به نام خداوند بخشنده مهربان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد ذرات بنیادی

سالیتونهای مغناطیسی

نگارش:

عطیه زکی زاده

استاد راهنما :

دکتر پروین اسلامی

استاد مشاور :

دکتر لیلی متولی زاده

بهمن ۸۸

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که دعای نیکشان همواره بدرقه راهم بوده

و

تقدیم به همسرمهربانم که همیشه همراه ومشوق من بوده است

تقدیر و تشکر

برخود لازم می دانم که از زحمات و راهنماییهای اساتید محترم خانم دکتر پروین اسلامی و خانم دکتر لیلی متولی زاده تشکر و قدردانی نمایم .
همچنین از آقایان دکتر کورش جاویدان و دکتر محسن سربیشه ای که پایان نامه اینجانب را مطالعه ، ودر جلسه دفاع اینجانب شرکت فرمودند سپاسگذاری می نمایم .

فهرست

چکیده	VII
فصل اول - مقدمه	
۱-۱ مقدمه	۲
۱-۲ تعریف سالیتون	۳
۱-۳ مبدا تاریخ سالیتون	۴
۱-۴ پایداری سالیتون	۵
۱-۵ سالیتونهای مغناطیسی	۶
۱-۵-۱ معادله لاندائو لیف شیتز	۶
۱-۵-۲ معادله kdv	۱۰
۱-۵-۳ معادله mkdv	۱۵
۱-۵-۴ معادله kp	۱۵
فصل دوم – سالیتونهای مغناطیسی	
۲-۱ مقدمه	۱۶
۲-۲ فرمولبندی مساله	۱۶
۲-۳ مد mkdv	۲۰
۲-۴ مد kdv	۴۴

فصل – سوم سالیتونهای مغناطیسی در دو بعد

۳-۱	مقدمه	۶۶
۳-۲	فرمولبندی مساله	۶۶
۳-۳	حل مساله انتشار موج در دو بعد	۶۹
	نتیجه گیری	۷۴
	مراجع	۷۵

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه
۱-۲ تعریف سالیتون
۱-۳ مبدا تاریخ سالیتون
۱-۴ پایداری سالیتون
۱-۵ سالیتونهای مغناطیسی
۱-۵-۱ معادله لاندائو لیف شیتز
۱-۵-۲ معادله kdv
۱-۵-۳ معادله mkdv
۱-۵-۴ معادله kp

۱-۱)مقدمه

به نظر می رسد بیشتر پدیده های طبیعت رفتاری خطی دارند.ومهمترین مشخصه یک نظریه خطی پیروی از اصل برهم نهی است.یعنی اینکه اگر u_1 و u_2 جوابی از یک معادله خطی باشندآنگاه باید ترکیب خطی آنها یعنی$u = c_1u_1 + c_2u_2$نیز جوابی از همان معادله باشد کهc_2وc_1 ضرایب ثابت دلخواهی هستند.اما بسیاری از پدیده های فیزیکی نیز در اطراف ما هستند که رفتاری غیر خطی دارند وازاصل برهم نهی تبعیت نمی کنند. به همین دلیل بررسی آنها اغلب کار دشواری است وپرداختن به آنها تکنیکهای ریاضی خاصی را می طلبد.این امر موجب گردیده در حالی که به طور گسترده به مطالعه معادله های دیفرانسیل خطی پرداخته شده است ولی اطلاعات اندکی در مورد معادله های دیفرانسیلی غیر خطی موجود باشد.با این حال این موضوع در دهه های اخیرمورد توجه فوق العاده دانشمندان قرار گرفته است.زیرا ارتباط تنگاتنگی بین آن و تکنولوژی مدرن امروز وجود دارد .اکنون فیزیک غیر خطی دیگر شاخه ای جدید از فیزیک نیست بلکه خود به صورت علمی نوین و گسترده در آمده است. با وجود آنکه روشهای قدرتمندی برای پرداختن به این موضوع ابداع شده است ولی هیچ یک از آنها عمومیت ندارند و محققین اغلب در مواجهه با یک مساله به خصوص مجبورند از روشهای کاملا ابتکاری استفاده کنند.ساده ترین روش برای پرداختن به این موضوع یعنی خطی کردنهای عادی ابزاری تقریب زننده است که تا حدودی حاکی از ناتوانی در مواجهه با مسایل غیر خطی می باشد وتا حدودی این دید علمی که نیمی از قرص نان به از هیچ است را بیان می کند.با این حال موارد فیزیکی بسیاری وجود دارند که در آنها تقریب خطی برای اکثر موارد ارزشمند است.اما این واقعیت همچنان پابرجاست که در بسیاری از موارد دیگر خطی کردن قابل توجیه نیست.حتی انیشتن پیشنهاد کرد که چون معادلات اساسی فیزیک غیر خطی اند تمامی فیزیک ریاضی باید تجدید نظر شود.از آنجائیکه موضوع این پایان نامه بررسی یک پدیده غیر خطی است لذا در ادامه تعدادی معادله غیر خطی معرفی می شوند و تعریف مختصری از جوابهای این معادلات یعنی سالیتون بیان می گردد.

