دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه دوره دکتری در رشته ریاضی محض گرایش نظریه عملگرها

موضوع:

نگاشت های خطی حافظ طیف بین جبرهای باناخ

استاد راهنما:

دکتر علی تقوی جلودار

اساتید مشاور:

دکتر قاسم علیزاده افروزی

دکتر محسن علیمحمدی

نگارش:

روح الله پروینیان زاده

شهریور ماه ۱۳۸۹

قدردانی

سپاس بیکران خداوندی را سزاست که آفریننده جهان هستی با همه شگفتی‌های آن است. لطف و کرم او را سپاس که با آزمونی دیگر فرصتی تازه فراهم ساخت که بزرگی و عظمت او در مقیاسی بس وصف‌ناپذیر، نگارنده را به بندگی و عبودیت بیشتر هدایت کند.

اکنون که به یاری حق تعالی این پایان نامه به سرانجام رسیده‌است، بر خود فرض می‌دانم تا از تمامی بزرگوارانی که در این راه یاری‌ام کردند قدردانی به عمل آورم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر علی تقوی، استاد راهنمای ارجمندم که درس امید، تلاش و نشاط به من آموختند، به پاس اندوخته‌هایی که در محضرشان کسب کردم و راهنمایی‌های بی دریغ و ارزنده‌شان سپاسگزارم و از درگاه ایزد منان برای ایشان بهروزی و پیروزی روزافزون خواستارم.

از استادان مشاور گرامی جناب آقای دکتر قاسم علیزاده افروزی و جناب آقای دکتر محسن علیمحمدی که از کلاس‌های درسشان بهره برده‌ام، برای مشاوره ارزشمندشان متشکرم.

و بر خود واجب می‌دانم که از مادر فداکار و پدر بزرگوارم که بی‌ریاترین عشق دنیا را نثارم کردند قدردانی کنم و از تمامی کسانی که در آسمان زندگیم درخشیدند؛ برادران و خواهرانم، دوستان بسیار خوبم که همواره مشوقم بودند و در سال های تحصیل مرا با خاطره دوستی ها درآمیختند.

چکیده

در این پایان نامه ثابت می کنیم که مسأ له کاپلانسکی برای کلاس خاصی از جبرهای باناخ جواب مثبت دارد. در فصل سوم نگاشت های جمعی حافظ طیف روی C^*-جبرها را مورد مطالعه قرار می دهیم و ثابت می کنیم که هر نگاشت جمعی یکدار حافظ طیف ϕ از یک C^*-جبر از رتبه حقیقی صفر A بروی جبر باناخ نیم ساده B پیوسته و یک همریختی جردن روی عناصر خودالحاق A است. و در ادامه ثابت می کنیم که نگاشت جمعی یکدار فشرده طیفی ϕ از جبر باناخ A بتوی C^*- جبر B که دارای یک ایده‌ال جابجایی ماکزیمال است، یک همریختی جردن است.

در فصل چهارم نگاشت های خطی حافظ ایده‌الهای چپ ماکزیمال بین C^*-جبرها را مورد مطالعه قرار می دهیم و ثابت می کنیم که هر نگاشت خطی یکدار حافظ ایده‌الهای چپ ماکزیمال از یک C^*-جبر بروی C^*-جبر یکدار بطور محض نامتناهی یک همریختی جردن است. و همچنین ثابت می کنیم که هر نگاشت خطی یکدار حافظ طیف ϕ از یک C^*-جبر بروی C^*-جبر یکدار بطور محض نامتناهی دیگر یک همریختی جردن است. در پایان نگاشت های خطی حافظ برد عددی بین C^*-جبرها را بررسی می کنیم و ثابت می کنیم که هر نگاشت خطی حافظ برد عددی از یک C^*-جبر بروی C^*-جبر دیگر یک $*-$همریختی جردن است.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بررسی جبرهای باناخ، C^*- جبرها و جبرهای فون نویمان می‌پردازیم و برخی از تعاریف مقدماتی و قضایا که در فصلهای بعدی نیاز داریم را بیان می‌کنیم.

۲.۱ جبرهای باناخ

۱.۲.۱ تعریف

یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ یک فضای برداری A روی $\mathbb{F}$ است با یک نگاشت

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longrightarrow xy$$

که در شرایط زیر صدق کند برای هر $x, y, z \in A$ و $\lambda \in \mathbb{F}$،

الف. $x(yz) = (xy)z$.

