بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش اتمی و مولکولی

اثر ثابت دی‌الکتریک و دما در برهم‌کنش لیفشیتز بین اجسام دی‌الکتریک

استاد راهنما:

دکتر جلال سرابادانی

پژوهشگر:

سید حامد حسینی‌نژاد

مهر ماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات

و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه

متعلق به دانشگاه اصفهان است.

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش اتمی و مولکولی آقای سید حامد حسینی نژاد

تحت عنوان

اثر ثابت دی‌الکتریک و دما در برهم‌کنش لیفشیتز بین اجسام دی‌الکتریک

در تاریخ ۹۰/۰۷/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر جلال سرابادانی با مرتبه ی علمی استادیار امضا

۲- استاد داور داخل گروه دکتر سلطانی با مرتبه ی علمی استادیار امضا

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر میری با مرتبه ی علمی استادیار امضا

امضای مدیر گروه

چکیده

سیمای ماکروسکوپیکی میدان الکترومغناطیسی کوانتومی اثر کازیمیر می باشد. این نیرو در اثر تغییر در انرژی نقطه صفر میدان الکترومغناطیسی به وجود می آید که خود این تغییر نیز ناشی از حضور مرزهای فیزیکی می باشد. در این پایان نامه ابتدا تاریخچه اثر کازیمیر را مرور می کنیم که نیروی بین دو صفحه رسانای ایده ال، موازی و بدون بار می باشد. سپس برهم کنش لیفشیتز را که حالت کلی تری نسبت به برهم کنش کازیمیر می باشد و برهم کنش بین صفحات دی الکتریک را تشریح می کند، مرور می کنیم. لیفشیتز سیستم های در دمای صفر و تنها هندسه ساده برهم کنش بین دو محیط دی الکتریک نیمه بی نهایت را که توسط یک لایه دی الکتریک از هم جدا شده اند، بررسی نمود. در این پایان نامه از فرمول بندی ای استفاده می نماییم که سه پارامتر جنس محیط، دما و هندسه های پیچیده تر را شامل شود. با استفاده از این فرمول بندی می توان انرژی برهم کنشی لیفشیتز را برای یک سیستم چند لایه ای تخت با هر تعداد لایه و با توابع دی الکتریک مختلف و در هر دمایی محاسبه نمود. برای مثال در انتها با استفاده از این فرمول بندی، انرژی برهم کنشی لیفشیتز را برای چند هندسه مختلف که محیط تشکیل دهنده آن از جنس دی اکسید سیلیسیم می باشد، محاسبه می کنیم و نمودار انرژی را بر حسب فاصله بین لایه ها رسم می نماییم.

کلمات کلیدی: کازیمیر، لیفشیتز، افت و خیز میدان الکترومغناطیسی

فهرست مطالب

۱ پیشگفتار ۱

۲ برهم کنش لیفشیتز بین دو جسم دی الکتریک ۵
۱.۲ پیشگفتار ۵
۲.۲ میدان الکترومغناطیسی خلا و انرژی نقطه صفر ۶
۳.۲ کوانتش یک مد میدان ۸
۴.۲ نیروی بین دو جسم دی الکتریک(برهم کنش وان در والس) ۹
۵.۲ نیروی بین دو جسم دی الکتریک (تئوری لیفشیتز) ۱۰
۶.۲ به دست آوردن نیروی کازیمیر با استفاده از تئوری لیفشیتز ۱۰

۳ محاسبه برهم کنش های وان در والس- لیفشیتز در سیستم های چند لایه ای تخت ۱۲
۱.۳ پیشگفتار ۱۲
۲.۳ محاسبه انرژی آزاد برهم کنشی وان در والس-لیفشیتز برای سیستم چندلایه ای تخت ۱۳
۳.۳ مدل سیستم ۱۴
۴.۳ حل معادله موج ۱۵
۵.۳ یک نمونه برای ساختن ماتریس انتقال ۱۶
۶.۳ معادله عمومی مدهای فرکانسی ۱۸