۱-۲)تعریف سالیتون

نام سالیتون اولین بار توسط زابوسکی[1] وکروسکال [2] در سال ۱۹۵۶ مورد استفاده قرار گرفت.قبل از آن در سال ۱۸۳۴ اسکات راسل دانشمند ومهندس اسکاتلندی اولین بار امواج منفرد را در یک کانال قایق رانی مشاهده کرد [1] .
در سال ۱۹۸۹ سه خصوصیت توسط جانسون[3] ودریزین[4] به سالیتونها نسبت داده شد[۱] .هنوزهم این سه خصوصیت می تواند تصویری ازسالیتون درذهن ایجاد کند.این خصوصیات

اینگونه اند:

۱-شکل پایداری دارند
۲-در یک محل جایگزیده اند
۳-با دیگر سالیتونها می توانند برهمکنش داشته باشند واز این برخورد بدون تغییر بیرون آیند وفقط فازشان تغییر کند
بعضی از علوم عنوان سالیتون را برای پدیده هایی که تمام این سه شرط را به طور کامل ندارند نیز استفاده می کنند و همین طور گاهی به امواجی که دو شرط اول ودوم را دارند امواج سولیتاری گفته میشود اما می توان در یک جمله چنین بیان کرد که سالیتون به دسته خاص از جوابهای موضعی یک معادله موج غیر خطی گفته می شود که با ارتفاع، سرعت وشکل ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه میدهند.شاید این پدیده به نظر غیر ممکن آید زیرا انتظار داریم در یک محیط پراکننده هر نوع موجی تغییر شکل دهد.اما در این پدیده دو عامل دخالت دارند پاشندگی و غیر خطی بودن.پاشندگی به تنهایی منجر به ایجاد اختلال در انتشار موج می شود اما غیر خطی بودن آن را جبران می کندو نهایتا منجر به وجود یک موج رونده پایدار می شود که سرعت و شکل ثابتی دارد.
برای نشان دادن اثر برهمکنش غیر خطی بودن و پاشندگی برای ایجاد یک موج پایدار جایگزیده می - توانیم از پالس نوری در حال عبور از شیشه استفاده کنیم این پالس می تواند به صورت ترکیبی از چندین نور با فرکانسهای مختلف باشد.از آنجایی که شیشه پاشندگی را نشان می دهد این فرکانسهای مختلف با سرعتهای متفاوتی از شیشه عبور می کنند.بنابر این شکل پالس در زمانهای مختلف تغییر می کند.اما اگر اثر غیر خطی کر[5] را در نظربگیریم یعنی اینکه سرعت نور با فرکانس معین به شدت یا دامنه نور وابسته است آنگاه در صورتیکه پالس شکل درستی داشته باشد اثرغیرخطی کر پاشندگی را خنثی می کند ونهایتا موج بی تغییر می ماند یعنی سالیتون تشکیل می شود [۲] .