ب. $x(y+z) = xy + xz$.

ج. $(y+z)x = yx + zx$.

د. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

منظور ما از میدان $\mathbb{F}$، میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یا میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است. اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، A یک جبر حقیقی است و اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، A را یک جبر مختلط می نامیم. در این پایان نامه جبرهای مختلط در نظر گرفته می شود.

هر گاه B زیر فضایی ازجبر A باشد بطوریکه تحت ضرب موجود در A بسته باشد آنگاه B زیر جبری از A است.

۲.۲.۱ تعریف

یک جبر باناخ مختلط عبارت است از یک جبر A روی $\mathbb{C}$ بقسمی که :

الف. A یک فضای باناخ با نرم $\|.\|$ باشد.

ب. به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

جبر باناخ A را یکدار نامیم اگر A شامل عنصر همانی یا یکه e باشد،

بقسمی که $\| e \| = ۱$ و $ex = xe = x$ برای هر $x \in A$.

همچنین جبر باناخ A را جابجایی گوییم، هر گاه $xy = yx$ برای هر $x, y \in A$.

۳.۲.۱ مثال

فرض کنیم $C(X)$ فضای باناخ همه توابع مختلط پیوسته روی فضای هاسدورف ، فشرده و نا تهی X باشد. به راحتی دیده می شود که $C(X)$ همراه با ضرب نقطه ای توابع و $\|.\|_X$ (سوپریمم نرم روی X) یک جبر باناخ جابجایی است و تابع ثابت یک عضو یکه این جبر می باشد.

۴.۲.۱ مثال

هر گاه X یک فضای باناخ باشد، $B(X)$ فضای تمام عملگرهای خطی کراندار روی X، به همراه نرم عملگری و عمل ترکیب توابع به عنوان ضرب، یک جبر باناخ می باشد که نگاشت همانی I عضو یکه آن می باشد.

۵.۲.۱ تعریف

اگر A یک جبر باناخ بدون یکه باشد می توان A را بصورت زیر یکدار کرد:

فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه تمام زوج های مرتب (x, a) باشد که $x \in A$ و $a \in \mathbb{C}$.

عمل ضرب و نرم را در $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(x,a)(y,b) = (xy + ay + bx, ab)$$

$$||(x,a)|| = ||x|| + |a|.$$

$\tilde{A}$ یک جبر باناخ با یکه $e_{\tilde{A}} = (0, 1)$ می‌باشد. نگاشت $x \longrightarrow (x, 0)$ یک یکریختی طولپا از A بروی زیر فضای بسته (در حقیقت یک ایده‌آل دو طرفه بسته) $\tilde{A}$ است. $\tilde{A}$ را یکدار شده A نامیم.

۶.۲.۱ مثال

فرض کنیم $C_0(X)$ فضای تمام توابع مختلط مقدار پیوسته روی فضای هاسدورف و موضعاً فشرده X باشد که در بی نهایت صفر می شوند یعنی فضای تمام توابع $f \in C(X)$ که به ازای هر $\varepsilon > 0$ زیر مجموعه فشرده ای از X مانند K وجود داشته باشد به طوری که اگر $x \notin K$ آنگاه $|f(x)| \leq \varepsilon$. در این صورت $C_0(X)$ همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی و سوپرمم نرم یک جبر باناخ جابجایی بدون یکه است .

۷.۲.۱ قضیه[۴۱]

عمل ضرب در هر جبر باناخ A تابعی تواماً پیوسته از $A \times A$ به A است. به عبارت دیگر هر گاه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دو دنباله در A باشند به قسمی که $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$، آنگاه $x_n y_n \longrightarrow xy$.

۸.۲.۱ تعریف

فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط باشد. $x \in A$ را وارون پذیر گوییم، اگر $y \in A$ وجود داشته باشد، بقسمی که $xy = yx = e$ و y را با x^{-1} نشان می‌دهیم و آن را وارون x می‌نامیم.

مجموعهٔ تمام عناصر معکوس پذیر A را با $G(A)$ یا A_{inv} نشان می دهیم. اگر $x, y \in G(A)$ آنگاه $y^{-1}x$ وارون $x^{-1}y$ است. بنابراین $G(A)$ نسبت به عمل ضرب یک گروه ضربی است.

