاد گرانقدر و فرزانه جناب آقای دکتر علیم ایران عطائی ابراز می دارم که در تمامی لحظات، بی دریغ و دلسوزانه مشوق و راهنمای اینجانب در لحظات آموختن بود و شعله فراگیری بیشتر را در ذهنم پر فروغ ساخت و با راهنمایی های ارزشمند خود فصلی از امید علمی را در پیش چشمم گشود و نیز خداوند را سپاسگزارم که فیض تلمذ در محضر دکتر علی ذاکری را نصیبم نمود که با مشاورت ایشان، با قدمهای استوار در راه پژوهش و علم گام بردارم.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

چکیده :

در این پایان نامه دو روش عددی بر اساس روش های تفاضل متناهی و هم مکانی برای حل معادله غیر خطی کلین – گوردون ارائه شده است .

ماتریس عملگر مشتق برای حل توابع مقیاسی بی – اسپلاین به منظور جدا کرد راه حل غیر خطی کلین – گوردون از راه حل معادله جبری ارائه شده است.

در انتها مسائلی توصیفی برای اثبات اعتبار و کارآرائی روشهای جدید آورده شده اند.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ۹

فصل اول: روش تفاضلات متناهی

۱-۱روش تفاضلات متناهی ۱۲

۱-۲ حل معادله پواسون ۱۲

۱-۲-۱ روش تکرار ۱۴

۱-۲-۲ روش ژاکوبی ۱۴

۱-۲-۳ روش گوس - سایدل ۱۴

۱-۲-۴ روش فوق تخفیف متوالی ۱۵

۱-۳ حل معادله پواسون تک بعدی - روش تکرار ۱۸

۱-۴ روش ماتریسی ۱۹

۱-۵ حل معادله پواسون دوبعدی- روش ماتریسی ۲۱

فصل دوم: روش هم مکانی

۲-۱ساختار روش تک مرحله ای ۲۵

۲-۲ درونیابی چند جمله ای ۲۶

۲-۳ تربیع عددی ۲۶

۲-۴ روش های هم مکانی تک مرحله ای ۲۷

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

عنوان صفحه

فصل سوم: توابع بی – اسپلاین

۳-۱ تبدیل هار ۳۱

۳-۲ ماتریس تبدیل هار ۳۲

۳-۳ توابع موجک ۳۵

۳-۳-۱ بسط موجک ۳۸

۳-۴ توابع مقیاسی ۴۱

۳-۵ توابع بی – اسپلاین ۴۶

۳-۶ محاسبه بی - اسپلاین ها ۵۲

۳-۷ شرایط عددی بی – اسپلاین پایه ای ۵۶

فصل چهارم: روش های هم مکانی و هم مکانی تفاضلات متناهی برای حل معادلات غیر خطی کلین - گوردون

۴-۱ مقدمه ۶۱

۴-۲ توابع بی - اسپلاین درجه سوم ۶۴

۴-۳ تقریب توابع ۶۶

۴-۴ ماتریس عملگر مشتق ۶۸

۴-۵ تشریح روش عددی ۶۹

۴-۶ روش ترکیب شده روشهای تفاضلات متناهی و هم مکانی ۷۰

۴-۷ روش هم مکانی ۷۳

۴-۸ حل عددی مسائل مربوطه ۷۵

۴-۹ نتیجه ۷۹

پیوست ۱ ۸۰

پیوست ۲ ۸۲

فهرست منابع ۸۸

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

فهرست جدول ها و شکل ها

عنوان **صفحه**

شکل ۱-۱ ..... ۱۳
شکل ۱-۲ ..... ۲۳
شکل ۱-۲ ..... ۲۷
جدول ۳-۱ ..... ۳۱
شکل ۳-۱ ..... ۳۲
شکل ۳-۲ ..... ۳۷
شکل ۳-۳ ..... ۴۰
شکل ۳-۴ ..... ۴۳
جدول ۴-۱ ..... ۷۵
جدول ۴-۲ ..... ۷۶
جدول ۴-۳ ..... ۷۶
جدول ۴-۴ ..... ۷۶
شکل ۴-۱ ..... ۷۷
شکل ۴-۲ ..... ۷۷
شکل ۴-۳ ..... ۷۸

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

پیشگفتار :

معادله کلین - گوردون[۱]، حالت نسبی معادله شرودینگر[۲] است و برای توجیه ذرات کوانتومی با اسپین صفر به کار می‌رود. این معادله به اسم دو فیزیکدان به نام‌های اسکار کلین و والتر گوردون نامگذاری شده‌است.