۴ چند مثال از برهم کنش وان در والس- لیفشیتز در سیستم های چند لایه تخت ۱۹
۱.۴ محاسبه انرژی آزاد برهم کنشی وان در والس- لیفشیتز بین دو نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم ۲۰
۲.۴ محاسبه انرژی آزاد برهم کنشی وان در والس- لیفشیتز بین نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم با تیغه ای از جنس دی اکسیدسیلیسیم ۲۳
۳.۴ محاسبه انرژی آزاد برهم کنشی وان در والس- لیفشیتز بین دو تیغه از جنس دی اکسیدسیلیسیم . ۲۷
۴.۴ محاسبه انرژی آزاد برهم کنشی بین دو نیم فضای موازی از جنس فلز ایده ال ۳۳

۵ نتایج ۳۵

الف اثبات رابطه لیفشیتز ۳۸
الف.۱ نیروی بین دی الکتریک ها ۴۲
الف.۲ مقایسه با تئوری لیفشیتز ۴۳

ب اثبات رابطه (۱.۳) ۴۴
ب.۱ اثر n-ذره ای ۴۸
ب.۲ برهم کنش بین اجسام ماکروسکوپیک از دیدگاه تئوری مدهای سطحی ۴۹
ب.۳ تئوری لیفشیتز در دمای محدود ۵۳

ب.۴ بررسی برآیندگیری جفتی نیروها به عنوان حالت خاص ۵۴

لیست تصاویر

۱.۲ یک محیط با ثابت دی الکتریک $\varepsilon_۳(\omega)$ بین دو محیط نیمه نامحدود با ثابت های دی الکتریک $\varepsilon_۱(\omega)$ و $\varepsilon_۲(\omega)$ قرار دارد ۱۱

۱.۳ یک صفحه نیمه بی نهایت (L) با تابع دی الکتریک وابسته به فرکانس $\varepsilon_L(\omega)$ که بوسیله m لایه دی الکتریک به ضخامت l_m و تابع دی الکتریک $\varepsilon_m(\omega)$ به یک صفحه نیمه بی نهایت (R) با تابع دی الکتریک $\varepsilon_R(\omega)$ متصل می شود. ۱۵

۱.۴ دو نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم که توسط لایه خلا به ضخامت H از هم فاصله دارند. برای تعمیم به حالت کلی محیط نیمه نامحدود از جنس دی اکسید سیلیسیم در سمت چپ را با L، لایه خلا را با V و محیط نیمه نامحدود از جنس دی اکسید سیلیسیم در سمت راست را با R برچسب گذاری کرده ایم. انرژی آزاد برهم کنشی بین دو نیم فضا از رابطه (۲۲.۴) بدست می آید ۲۱

۲.۴ (خط توپر) مقدار انرژیِ آزاد برهم کنشیِ بر واحد سطح $\frac{E_{ss}}{A}$ [معادله (۲۲.۴)] برای سیستمی که از دو نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم که توسط لایه خلا به ضخامت H از هم جدا شده اند، بصورت تابعی از H و در دمای $T = ۳۰۰K$ رسم شده است. همانطور که در نمودار می بینیم هنگامی که فاصله بین دو نیم فضا ۱۰۰ نانومتر باشد انرژی بر واحد سطح $۵/۳ \times ۱۰^{۱۲}$ الکترون ولت بر متر مربع ، در فاصله ۱۰ نانومتری انرژی بر واحد سطح $۲/۶ \times ۱۰^{۱۵}$ الکترون ولت بر متر مربع و در فاصله ۱ نانومتری انرژی بر واحد سطح $۴/۱ \times ۱۰^{۱۷}$ الکترون ولت برمتر مربع می باشد. شیب منحنی انرژی آزاد (خط توپر) با خطوطی (خطوط خط چین) با شیب های -۲ ، -۳ و -۲ نمایش داده شده است. ۲۲