1-Zabusky
2-Kruskal
3-Johnson
4-Drazin
5-Kerr effect

۱-۳)مبدا تاریخ سالیتون

حدود ۲۰۰ سال پیش اسکات راسل[1] مشغول طراحی کشتیهای کوچک مناسبی برای کانالهای کم عمق بود
او در کنار کانال یونیون در نزدیکی ادینبورگ حرکت قایقی را مشاهده کرد که با طنابی به دو اسب متصل بودو توسط اسبها کشیده می شد.ناگهان طناب پاره شد و قایق از حرکت ایستاد.مقدار زیادی آب که حول دماغه کشتی جمع شده بود موج منفرد و آرامی را تشکیل داد و به سرعت در طول کانال حرکت نمود.راسل با هیجان بسیار بر پشت اسب پرید و تا یکی دو مایل موج منفرد را تعقیب کرداو شاهد یکی از شگفت انگیز ترین پدیده های زندگی اش بود:موج شکل و ارتفاع خود را در تمام طول مسیر حفظ می کرد.پس از این رویداد راسل یک مخزن ۳۰ فوتی را در منزلش ایجاد کرد تا این پدیده رامطالعه کند.
او سرانجام در سال ۱۸۴۴ توانست این نتایج را بدست آورد:
۱-امواج منفرد شکلی به صورت $sech^2(k(x-vt))$ دارند
۲- اگر جرم آب ایجاد شده به اندازه کافی زیاد باشد دو یا چند موج منفرد ایجاد می شود.
۳-امواج منفرد بدون هیچ تغییری از هم عبور می کنند.
۴-سرعت یک موج با ارتفاع h در یک کانال به عمق d از رابطه $v=\sqrt{g(d+h)}$ بدست می آید که g در آن شتاب جاذبه است.
در نهایت راسل نتیجه مشاهداتش را به مجله " انجمن بریتانیایی برای پیشرفت علم" ارسال کردو نام چنین امواجی را امواج انتقالی گذاشت اما مطالعات وی مورد توجه واقع نشد.
بیش از نیم قرن پس از مشاهدات راسل بود که توضیح ریاضی دقیقی برای این پدیده ارائه گردید.در این حدود بود که ژوزف بوسینیک ریاضی فیزیکدان فرانسوی وجان رایلی فیزیکدان انگلیسی مستقل از یکدیگر با بهره گیری از معادلات اساسی دینامیک شاره ها توصیف هایی برای موج منفرد ارائه کردند.اما هنوز این پرسش اصلی مطرح بود که آیا معادلات حاکم بر امواج آب می توانند موج منفردی را پیش بینی کنند .سرانجام در سال ۱۸۹۵ به این پرسش پاسخ داده شد.یک فیزیکدان هلندی وشاگردش به نام های کورته وگ[2] ودیوریس[3] نظریه امواج سطحی آب را منتشر کردند که مشاهدات راسل را به صورت اساسی در معادله ای که به نام Kdv معروف شد نشان می داد.معادله Kdv یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه سوم غیر خطی است که نمایش آن در ساده ترین شکل به صورت زیر است:

$$\mathrm{u_t}+6uu_x+u_{xxx}=0$$

که در آن نمایه ها معرف مشتق گیری نسبت به زمان (t) و مکان (x) است.u کمیتی است که می تواند معرف دامنه موج یا ارتفاع آب از حالت تعادل باشد.

1-John Scott Russel
2-Korteweg
3-de Vries

در اینجا لازم به ذکر است که معادلهKdv یکی از معادلاتی است که جوابهای سالیتونی دارد.معادلات دیگری نیز بعد ها مطرح شدند که جوابهای سالیتونی دارند.از جمله معادله ساین گوردن که شاید بتوان گفت ساده ترین معادله غیر خطی باشد .این معادله در سال ۱۹۵۸ توسط اسکرم[1] در یک نظریه میدان غیر خطی معرفی شد.