اسپین[۳]، از خاصیت‌های بنیادی ذرات ریز اتمی است که معادل کلاسیک ندارد و یک خاصیت کوانتومی به شمار می‌آید. نزدیک‌ترین خاصیت کلاسیک به اسپین اندازه‌حرکت زاویه‌ای است. از لحاظ ریاضی اسپین‌های گوناگون جنبه‌های نمایش یافته مختلف گروه $\mathrm{Su}(۲)$ (گروه ماتریسهای ۲ × ۲ واحد با دترمینان ۱ که عناصر آن مختلط هستند) هستند در حالی که اندازه‌حرکت زاویه‌ای از جبر لی $\mathrm{So}(۳)$ (گروه ماتریسهای متعامد ۳ × ۳ با دترمینان ۱ که عناصر آن حقیقی هستند) پیروی می‌کند. همان طور که ذره‌های بنیادی جرم و بار متفاوت دارند ، اسپین متفاوت نیز دارند. اسپین یک ذره می‌تواند صفر یا هرعدد صحیح و نیم‌صحیح بزرگ‌تر از صفر باشد یعنی ۱/۲ یا ۱ یا ۳/۲ و الی آخر. به ذراتی که اسپین نیم‌صحیح دارند اصطلاحاً فرمیون[٤] و به ذراتی که اسپین صحیح دارند بوزون[٥] می‌گویند. ثابت می‌شود که فرمیون‌ها و بوزون‌ها از قوانین آماری متفاوتی پیروی می‌کنند، که به اولی آمار فرمی- دیراک[٦] و به دومی آمار بوز-اینشتین[٧] می‌گویند .

وقتی گفته می‌شود که اسپین ذره‌ای s است منظور این است که بزرگ‌ترین مقداری که مؤلفهٔ z (یا هر مؤلفهٔ) دیگری می‌تواند بپذیرد است. همچنین ثابت می‌شود که اگر بیشترین مقدار مولفه s باشد، اندازهٔ کل اسپین $h\sqrt{s(s+۱)}$ است .

ولی رسم بر این است که هنگام نامیدن اسپین ها از همان مقدار s استفاده شود نه مقدار $h\sqrt{s(s+۱)}$.

برای ذره‌ای با اسپین s ، هر یک از مولفه‌های بردار اسپین آن می‌تواند مقادیر $s, s-۱, \ldots, -s$ را بپذیرد.

---

۱. Klein – Gordon
۲. Schrodinger
۳. Spin
٤. Fermion
٥. Boson
٦. Fermi–Dirac statistics
۷. Bose-Einstein statistics

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

البته چنان که گفته شد در آن واحد تنها می‌توان آن را در یک جهت اندازه گرفت. پس نتیجه می‌شود برای اسپین ۱ + ۲ حالت وجود دارد.

کوچک ترین اسپین غیر صفر برای یک ذره می‌تواند ۱/۲ باشد. عملگرهای اسپین ۱/۲ را به کمک ماتریسهای ۲ × ۲ به نام ماتریس‌های پاولی نشان می‌دهند. این کوچک‌ترین نمایش وفادار[۱] از گروه (۲) است. در حالت اسپین ۱/۲ ذره فقط می‌تواند دو حالت داشته باشد یا اسپینش (یعنی در واقع مولفهٔ z بردار اسپینش) ۱/۲ یا ۱/۲ − باشد. به حالت اولی اصطلاحاً اسپین بالا و به حالت دومی اسپین پایین می‌گویند. در پایان نامه ای که پیش رو داریم در فصل اول مروری خواهیم داشت بر روشهای تفاضلات متناهی و در فصل دوم روشهای هم مکانی مهم را بررسی خواهیم کرد . در فصل سوم به تعریف مفاهیم مهم و کاربردی که در موضوع اصلی پایان نامه کاربردهای فراوانی دارند پرداخته و به حل چند نمونه مسئله از این دسته خواهیم پرداخت و در فصل آخر که فصل اصلی این پایان نامه میباشد در مورد معادله کلین - گوردون و روشهای حل آن صحبت خواهیم کرد و به حل عددی چند مسئله می پردازیم. لازم به یادآوری است که پیوست ۱ مقدمه ای بر معادلات دیفرانسیل معمولی است . در پیوست ۲، به حل عددی معادله کلین - گوردون به روش هموتوپی با استفاده از مرجع [۴۲] پرداخته ایم تا در این پایان نامه روش حل عددی دیگری نیز در اختیار خواننده قرار گیرد و خواننده خود مقایسه ای بین این روش ها از نقطه نظر استفاده ، آنها را از لحاظ کارائی و سرعت محاسباتی و آسانی در عمل محاسبه مد نظر قرار دهد.