۳.۴ نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم و یک تیغه از جنس دی اکسید سیلیسیم که توسط گاف خلا به طول H از هم فاصله دارند. برای تعمیم به حالت کلی محیط نیمه نامحدود از جنس دی اکسید سیلیسیم در سمت چپ را با L، گاف خلا را با A، تیغه از جنس دی اکسید سیلیسیم را با B و محیط نیمه نامحدود خلا در سمت راست را با R برچسب گذاری نموده ایم. انرژی آزاد برهم کنشی بین دو نیم فضا از رابطه (۴۴.۴) بدست می آید ۲۴

۴.۴ (خط توپر) مقدار انرژیِ آزاد برهم کنشی بر واحد سطح $\frac{E_{sl}}{A}$ [معادله (۴۴.۴)] برای سیستمی متشکل از یک نیم فضایِ تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم و تیغه ای از جنس دی اکسید سیلیسیم که توسط لایه خلا به ضخامت H از هم فاصله دارند به صورت تابعی از H و در دمای $T = ۳۰۰K$ رسم شده است. همانطور که در شکل می بینیم هنگامی که فاصله بین دو نیم فضا ۱۰۰ نانومتر باشد، انرژی بر هم کنشی بر واحد سطح $۱/۴ \times ۱۰^{۱۲}$ الکترون ولت برمتر مربع، در فاصله ۱۰ نانومتری انرژی برهم کنشی بر واحد سطح $۲/۲ \times ۱۰^{۱۵}$ الکترون ولت بر متر مربع و در فاصله ۱ نانومتری انرژی برهم کنشی بر واحد سطح $۴/۱ \times ۱۰^{۱۷}$ الکترون ولت بر متر مربع محاسبه شده است. بنابراین از نتایج می بینیم که هر چه قدر فاصله بین نیم فضاها کمتر شود انرژی برهم کنشی به مقدار جالب توجهی زیاد می شود. شیب منحنی انرژی آزاد با خطوطی (خطوط خط چین) با شیب های -۲ ، -۳ و $-۳/۵$ تطابق دارد. ۲۶

۵.۴ دو تیغه از جنس دی اکسید سیلیسیم که توسط لایه ای از خلا به ضخامت H از هم فاصله دارند. برای تعمیم به حالت کلی محیط نیمه نامحدود خلا در سمت چپ را با L، تیغه سمت چپ که از جنس دی اکسید سیلیسیم می باشد را با A، گاف خلا را با U، تیغه سمت راست از جنس دی اکسید سیلیسیم را با B و محیط نیمه نامحدود خلا در سمت راست را با R برچسب گذاری نموده ایم. ضخامت تیغه سمت چپ a و ضخامت تیغه سمت راست b می باشد. انرژی آزاد برهم کنشی بین دو تیغه از رابطه (۶۸.۴) بدست می آید. ۲۸

۶.۴ (خط توپر) مقدار انرژیِ آزاد برهم کنشی بر واحد سطح $\frac{E_{ll}}{A}$ برای سیستمی متشکل از دو تیغه از جنس دی اکسید سیلیسیم که توسط لایه ای از خلا به ضخامت H از هم فاصله دارند بصورت تابعی از H و در دمای $T = ۳۰۰K$ رسم شده است. همانطور که در نمودار می بینیم هنگامی که فاصله بین دو نیم فضا ۱۰۰ نانومتر باشد انرژی آزاد بر واحد سطح $۴/۳ \times ۱۰^{۱۱}$ الکترون ولت برمتر مربع ، در فاصله ۱۰ نانومتری انرژی آزاد بر واحد سطح $۱/۹ \times ۱۰^{۱۵}$ الکترون ولت بر متر مربع و در فاصله ۱ نانومتری انرژی آزاد بر واحد سطح $۴/۱ \times ۱۰^{۱۷}$ الکترون ولت بر متر مربع محاسبه شده است. بنابراین از نتایج می بینیم که هر چه قدر فاصله بین نیم فضاها کمتر شود انرژی برهم کنشی به مقدار جالب توجهی زیاد می شود. شیب منحنی انرژی آزاد در نواحی مختلف با خطوطی (خطوط خط چین) با شیب های -۲ ، -۴ و $-۴/۵$ نشان داده شده است. ۳۱