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + sin\varphi = 0$$

و همینطور معادله شرودینگر غیرخطی که هیچ ربطی به مکانیک کوانتومی ندارد.ونام آن از شباهت بخش خطی آن با معادله شرودینگر گرفته شده است.

$$\mathrm{i}\partial_t \psi + \frac{1}{2}\partial_x^2 \psi - k|\psi|^2 \psi = 0$$

۱-۴)پایداری سالیتون

در بخش۲-۱توضیح مختصری درباره چگونگی ایجاد شکل پایدار سالیتون داده شد.اکنون که از معادله vdK صحبت شدمی توان این پایداری را به طریقی دیگر و بهتر توضیح داد.طبیعت غیر پاشنده حل های سالیتونی ظاهر شده در معادله Kdv به این دلیل نیست که پاشندگی وجود ندارد بلکه اثر پاشندگی در توازن با اثر غیر خطی در سیستم قرار می گیرد.حضور هر دو پدیده را می توان با ساده سازی ظاهری معادله kdv درک کرد.با حذف جمله غیر خطی uu_x شکل خطی شده را بدست می آوریم:

$$\mathrm{u_t} + u_{xxx} = 0$$

اصلی ترین جواب این معادله موج هماهنگ است.

$$u(x,t) = A \exp\,[i(kx - \omega t)]$$

که در آن k عدد موج وω فرکانس زاویه ای است ودر رابطه زیر صدق می کنند:

$$\omega = -k^3$$

رابطه فوق را رابطه پاشندگی می نامند.دو مفهوم مهم راجع به رابطه پاشندگی سرعت فاز $v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{\mathrm{k}}$ وسرعت گروه $v_{\mathrm{g}} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{k}}$ است.سرعت فاز حرکت یک نقطه با فاز ثابت را مشخص می کند و سرعت گروه حرکت انرژی موج را معین می کند.در اینجا سرعت فاز $-k^2$ است.یعنی به k بستگی دارد واین یعنی امواج پاشنده.زیرا یک موج با k بزرگ سرعت فاز بزرگتری نسبت به موجی با k کوچک دارد لذا موجی که از برهم نهی موجهای مختلف با عدد موج مختلف تشکیل شده است وقتی منتشر شود پاشنده خواهد شد و تغییر شکل خواهد داد.

1-Skyrme

حالا جمله پاشندگی را حذف می کنیم یعنی u_{xxx} ومعادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\mathrm{u_t} + uu_x = 0$$

این معادله غیر خطی جوابهایی به شکل $u(x,t) = f(x - vt)$ دارد که f تابعی دلخواه است.برای امواجی به این شکل مهمترین مطلب قابل توجه اینست که سرعت یک نقطه با جابجایی متناسب است . بخشی از موج که دستخوش جابجایی بیشترمی شود سبقت می گیرد در نتیجه موج می شکند. این امر نتیجه غیر خطی بودن است[3].ویژگی استثنایی معادله vdK به تعادل در آمدن پاشندگی و غیر خطی بودن است که عامل انتشار موج بدون تغییر شکل است.

۱-۵ سالیتونهای مغناطیسی

همانطور که قبلا گفتیم پدیده های غیر خطی در شاخه های مختلفی بررسی شده اند وچون سالیتونها جوابهایی از معادلات غیر خطی هستند لذا در زمینه های متفاوت انواع گوناگونی از سالیتونها معرفی شده اند. از قبیل سالیتونهای اپتیکی،سالیتونهای هیدرودینامیکی،سالیتونهای اتمسفری،سالیتونهای توپولوژیکی،سالیتونهای مغناطیسی و... . در ادامه سالیتونهای مغناطیسی بیشتر توضیح داده می شود . این سالیتونها نتیجه بررسی غیرخطی انتشار امواج الکترومغناطیسی در فرومغناطیسها است . اهمیت این پدیده درارتباط با وسائل فریتی آشکار می شود[۴ و ۵] . ابزارهایی از جنس فریتها نظیر موجبرهای اشباع شده فریتی و یا سیستمهای ثبت اپتیکی-مغناطیسی خود را نشان می دهد.برای داشتن سالیتونهای مغناطیسی می توان یک ماده فرومغناطیس اشباع شده را در میدان الکترومغناطیسی خارجی قرار داد آنگاه مشاهده می شود که دینامیکهای مغناطیسی ماده یعنی H وM رفتاری سالیتون گونه از خود نشان می دهند. از آنجایی که موضوع این پایان نامه مطالعه سالیتونهای مغناطیسی است لذا مناسب است قبل از پرداختن به مساله اصلی ابتدا توضیحی درباره معادلاتی که در این موضوع استفاده می گردد داده شود. معادلاتی که در این مبحث استفاده می شود معادله mKdv،mKp،vKd و معادله لاندائو – لیف شیتز است. در ادامه این معادلات معرفی می شوند.