۱. یک نمایش وفادار p از گروه G متعلق به فضای برداری V نمایشی خطی است که در آن هر عنصر متمایز g متعلق به G به صورت منحصر به فردی توسط نگاشت های $p(G)$ نمایش داده میشود.

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

فصل اول

روش تفاضلات متناهی

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

۱-۱ روش تفاضلات متناهی

روش تفاضلات متناهی یکی از روشهای عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است. در این روش مشتق توابع با تفاضلات معادل آنها تقریب زده می‌شود. به طور مثال مشتق تابع f بر اساس تعریف به صورت زیر است:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که در روش تفاضلات متناهی یک تقریب مناسب برای این تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$f' \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

۱-۲ حل معادله پواسون

معادله پواسون یک معادله دیفرانسیل جزیی بیضوی[۱] است که در فضای دو بعدی به صورت زیر نوشته می شود، (ε ثابت دی الکتریک گاز و $p(x,y)$ به عنوان چگالی کل ذرات)

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad f(x,y) = \frac{-p(x,y)}{\varepsilon} \qquad (1)$$

با استفاده از تقریب مشتق مرکزی، مشتقات مرتبه دو به صورت زیر در می آیند،

$$\frac{\nabla^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\nabla^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \qquad (3)$$

---

۱. Elliptic PDE

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

برای سادگی محاسبات فرض می کنیم $h=\Delta x=\Delta y$. در این صورت با جایگذاری رابطه های (۲) و (۳) در معادله (۱) خواهیم داشت :

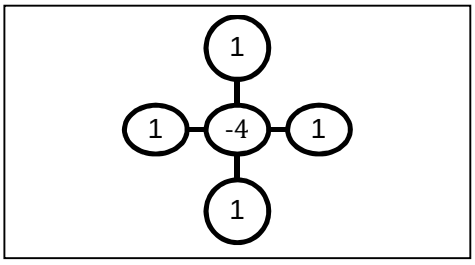
$$\Phi(i,j) = \frac{۱}{۴}[\Phi(i+۱,j) + \Phi(i-۱,j) + \Phi(i,j+۱) - h^{۲}g(i,j)] \qquad (۴)$$

$$h = \Delta x = \Delta y$$

این رابطه در هر نقطه $\Phi(i,j)$ واقع شده در شبکه برقرار است . در حالتی که $g(x,y) = ۰$ معادله پواسون به معادله لاپلاس تقلیل می یابد . در اینصورت رابطه (۴) برای معادله لاپلاس به شکل زیر بازنویسی می شود :

$$\Phi(i,j) = \frac{۱}{۴}[\Phi(i+۱,j) + \Phi(i-۱,j) + \Phi(i,j+۱) + \Phi(i,j-۱)] \qquad (۵)$$

رابطه (۵) نشان می دهد که مقدار Φ برای هر نقطه، میانگین مقادیر Φ ها در چهار نقطه مجاور آن است. سلول محاسباتی پنج نقطه ای توصیف شده در رابطه (۵) در شکل ۱-۱ نشان داده شده است(اعداد واقع شده در هر سلول مقدار عددی ضریب هر سلول را نشان می دهد)،



شکل ۱-۱

روش تفاضل متناهی[۱] ، به مجموعه ای از معادلات جبری تبدیل می شود. برای یافتن پاسخ مجموعه معادلات جبری ، دو روش تکرار و ماتریسی مرسوم‌ترند.

۱. Finite difference method

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

۱-۲-۱ روش تکرار

روش های تکرار عموماً برای حل سیستم بزرگی از معادلات به کار می روند. شیوه کار در این گونه موارد آن است که یک تقریب اولیه برای محاسبه تقریب ثانویه استفاده می شود. تقریب ثانویه نیز برای محاسبه سومین تقریب بکار می رود و این روند تا رسیدن به یک همگرایی ادامه می یابد. سه روش تکرار ی مرسوم ، روش‌های ژاکوبی ، گوس – سایدل و فوق تخفیف متوالی می باشند.