۹.۲.۱ تعریف

فرض کنیم A و B جبرهای مختلط باشند یک همریختی (یا پاد همریختی) جبری از A بتوی B یک عملگر خطی $\phi : A \longrightarrow B$ است بطوریکه

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad (or, \quad \phi(xy) = \phi(y)\phi(x)).$$

۱۰.۲.۱ تعریف

اگر A و B جبرهای یکدار با عناصر یکه e_A و e_B بترتیب باشند، همریختی جبری ϕ از A بتوی B را یکانی گوییم اگر

$$\phi(e_A) = e_B.$$

۱۱.۲.۱ تعریف

فرض کنیم A و B جبرهای مختلط باشند. نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ یک یکریختی یا ایزومورفیسم جبری نامیده می شود اگر ϕ همریختی جبری دوسویی باشد.

۱۲.۲.۱ تعریف

فرض کنیم A یک جبر مختلط و ϕ یک تابعک خطی مختلط مقدار بر A باشد که مساوی صفر نیست. آنگاه ϕ یک تابعک خطی ضربی روی A است هر گاه همریختی باشد.

۱۳.۲.۱ قضیه [۵۸]

هرگاه ϕ یک تابعی خطی ضربی روی جبر باناخ A باشد، آنگاه $\|\phi\| = 1$.

۱۴.۲.۱ تعریف

فرض کنید A جبر باناخ و $x \in A$ باشد. طیف x را با $\sigma(x)$ نشان می‌دهیم وبصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma(x) := \{\lambda \in C : \quad \lambda e - x \notin A_{inv}\}.$$

به عبارت دیگر $\sigma(x)$ مجموعه تمام اعداد مختلط λ است بقسمی که $\lambda e - x$ معکوس پذیر نباشد. متمم $\sigma(x)$ رابا $\rho(x)$ نشان می دهیم و آنرا مجموعه حلال x نامیم. (تا پایان این پایان نامه σ، نشان طیف است.)

۱۵.۲.۱ مثال

اگر $A = C(X)$ که X فضای هاسدورف فشرده باشد آنگاه $\sigma(f) = f(X)$ برای هر f متعلق به A.

۱۶.۲.۱ لم

فرض کنید A یک جبر باناخ و $p \in A$ یک عنصر خودتوان غیربدیهی باشد. آنگاه $\sigma(a) = \{0, 1\}$. یک عنصر خودتوان p از یک جبر یکدار غیربدیهی است اگر $p \neq 0$ و $p \neq e_A$.

۱۷.۲.۱ مثال

اگر $A = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ (جبر ماتریسها(2×2) با درایه های مختلط) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ آنگاه $\sigma(T) = \{0\}$.

۱۸.۲.۱ تعریف

اگر A یک جبر باناخ و $x \in A$ باشد، آنگاه شعاع طیفی x را با $r(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$r(x) := sup\{\, |\lambda| \ \ : \ \ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

در حقیقت $r(x)$ شعاع کوچکترین قرص بسته به مرکز صفر در C است که شامل $\sigma(x)$ است.

۱۹.۲.۱ قضیه [۵۸]

اگر x عضوی از جبر باناخ A باشد، آنگاه

الف. طیف $\sigma(x)$ فشرده و ناتهی است، و

ب. شعاع طیفی $r(x)$ در

$$r(x) = inf_{n\in N}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

صدق می کند.

این قضیه برای حالت حقیقی برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید.

۲۰.۲.۱ مثال

اگر $A = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (جبر حقیقی ماتریسها(2×2) با درایه های حقیقی) $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in A$ آنگاه $\sigma(T) = \phi$. در حقیقت شرایط لازم و کافی برای آنکه $T - \lambda I$ وارون پذیر نباشد آن است که $det(T - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0$ ، که این معادله در $\mathbb{R}$ دارای جواب نیست و لذا $\sigma(T) = \phi$.

۲۱.۲.۱ قضیه (گلفاند[1] — مازور[2]) [۳۷]

اگر هر عضو غیر صفر جبر باناخ A وارون پذیر باشد، آنگاه A یکریخت طولپا با $\mathbb{C}$ است.

[1] Gelfand

[2] Mazur

۳.۱ ایده‌آل

۱.۳.۱ تعریف

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. زیر مجموعه ناتهی I از A را یک ایده‌آل چپ (راست) A نامیم، هر گاه I یک زیر فضای برداری از A باشد و به ازای هر $x \in A$ و هر $y \in I$ داشته باشیم $xy \in I$ $(yx \in I)$.