۱-۵-۱ معادله لاندائو –لیف شیتز[۱]

معادله لاندائو –لیف شیز توسط لاندائو و لیف شیتز در سال ۱۹۳۵ برای تحول زمانی مغناطش در مواد فرومغناطیس بیان شد [۶] .

$$\frac{d\vec{M}}{\mathrm{dt}} = -\gamma\left(\vec{\mathrm{M}} \times \vec{\mathrm{B}}\right) - \frac{\vec{\mathrm{M}} \times (\vec{\mathrm{M}} \times \vec{\mathrm{B}})}{\mathrm{M}^2\tau} \qquad (1.1)$$

در این رابطه γ ثابت ژیرومغناطیسی وτ زمانی است که طول می کشد تا M تغییر کند.

1-Landau-Lifshitz equation

به دلیل اهمیت این معادله در بحث سالیتونهای مغناطیسی بهتر است در مورد آن کمی بیشتر توضیح داده شود.
می دانیم چگالی گشتاور مغناطیسی یا مغناطش مرسوم است اینگونه تعریف شود:

$$\vec{\mathcal{M}}(x) = \frac{1}{2}\left[\vec{x} \times \vec{J}(x)\right]$$

که درآن $J(x)$ چگالی جریان را نشان می دهد.انتگرال این رابطه را به نام گشتاورمغناطیسی می شناسیم

$$\vec{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int \vec{\mathrm{x}'} \times \vec{J}(x')d^3x'$$

در حد اتمی توزیع جریان برای یک دو قطبی می تواند از تعدادی ذرات باردار به جرم M که با سرعت v حرکت می کنند ایجاد شود . در این حالت گشتاور مغناطیسی را می توان بر حسب اندازه حرکت زاویه ای مداری کل ذرات بیان کرد.چگالی جریان عبارت خواهد بود از

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{v_i}$$

که n در آن تعداد ذرات حامل بار در واحد حجم است و q_i بار ذره i ام است.
در اینصورت گشتاور مغناطیسی که در بالا تعریف شدبرای یک دوقطبی به صورت زیردر می آید

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{x_i} \times \vec{v_i} d^3x$$

حاصلضرب خارجی در رابطه بالا با اندازه حرکت زاویه ای مداری ذره i ام یعنی $\vec{L_i} = \mathrm{M_i}\vec{x_i} \times \vec{v_i}$ متناسب است.بدین ترتیب گشتاور مغناطیسی دو قطبی به صورت زیر در می آید

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{M_i}\vec{L_i} d^3x$$

اگر تمام ذرات در حال حرکت دارای نسبت بار به جرم مساوی باشندیعنی داشته باشیم $\frac{q_i}{M_i} = \frac{|\mathrm{e}|}{\mathrm{M}}$
که e بار الکترون است.در اینصورت گشتاور مغناطیسی دو قطبی را می توان بر حسب اندازه حرکت زاویه ای مداری کل دو قطبی به صورت زیر نوشت:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\frac{|\mathrm{e}|}{\mathrm{M}}\int \sum_{i=1}^{n} \vec{L_i} d^3x = \frac{|\mathrm{e}|}{2\mathrm{M}}\vec{L}$$

که L همان اندازه حرکت زاویه ای مداری کل است.$\frac{e}{2\mathrm{M}}$ ثابت ژیرومغناطیسی تعریف می شود وبا γ نشان داده می شود بنابراین داریم

$$\vec{m} = -\gamma\vec{L}$$

اگر توزیع جریان جایگزیده ای در میدان مغناطیسی خارجی قرار گیرد آنگاه گشتاوری که به آن وارد می شود از رابطه زیر پیروی می کند [7].