۷.۴ مقدار انرژیِ آزاد برهم کنشیِ وان در والس- لیفشیتز بر واحد سطح بین دو نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم $\frac{E_{ss}}{A}$ (خط توپر) [معادله (۲۲.۴)] و نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم و تیغه از جنس دی اکسید سیلیسیم $\frac{E_{sl}}{A}$ (خط چین) [معادله (۴۴.۴)] و بین دو تیغه از جنس دی اکسید سیلیسیم $\frac{E_{ll}}{A}$ (نقطه چین) [معادله (۶۸.۴)]که توسط لایه ای از خلا به ضخامت H از هم فاصله دارند بصورت تابعی از H و در دمای $T = ۳۰۰K$ رسم شده است. همانطور که از نمودار پیداست در فواصل تقریبا بیشتر از $۱۰^{-۸}m$ انرژی برهم کنشی بین دو نیم فضا نسبت به انرژی برهم کنشی بین نیم فضا و تیغه بیشتر است. همچنین انرژی برهم کنشی بین نیم فضا و تیغه نسبت به انرژی برهم کنشی بین دو تیغه بیشتر می باشد. اما با دقت در این نمودارها می بینیم که در فواصل کمتر از $۱nm$، سه نمودار بر روی هم منطبق می شوند که بدیهی به نظر می رسد. زیرا در فواصل خیلی کم ضخامت تیغه ها نسبت به فاصله بین تیغه ها بزرگ می شود و هندسه سیستم مشابه حالت دو نیم فضا می شود. ۳۲

۸.۴ دو نیم فضای موازی از جنس فلز ایده ال که توسط لایه ای از خلا به ضخامت H از هم جدا شده اند. ۳۳

۹.۴ (خط توپر) مقدار انرژیِ آزاد برهم کنشی بر واحد سطح $E_m(eV)$، معادله (۶۹.۴)، برای سیستمی متشکل از دو نیم فضای موازی از جنس فلز ایده ال که توسط لایه ای از خلا به ضخامت H از هم جدا شده اند، بصورت تابعی از H و در دمای $T = ۳۰۰K$ رسم شده است. همانطور که در نمودار می بینیم هنگامی که فاصله بین دو نیم فضا ۱۰۰ نانومتر باشد انرژی آزاد بر واحد سطح $۲/۷ \times ۱۰^{۱۲}$ الکترون ولت بر متر مربع، در فاصله ۱۰ نانومتری انرژی آزاد بر واحد سطح $۲/۷ \times ۱۰^{۱۵}$ الکترون ولت بر متر مربع و در فاصله ۱ نانومتری انرژی آزاد بر واحد سطح $۲/۷ \times ۱۰^{۱۸}$ الکترون ولت بر متر مربع می باشد. شیب منحنی انرژی آزاد با خطوطی (خطوط خط چین) با شیب های -۲ و -۳ تطابق دارد. ۳۴

الف.۱ یک محیط با ثابت دی الکتریک $\varepsilon_۳(\omega)$ بین دو محیط نیمه نامحدود با ثابت های دی الکتریک $\varepsilon_۱(\omega)$ و $\varepsilon_۲(\omega)$ قرار دارد. ۳۹

الف.۲ پر بند ۴۱

لیست جداول

فصل ۱

پیشگفتار

آیا دو صفحه فلزی موازی و خنثای الکتریکی که به وسیله یک لایه خلا از هم جدا شده اند با همدیگر برهم کنش دارند؟ در الکترودینامیک کلاسیکی نیرویی بین دو صفحه فلزی با بار خارجی صفر وجود ندارد ولی واقعیت این است که دو صفحه فلزی موازی و یا در حالت کلی تر دو تیغه دی الکتریک همدیگر را جذب می کنند. با پیشرفت تئوری-های کوانتومی و نظریه میدان های کوانتومی این مسئله حل شده است.