I را ایده‌آل دو طرفه گویند هرگاه، هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست باشد.

$\{0\}$ و A ایده‌آلهای بدیهی هستند. اگر I یک ایده‌آل از A و $I \neq A$ ، آنگاه I را یک ایده‌آل سره A نامیم.

همچنین ایده‌آل سره I را ماکسیمال گوییم، هر گاه هیچ ایده‌آل سره شامل I وجود نداشته باشد.

۲.۳.۱ قضیه[۴۱]

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد.

الف. اگر I ایده‌آل سره A باشد، آنگاه $I \cap G(A) = \phi$.

ب. اگر I یک ایده‌آل A باشد، آنگاه $\bar{I}$ نیز یک ایده‌آل است. بعلاوه اگر I ایده‌آل سره باشد، آنگاه $\bar{I}$ نیز یک ایده‌آل سره است.

ج. هر ایده‌آل ماکسیمال بسته است.

۳.۳.۱ قضیه [۵۸]

برای یک جبر باناخ A، مجموعه تمام تابعک های خطی ضربی روی A را با M_A نشان می دهیم و آن را فضای ایده‌آل ماکسیمال A می‌نامیم. M_A با W^*- توپولوژی که از فضای دوگان A به ارث می‌برد، یک فضای هاسدورف فشرده است. اگر A جبر باناخ جابجایی باشد، مجموعه M_A درتناظر $۱ - ۱$ با مجموعه ایده‌آلهای ماکسیمال (سره) A است.

۴.۳.۱ قضیه[۴۱]

اگر J ایده‌آل بستهٔ از جبر باناخ A باشد آنگاه $\frac{A}{J}$ با نرم خارج قسمتی یک جبر باناخ است و نگاشت طبیعی $Q : A \longrightarrow \frac{A}{J}$، یک همریختی می‌باشد.

۵.۳.۱ قضیه[۴۱]

اگر M_A مجموعه همه تابعکهای خطی ضربی روی جبر باناخ جابجایی A باشد، آنگاه

الف. هر ایده‌آل ماکسیمال A هسته یک $\varphi \in M_A$، است.

ب. اگر $\varphi \in M_A$، آنگاه هسته φ یک ایده‌آل ماکسیمال A است.

ج. عضو $x \in A$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varphi \in M_A$ داشته باشیم $\varphi(x) \neq ۰$.

د. $x \in A$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر x عضو هیچ ایده‌آل سره نباشد.

هـ. $\lambda \in \sigma(x)$، اگر و تنها اگر برای یک $\varphi \in M_A$ داشته باشیم $\varphi(x) = \lambda$.

۶.۳.۱ قضیه [۴۱]

اگر A یک جبر باناخ جابجایی یکدار باشد اولا $M_A \neq \phi$ و ثانیا برای هر $x \in A$

$$\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in M_A\}.$$

۷.۳.۱ قضیه [۵۸]

اگر A یک جبر با یکهٔ e_A باشد، آنگاه مجموعه های زیر یکسان هستند:

الف. اشتراک همه ایده‌آلهای چپ ماکسیمال A.

ب. اشتراک همه ایده‌آلهای راست ماکسیمال A.

ج. مجموعه x های که $e_A - zx$ برای هر $z \in A$ وارون پذیر باشد.

د. مجموعه x های که $e_A - xz$ برای هر $z \in A$ وارون پذیر باشد.

هر یک از مجموعه های بالا را، رادیکال (جکیبسون) A می نامیم و با $Rad\, A$ نشان می دهیم. اگر $RadA = \{0\}$ باشد، آنگاه A را نیم ساده نامیم.

بطور واضح دیده می شود هر گاه A یک جبر باناخ جابجایی و یکدار باشد آنگاه

$$RadA = \cap\{Ker\varphi : \varphi \in M_A\}.$$

۸.۳.۱ قضیه [۳]

اگر X یک فضای باناخ باشد، آنگاه $B(X)$ یک جبر باناخ نیم ساده است.

۹.۳.۱ قضیه [۳]

اگر A یک جبر باناخ یکدار باشد، آنگاه $\frac{A}{RadA}$ نیم ساده است. بعلاوه اگر $x \in A$، $x + RadA$ در $\frac{A}{RadA}$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر x در A معکوس پذیر باشد.