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}(0)$$

B(0) منظور میدان در X=0 می باشد.
از طرف دیگر این گشتاور ناشی از تغییرات اندازه حرکت زاویه ای مداری می باشدیعنی داریم

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

بنابراین داریم

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B}$$

واز رابطه بین اندازه حرکت زاویه ای مداری وگشتاور مغناطیسی نتیجه می شود

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma\frac{d\vec{L}}{dt}$$

از ترکیب دو رابطه آخر خواهیم داشت

$$\frac{d\vec{m}}{\mathrm{dt}} = -\gamma\left(\vec{\mathrm{m}} \times \vec{\mathrm{B}}\right) \qquad (1.2)$$

تا اینجا روابط در حد میکروسکپی رابطه ای برای یک دو قطبی مغناطیسی بدست آمد.اما برای یک ماده مغناطیسی که از چندین دو قطبی تشکیل شده است باید در حد ماکروسکپی روابط بیان شود. در حد ماکروسکپی داریم :

$$\vec{M} = \frac{N}{V} < \vec{m} >$$

که در آن$< m >$ میانگین گشتاور مغناطیسی دو قطبی هاست.که با این تعریف خواهیم داشت

$$\frac{d\vec{M}}{\mathrm{dt}} = -\gamma(\vec{\mathrm{M}} \times \vec{\mathrm{B}})$$

که می توان آن را اینگونه نوشت:

$$\frac{d\vec{M}}{\mathrm{dt}} = -\gamma(\vec{M} \times \vec{B}) = -\gamma\left(\vec{M} \times \mu_0(\vec{H} + \vec{M})\right) = -\gamma\mu_0(\vec{M} \times \vec{H})$$

این رابطه با تجربه چندان سازگار نبود. این حقیقت را که یک مگنتومتر اندازه می گیرد وحاکی از آن است که سرانجام مغناطش با میدان هم خط می شود را شرح نمی دهد[۸].
این حقیقت می گوید مقداری از انرژی دوقطبی مغناطیسی تلف می شود. یعنی به جای اینکه انرژی صرف تغییر M در راستای عمود برBوM باشد صرف تغییر M جهت همراستا شدن با میدان خارجی می شود.
برای دو قطبی مغناطیسی انرژی پتانسیل اینگونه تعریف می شود[۷]:

$$U = -\vec{m}.\vec{B}$$

سیستم دو قطبی مغناطیسی تمایل به پایینترین سطح انرژی یعنی هم جهت شدن با میدان خارجی را دارد این یعنی انرژی پتانسیل ثابت نمی ماند و با زمان تغییر می کند.اما رابطه(۱.۲) تغییر انرژی پتانسیل را نشان نمی دهد. تغییر انرژی اینگونه است

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{d\vec{m}}{dt}.\vec{B}$$

با توجه به (۱.۲) خواهیم داشت

$$\frac{dU}{dt} = -\gamma(\vec{m} \times \vec{B}).\vec{B} = 0$$

پس رابطه(۱.۲) تغییر انرژی را صفر نشان می دهد یعنی سیستم نمی تواند به پایینترین سطح خود (همراستا بودن MوB) برسد. لذا برای سازگار بودن با تجربه باید جمله ای دیگر به آن اضافه شود.این کار را لاندائوولیف شیتز انجام دادندومعادله(۱.۱) را معرفی کردند.در این معادله اگر از اتلاف چشمپوشی کنیم یعنی فرض کنیم زمانی که طول می کشد تا M همراستا با میدان شود بینهایت باشد آنگاه همان معادله (۱.۲) را خواهیم داشت.