اما این مسئله اولین بار چگونه مطرح شد و تاریخچه بررسی آن توسط محققین به چه زمانی بر می گردد؟ در جواب این سوال باید گفت پیشگام این کار وان در والس (۱۸۷۳) بود که نشان داد تغلیظ گاز ممکن نیست مگر اینکه یک نیروی جاذب درون ماده وجود داشته باشد. او بیان نمود از آنجا که مولکول ها با هم اندر کنش دارند باید جملاتی به معادله حالت گاز ایده ال اضافه شود اما ریشه این نیروهای بین مولکولی چیست؟ در سال های بعد تلاش های زیادی برای بررسی نیروی بین مولکولی وان در والس صورت گرفت. یکی از این بررسی ها توسط لاندن (۱۹۳۰) انجام شد. لاندن با استفاده از تئوری کوانتومی اختلال غیر وابسته به زمان انرژی بر هم کنشی میان الکترون و پروتون های دو اتم را محاسبه نمود و نشان داد که این انرژی متناسب با $1/R^{6}$ می باشد که R فاصله میان اتم ها می باشد [۱] . هاماکر اولین کسی بود که توانست نیروی های وان در والس-لاندن بین دو اتم را به نیروی بین کره های ماکروسکوپیک توسعه دهد. او از این روش برای محاسبه برهم کنش بین اجسام ماکروسکوپیک استفاده نمود، بدین صورت که با استفاده از روش جمع جفتی برهم کنش ذرات تشکیل دهنده اجسام، انرژی برهم کنشی دو جسم ماکروسکوپیک را محاسبه نمود. در این روش فرض می شود که هر مولکول معادل یک نوسانگر هارمونیک است که دارای یک فرکانس خاص و قطبش پذیری خاص می باشد.

اما این روش دارای مشکلات زیادی بود که چند مورد آنها را ذکر می کنیم. اول اینکه در این روش جنبه های بر هم کنش های سه ذره ای و بیشتر در محاسبات منظور نشده بود، دوم آنکه قطبش پذیری مولکولی تابعی از فرکانس می باشد که در تکنیک های مدرن اسپکتروسکوپی بدست می آید. سوم آنکه مولکول ها به صورت نقطه ای فرض می شوند که فرض غلطی می باشد بنابراین اگر چه این روش جوابی را برای این مسئله به ما می داد اما این جواب با داده های تجربی تطابق نداشت. اما حداقل تا اینجا می توان قضاوت نمود که نیروی وان در والس ریشه کوانتومی دارد.

کازیمیر توانست با یک روش مناسب نیروی بین دو صفحه فلزی ایده ال و کاملا موازی بدون بار خارجی را محاسبه کند [۲] . اما پایه و اساس روش او چه بود؟ در نظریه میدان کوانتومی ترازهای انرژی یک موج الکترومغناطیسی تابعی

از تعداد فوتون ها می باشد. هنگامی که هیچ فوتونی وجود نداشته باشد باز هم یک انرژی وجود دارد که حالت پایه یا حالت خلا کوانتومی نامیده می شود و از رابطه $\frac{1}{2}\hbar\omega$ بدست می آید. در این رابطه ω فرکانس موج الکترومغناطیسی می باشد. اما انرژی این حالت برای امواج الکترومغناطیسی در فضای آزاد نامحدود می باشد. این انرژی با وجود مرزهای فیزیکی نیز نامحدود می باشد. اما کازیمیر توانست که تفاوت بین انرژی نامحدود خلا در فضای آزاد نسبت به انرژی نامحدود خلا در حالتی که صفحات فلزی وجود دارند را به دست آورد، که مقدار آن محدود می باشد. نتیجه فیزیکی برهم کنش کازیمیر بین دو رسانا در خلا، جاذبه می باشد.