۱۰.۳.۱ تعریف

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. یک عنصر $a \in A$ را شبه پوچتوان می نامیم اگر $\sigma(a) = \{0\}$. مجموعه عناصر شبه پوچتوان A را با $QN(A)$ نشان می دهیم.

۱۱.۳.۱ قضیه [۵۸]

فرض کنید A جبر باناخ جابجایی باشد.

الف. اگر $\varphi \in M_A$، آنگاه $\|\varphi\| = 1$.

ب. نگاشت $\varphi \longrightarrow ker\varphi$ یک نگاشت دو سویی از M_A به روی مجموعه همه ایده‌آلهای ماکسیمال A تعریف می‌کند.

۴.۱ C^*- جبرها و جبرهای فون نویمان[۳]

C^*- جبرها نوعهای خاصی از نمایشهای روی یک فضای هیلبرت هستند.

۱.۴.۱ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد، یک برگشت روی A عبارت است از یک نگاشت $a \to a^*$ از A به A به طوری که ویژگی های زیر برای $a, b \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ برقرار باشد .

الف) $(a^*)^* = a$

ب) $(ab)^* = b^*a^*$

ج) $(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha} a^* + b^*$.

۲.۴.۱ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد ، در اینصورت A همراه با یک برگشت مانند $*$ را که برای هر $a \in A$، داشته باشیم

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲$$

یک C^*- جبر گوییم.

---
۳ von Neumann

۳.۴.۱ مثال

الف) فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. برای هر $T \in B(H)$ فرض کنیم T^* عملگر الحاقی وابسته به T باشد. در این صورت با توجه به تناظر دوسویی ایزومتری که بین H و H^* برقرار است T^* را می توان عضوی از $B(H)$ دانست. در این صورت $B(H)$ همراه این برگشت یک C^*−جبر است.

ب) اگر X یک فضای هاسدورف فشرده باشد، $C(X)$ بابرگشت $f^*(x) = \overline{f(x)}$، $f \in C(X)$ و $x \in X$ یک C^* − جبر جابجایی است.

۴.۴.۱ توجه

فرض کنید e عنصر همانی ضربی در C^*− جبر A باشد برای هر x درA داریم:

$$e^*x = (x^*e)^* = x, \quad xe^* = (ex^*)^* = x.$$

با توجه به منحصر بودن همانی در یک جبر، $e = e^*$.

۵.۴.۱ تعریف

فرض کنید x عضوی از C^* −جبر A باشد.

الف. اگر $x = x^*$ آنگاه x خود الحاق است. مجموعه عناصر خود الحاق A را با A_{sa} نشان می‌دهیم.

ب. اگر $xx^* = x^*x$، آنگاه x رانرمال گوییم.

ج. اگر $xx^* = x^*x = e$ آنگاه x را یکانی گوییم.

۶.۴.۱ قضیه [۳]

اگر A جبر باناخ با برگشت $*$ باشد و $x \in A$، آنگاه

الف. $x + x^*$، $i(x - x^*)$، xx^* و x^*x خود الحاقند.

ب. هر x دارای نمایش منحصر بفرد $x = h + ik$ که h و k خود الحاقند بطوریکه

$$k = \frac{(x - x^*)}{2i}, \quad h = \frac{(x + x^*)}{2}.$$

ج. فرض کنید $x = h + ik$ که h و k خود الحاق باشند، آنگاه x نرمال است اگر و تنها اگر $hk = kh$.

د. عنصر یکه e خود الحاق است و x وارون پذیر است اگر وتنها اگر x^* وارون پذیر باشد که دراین حالت داریم $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$

ه. $\sigma(x^*) := \{\bar{\lambda} : \quad \lambda \in \sigma(x)\}$ بخصوص $r(x) = r(x^*)$ می‌باشد.

۷.۴.۱ تعریف

فرض کنید x متعلق به C^*- جبر A باشد، آنگاه

الف. x را مثبت گوییم هر گاه y ی در A وجود داشته باشد بطوریکه $x = y^*y$.

مجموعه عناصر مثبت A را با A^+ نشان می‌دهیم.

ب. x را تصویر گوییم اگر $x^* = x = x^2$ باشد. بدیهی است که عناصر خود الحاق و یکانی، نرمالند و همچنین اعضای مثبت، خود الحاقند و تصاویر مثبت‌اند.

می‌نویسیم $x \geq 0$ اگر و تنها اگر x مثبت باشد.