۲-۵-۱ معادلهKdv

معادله کورته وگ-دی وریس یا همان Kdv همان طور که قبلا گفته شد یک معادله غیرخطی است که در سال ۱۸۹۵ توسط دی ادریک کورته وگ [۱] و گوستاو دی وریس [۲] معرفی شد.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

این معادله جوابهای سالیتونی دارد.در حل آن مرسوم است جوابها به صورت موج ایستاده در نظر گرفته شود ومتغییر جدیدی به صورت زیر تعریف شود :

$$\xi = x - t$$

که در آن v_{ph} سرعت فاز بسته موج است . با این متغیر :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v_{ph}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

معادله را می توان در شکل جدید نوشت :

$$(6u - v_{ph})u_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0$$

انتگرال گیری نسبت بهξ نتیجه می دهد

$$3u^2 - v_{ph}u + u_{\xi\xi} = k_1$$

k_1 یک مقدار ثابت است.با ضرب کردن طرفین در u_ξ انتگرالگیری دوم نتیجه می دهد:

$$u^3 - v_{ph}\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}(u_\xi)^2 = k_1 u + k_2$$

1- Diederik Korteweg

2-Gustav de Vries

k_2 نیز یک مقدار ثابت است.u و u_ξ باید در بینهایت صفر باشند لذا ضرایب را صفر اختیار می کنیم .

$$u^3 - \mathrm{v_{ph}}\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\left(u_\xi\right)^2 = 0$$

این را می توان اینگونه نوشت

$$\sqrt{-2u^3 + \mathrm{v_{ph}}u^2} = u_\xi$$

و نهایتا به این شکل ساده می شود

$$\int_{\mathrm{w_0}}^{\mathrm{w}} \frac{du}{\sqrt{-2u^3 + \mathrm{v_{ph}}u^2}} = \int_0^{\xi} \mathrm{d}\xi \rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{v_{ph}}}}\int_{\mathrm{w_0}}^{\mathrm{w}} \frac{du}{\sqrt{-\frac{2u^3}{\mathrm{v_{ph}}} + u^2}} = \int_0^{\xi} \mathrm{d}\xi$$

با تغییر متغیر $w^2 = \frac{2u}{\mathrm{v_{ph}}}$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{v_{ph}}}}\int_{\mathrm{w_0}}^{\mathrm{w}} \frac{2}{\mathrm{w}}\frac{dw}{\sqrt{1-\mathrm{w}^2}} = \int_0^{\xi} \mathrm{d}\xi$$

با فرض $w_0 = 1$ معادله بالا تبدیل می شود به

$$\frac{2}{\sqrt{\mathrm{v_{ph}}}}\, arc\,\mathrm{sech}\, w = \xi$$

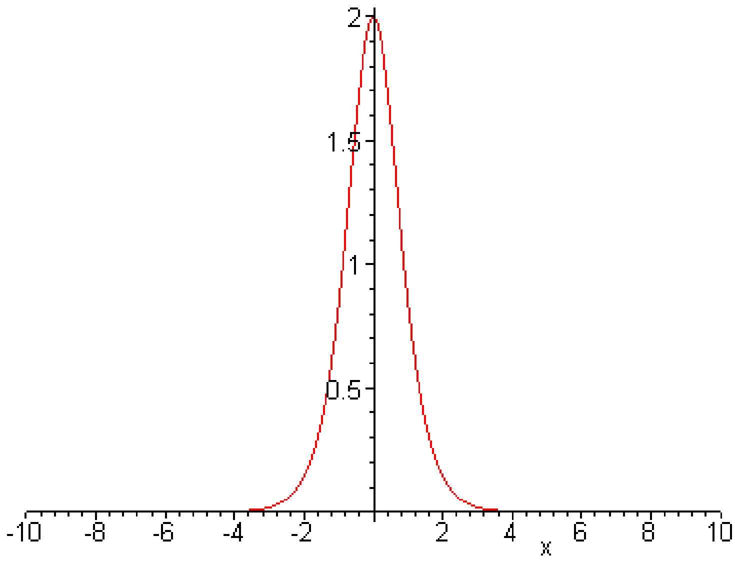
بنابراین

$$w = \mathrm{sech}(\xi\ \frac{\sqrt{\mathrm{v_{ph}}}}{2})$$

و نهایتا داریم

$$u = \frac{\mathrm{v_{ph}} w^2}{2} = \frac{\mathrm{v_{ph}}}{2} sech^2(\xi \ \frac{\sqrt{\mathrm{v_{ph}}}}{2})$$

بنابراین به این شیوه معادله حل می گردد ومشاهده می شود که جوابها به شکل یک موج جایگزیده منفرد هستند که سالیتون نامیده می شوند.