۱-۲-۲ روش ژاکوبی

در این روش رابطه (۴) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\Phi^{(k+1)}(i,j) = \frac{1}{4}[\Phi^{(k)}(i+1,j) + \Phi^{(k)}(i-1,j) + \Phi^{(k)}(i,j+1) + \Phi^{(k)}(i,j-1) - h^2 g(i,j)] \qquad (۶)$$

$$h = \Delta x = \Delta y$$

در روش ژاکوبی پتانسیل در هر تکرار تنها از داده های تکرار قبلی استفاده می کند. سرعت همگرایی روش ژاکوبی کم است. در روشهای بعدی آهنگ همگرایی بهبود می یابد.

۱-۲-۳ روش گوس – سایدل

با کمی دقت متوجه می شویم که در محاسبه $\Phi(i,j)$ برای تکرار $k+1$ ، اطلاعات مربوط به جملات $\Phi(i,j-1)$ و $\Phi(i-1,j)$ برای تکرار $k+1$ موجود هستند و از آنجایی که این جملات نسبت به جملات مشابه تکرارk ام دقیق ترند می توانیم آنها را جایگزین نماییم. در این صورت رابطه تکرار گوس – سایدل بشکل زیر بدست می آید.

$$\Phi^{(k+1)}(i,j) = \frac{1}{4}[\Phi^{(k)}(i+1,j) + \Phi^{(k+1)}(i-1,j) + \Phi^{(k)}(i,j+1) + \Phi^{(□□1)}(□,□-1) - h^2□(□,□)] \qquad (۷)$$

$$h = \Delta□ = \Delta□$$

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

شرط همگرایی روش های ژاکوبی و گوس سایدل :

ماتریس A را مسلط قطری می نامیم هرگاه داشته باشیم :

مسلط قطری سطری $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| < |a_{ii}|$

مسلط قطری ستونی $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}| < |a_{ii}|$

اگر در یک دستگاه معادلات خطی ، ماتریس ضرایب مسلط قطری باشد هر دو روش ژاکوبی و گوس سایدل همگرا هستند. اما معمولا روش همگرایی روش گوس – سایدل از روش ژاکوبی بیشتر است.

۴-۲-۱ *روش فوق تخفیف متوالی*

برای اعمال روش فوق تخفیف متوالی ، نخست جمله باقیمانده $R(i,j)$ ، را در گره i و j به صورت اختلاف بین پاسخ های k و$k+1$ امین تکرار تعریف می کنیم .

$$R(i,j) = \Phi^{(k+1)}(i,j) - \Phi^{(k)}(i,j)$$
$$= \frac{1}{4}[\Phi^{(k)}(i+1,j) + \Phi^{(k+1)}(i-1,j) + \Phi^{(k)}(i,j+1)$$
$$+ \Phi^{(k+1)}(i,j-1) - h^2 R(i,j)] - \Phi^{k}(i,j) \qquad (8)$$

توجه داشته باشید$\Phi^{(k+1)}(i,j)$ از الگوریتم گوس – سایدل (رابطه ۷) جایگزین شده است. مقدار باقیمانده که با$R(i,j)$ نشان داده می شود را می توان به عنوان جمله تصحیح در نظر گرفت که برای نزدیک شدن به پاسخ صحیح باید به $\Phi(i,j)$ اضافه شود. با همگرایی به سمت پاسخ صحیح، $R(i,j)$ به صفر میل میکند. برای تسریع آهنگ همگرایی Φ ، باقیمانده را در پارامتر ω ضرب می کنیم و آنرا با $\Phi(i,j)$ مربوط به k امین تکرار جمع می کنیم تا $\Phi(i,j)$ در $(k+1)$ امین تکرار به دست آید. بنابراین رابطه تکرار به صورت زیر در خواهد آمد:

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

$$\Phi^{(k+1)}(i,j) = \Phi^{(k)}(i,j) + \omega R^{(k)}(i,j) \qquad (۹)$$

و یا

$$\Phi^{(k+1)}(i,j) = (1-\omega)\Phi^{(k)}(i,j) + \frac{\omega}{4}[\Phi^{(k)}(i+1,j) + \Phi^{(k+1)}(i-1,j) + \Phi^{(k)}(i,j-1) + \Phi^{(k+1)}(i,j-1) - h^2 g(i,j)]$$

پارامتر ω فاکتور تخفیف نامیده می شود و عددی بین ۰ و ۲ است . مقدار بهینه ω از طریق آزمون و خطا مشخص می گردد.

متن زیر معادله پواسون در دو بعد را با روش فوق تخفیف متوالی حل می کند. در اینجا پس از تعداد ۲۰۰ تکرار برنامه متوقف می شود. البته می توان با تعریف یک پارامتر دقت، برنامه را به گونه ای نوشت که به ازای رسیدن به دقت معینی متوقف شود. ناحیه مورد بررسی یک صفحه مستطیلی محصور بین خطوط $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ می باشد. شرایط اولیه مسئله و همچنین چگالی بار به صورت زیر در نظر گرفته شده است .

$$V(y=0) = V(y=1) = 1$$

$$V(x=0) = V(x=1) = 0$$

$$\varepsilon = 1, p(x,y) = x$$

```
% finite difference method of 2 - Dimentional poisson equation
% using by SOR method
clc
clear all
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
N = 100; % Number of nodes in each dimention
```

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

```
x = linespace(0,1,N);
y = x;
dx = x(2) - x(1);
dy = dx;
[Y X] = meshgrid(y,x);
V = zeros(N); % initial guess
% boundary conditions ---
V(:,1) = 1; % V(y = 0)
V(:,end) = 1; % V(y = 1)
V(1,:) = 0; % V(x = 0)
V(end,:) = 0; % V(x = 1)
%----------------------------
rho = X; % charged density
ep = 1; % epsilon
Vnew = V;
w = 1;
tic % start time
for m = 1:200 % iteration loop
for i = 2:N-1
for j = 2:N-1
Vnew(i,j) = (1-w)*V(i,j) + w/4*(V(i+1,j) + Vnew(i-1,j)...
+V(i,j+1) + Vnew(i,j-1) + 1/ep*rho(i,j)*dx^2);
end
end
V = Vnew;
end
toc % stop time
mesh(X,Y,V)
??????('?')
??????('?')
```

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

۳-۱ حل معادله پواسون تک بعدی - روش تکرار

روش کار ، مشابه حالت قبل است . توجه به اینکه مسئله تک بعدیست کارمان ساده تر است. در این مورد رابطه تکرار ۷ برای روش فوق تخفیف متوالی به صورت زیر خواهد بود.

$$\Phi^{k+1}(i) = (1-\omega) \times \Phi^{k}(i,j) + \frac{\omega}{2}[\Phi^{k}(i+1) + \Phi^{k+1}(i-1) - h^{2} \times g(i)] \qquad (10)$$

$$g(i) = \frac{\rho_i}{\varepsilon}$$

به عنوان مثالی برای این مورد معادله لاپلاس تک بعدی $(g(x) = 0)$ را با شرایط اولیه در ناحیه $x = [0,1]$ حل می کنیم.

$$V(x=0) = V(x=1) = 2$$

```
% finite difference method of 1 - Dimentional Laplace equation
% using by SOR method
clc
clear all
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
N = 100; % Number of nodes in each dimention
x = linespace(0,1,N);
dx = x(2) - x(1);
Vold = zeros(1,N); % initial guess
% boundary conditions - - -
Vold(end) = 2; % V(x=1)
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
Vnew = Vold;
rho = zeros(1,N); % charged density
ep = 1; %
w = 1.5;
```

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!


```
for m = ۱:۱۰۰۰ % iteration loop
for i = ۲:N − ۱
Vnew(i) = (۱ − w) ∗ Vold(i) + w/۲ ∗ (Vold(i + ۱) + Vnew(i − ۱)...
+۱/ep ∗ rho(i) ∗ dx^۲);
end
Vold = Vnew;
end
plot(x, Vnew)
```