نمودار موج سالیتونی

به روش دیگری نیز می توان این معادله را حل کرد.حلی به شکل $u = A\cos h^{\beta}\,(c\xi)$ را در نظر می گیریم و آن را در معادله مورد نظر قرار می دهیم.درآن ξهمان تعریف قبل را دارد $\xi = x - \mathrm{v_{ph}t}$ در اینجا برای این معادله kdv می رسیم به:

$$\begin{aligned}\left(-v + 6A\cos h^{\beta}\,(c\xi)\right) & cA\beta\sinh(c\xi)\,cosh^{\beta-1}(c\xi) \\ & + A\beta c^3\big[2(\beta-1)\sinh(c\xi)\,cosh^{\beta-1}(c\xi) \\ & + (\beta-1)(\beta-2)\sinh(c\xi)\,cosh^{\beta-1}(c\xi) \\ & + (\beta-1)(\beta-2)\sinh(c\xi)\,cosh^{\beta-3}(c\xi) + \beta\sinh(c\xi)\,cosh^{\beta-1}(c\xi)\big] \\ & = 0\end{aligned}$$

اکنون می توان نوشت

$$2\beta - 1 = \beta - 3$$

$$۶A^2\beta c = A\beta c^3(\beta-1)(\beta-2)$$

$$-\mathrm{v_{ph}}cA\beta + 2A\beta c^3(\beta-1) + (\beta-1)(\beta-2)A\beta c^3 + A\beta^2c^3 = 0$$

پس از حل این دستگاه معادلات بدست می آوریم

$$\beta = -2$$

$$\mathrm{A} = 2\mathrm{c}^2$$

$$\mathrm{c}^2 = \frac{\mathrm{v_{ph}}}{4}$$

که در نهایت خواهیم داشت

$$u = \frac{\mathrm{v_{ph}}}{2}sech^2\left(\frac{\sqrt{\mathrm{v_{ph}}}}{2}\,\xi\right)$$

مشاهده می شودکه این جواب تفاوتی با جواب روش قبل ندارد.

معادله kdv شکلهای متفاوت زیادی پیدا کرده است.انواع مختلف آن در جدول (۱-۱) آمده است

جدول (١-١)

Name	Equation
kdv	$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$
Kdv(cylindrical)	$u_t - 6uu_x + u_{xxx} + \frac{u}{2t} = 0$
Kdv(deformed)	$u_t + (u_{xx} - 2\eta u^3 - \frac{3u(u_x)^2}{2(\eta + u^2)})_x = 0$
Kdv(generalized)	$u_t + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0$
Kdv(generalized)	$u_t + u_{xxx} + (f(u))_x = 0$
Kdv(modified)	$u_t \pm 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$
Kdv(modified modified)	$u_t + u_{xxx} - \frac{(u_x)^3}{8} + u_x(Ae^{au} + B + Ce^{-au}) = 0$
Kdv(spherical)	$u_t - 6uu_x + u_{xxx} + \frac{u}{t} = 0$
Kdv(super)	$u_t - 6uu_x + u_{xxx} - 3ww_{xx} = 0$
	$w_t - 3wu_x - 6uw_x + 4w_{xxx=0}$
Kdv(transitional)	$u_t - 6f(t)uu_x + u_{xxx} = 0$
Kdv(variable coefficients)	$u_t + \alpha t^n uu_x + \beta t^n u_{xxx} = 0$
Korteweg-de vries-Burgers	$u_t + 2uu_x + \mu u_{xxx} - \nu u_{xx} = 0$