۴-۱ روش ماتریسی

در کوتاه‌ترین جمله متلب[۱] یعنی هنر به کارگیری ماتریسها. در بسیاری از موارد از نظر ریاضی (جدا از مسئله سخت افزاری) امکان جایگزینی روشهای ماتریسی با حلقه های تکرار وجود دارد و بدون شک متلب بهترین محیط برای این کار است. با به کارگیری قواعد ماتریسی و توابع آماده ماتریسی در متلب امکان نوشتن برنامه هایی عموماً کوتاهتر وصد البته بسیار سریعتر (در همگرایی و دقت) را خواهیم داشت. در این قسمت می-خواهیم به حل ماتریسی معادله پواسون در یک بعد بپردازیم. در این صورت همان گونه که خواهیم دید باید دو ماتریس ایجاد شود. یکی ماتریس ضرایب مجهول و دیگری ماتریس ضرایب معلوم. تشکیل ماتریس ضرایب روی کاغذ و نیز نوشتن برنامه ای برای ایجاد آن در متلب نباید مشکل باشد و در حقیقت کار ساده ای است. اما هدف نشان دادن این موضوع است که چگونه با استفاده از توابع و قابلیت های موجود در متلب، حداکثر استفاده را برای ایجاد آنچه در ذهن داریم، نماییم.

به معادله پواسون باز می گردیم و مجدداً با استفاده از تقریب مشتق مرتبه دو، روابط مورد نیاز برای مشخص کردن ماتریس ضرایب، ماتریس معلومها و آنچه که نهایتا به دنبالش هستیم یعنی ماتریس مجهولات (پتانسیل در هر نقطه) را استخراج می کنیم.

$$\frac{d^۲\Phi(x)}{dx^۲} = g(x), \qquad g(x) = \frac{-p(x)}{\varepsilon} \qquad (۱۱)$$

Created by eDocPrinter PDF Pro!!

Buy Now to Create PDF without Trial Watermark!!

$$\frac{\Phi_{i+۱} - ۲\Phi_i + \Phi_{i-۱}}{(dx)^۲} = g_i \Rightarrow \Phi_{i+۱} - ۲\Phi_i + \Phi_{i-۱} = (dx)^۲ \times g_i$$

$$\begin{cases} \Phi_۳ - ۲\Phi_۲ + \Phi_۱ = (dx)^۲ \times g_۲ \\ \Phi_۴ - ۲\Phi_۳ + \Phi_۲ = (dx)^۲ \times g_۳ \\ \vdots \\ \phi_n - ۲\phi_{n-۱} + \phi_{n-۲} = (dx)^۲ \times g_{n-۱} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_۳ - ۲\Phi_۲ = (dx)^۲ \times g_۲ - \Phi_۱ \\ \Phi_۴ - ۲\Phi_۳ + \Phi_۲ = (dx)^۲ \times g_۳ \\ \vdots \\ -۲\phi_{n-۱} + \phi_{n-۲} = (dx)^۲ \times g_{n-۱} - \phi_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & & & \\ ۱ & -۲ & ۱ & & \\ & ۱ & \ddots & ۱ & \\ & & ۱ & -۲ & ۱ \\ & & & ۱ & -۲ \end{bmatrix}_{(N-۲)\times(N-۲)} \begin{bmatrix} \Phi_۲ \\ \Phi_۳ \\ \vdots \\ \Phi_{n-۲} \\ \Phi_{n-۱} \end{bmatrix}_{N-۲} = \begin{bmatrix} (dx)^۲ \times g_۲ - \Phi_۱ \\ (dx)^۲ \times g_۳ \\ \vdots \\ (dx)^2 \times g_{n-2} \\ (dx)^2 \times g_{n-1} + \Phi_n \end{bmatrix}_{N-۲}$$

همان گونه که پیداست ماتریس ضرایب (ماتریس اول از سمت چپ) یک ماتریس مربعی سه قطری است که درایه های روی قطر اصلی آن ۲- و درایه های روی دو قطر دیگر آن برابر ۱ می باشند. چنین ماتریس هایی را در متلب به آسانی می توان با استفاده از تابع diag ایجاد کرد . اگر تعداد مشها با درنظرگرفتن نقاط مرزی برابر با N باشد آنگاه دستور زیر این ماتریس $(N-۲)\times(N-۲)$ را ایجاد می کند :

$$A = -۲ * diag(ones(۱, N-۲)) + diag(ones(۱, N-۳), ۱) + diag(ones(۱, N-۳), -۱);$$

جمله اول عناصر روی قطر اصلی، جمله دوم عناصر بالای قطر اصلی و سومین جمله ، عناصر پایین قطر اصلی را تولید می کنند.

$N = ۱۰۰;$

$□ = □□□□□□□□(۰, ۲, □);$

$□□ = □(۲) - □(۱);$

$□h□ = -۱;$

$□h□□ = ۱;$

Created by eDocPrinter PDF Pro!!