سیمای ماکروسکوپی میدان الکترومغناطیسی کوانتومی اثر کازیمیر می باشد که از تغییر در انرژی نقطه صفر که همان انرژی حالت خلا می باشد ناشی می شود که خود این تغییر هم از اعمال شرایط مرزی بوجود می آید [۲، ۳] . در واقع می توان گفت که این شرایط مرزی سبب تغییر در طیف میدان الکترومغناطیسی می شوند یا به عبارت دیگر سبب محدود شدن مدهای میدان الکترومغناطیسی در ناحیه بین صفحات رسانا می شوند. بنابراین وجود این شرایط مرزی انرژی نقطه صفر را که تابعی از فرکانس های مدی امواج الکترومغناطیسی می باشد تغییر می دهند. در پیوست (الف) به طور مفصل به بررسی این روش می پردازیم. برهم کنش دو صفحه رسانای کامل و موازی اولین بار توسط کازیمیر و بعدها در حالت کلی تری که مواد تشکیل دهنده اجسام ماکروسکوپیک دی الکتریک باشد توسط لیفشیتز (۱۹۵۶) محاسبه گردید [۴، ۵] . لیفشیتز اثر کازیمیر را به حالت کلی تری تعمیم داد که در آن نیروی ناشی از افت وخیز میدان الکترومغناطیسی بین دو مرز بوسیله خواص دی الکتریک محیط که تابعی از فرکانس می باشد محاسبه می شود که این فرکانس ها بوسیله فاصله بین این مرزها محدود می شوند. لیفشیتز یک روش را بر پایه تئوری رایتوف که مربوط به الکترودینامیک افت وخیز ها می باشد برای محاسبه نیروهای وان در والس بین دو نیم فضا که بین آنها خلا قرار دارند استفاده نمود.

دلیل اهمیت نیروی کازیمیر موقعی روشن تر می شود که مقدار آن را در فواصل کوچک مورد مطالعه قرار دهیم. هر گاه ابعاد صفحه های رسانا را ۱ سانتیمتر و فاصله آنها را ۱ میکرومتر در نظر بگیریم، فشار ناشی از اثر کازیمیر که بر هر صفحه وارد می شود از مرتبه ۰.۰۰۰۰۰۰۱ پاسکال است، در حالی که اگر فاصله صفحه ها را ۱ نانومتر در نظر بگیریم این فشار از مرتبه ۱ اتمسفر خواهد بود، که بسیار زیاد است [۶] . با توجه به مرتبه بزرگی فشارهای یاد شده، به وضوح پیداست که در ابعاد کمتر از میکرومتر این اثر مهم می شود و باید در طراحی و ساخت ریز ماشین ها لحاظ شود [۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱] . اخیرا با توجه به پیشرفت های تکنولوژی علاقمندی به بر هم کنش های کازیمیر زیادتر شده است [۱۲، ۱۳] . پیشرفت در نانوتکنولوژی در سال های اخیر بر علاقه شناخت بر هم کنش های ناشی از افت خیز میدان الکترومغناطیسی در ابعاد نانو افزوده است [۱۴، ۱۵] . بنابراین بررسی جنبه های کوانتومیِ نانوتکنولوژی در طراحی نانو ماشین ها برای جلوگیری از اثرات ناخواسته ضروری به نظر می رسد [۱۶] . البته این اثرات همیشه غیر مفید نیستند و می توانند با توجه به نوع طراحی و مکانسیم ماشین های مکانیکی، مورد استفاده قرار گیرند [۱۷] . پس باید قادر باشیم نیروهای ناشی از افت و خیز میدان الکترومغناطیسی را برای اشیا مختلف که از دی الکتریک یا فلز ساخته شده اند را محاسبه کنیم. با توجه به این پیشرفت ها نیاز به محاسبه اثر کازیمیر-لیفشیتز برای سیستم هایی با شکل های هندسی گوناگون و مواد تشکیل دهنده مختلف بیشتر شده است. بنابراین رهیافت های مختلفی از جمله رهیافت انرژی پتانسیل (که در این پایان نامه استفاده شده است)، رهیافت فشار تابشی [۱۸، ۱۹] ، رهیافت پراکندگی [۲۰] ، رهیافت تانسور فشار ماکسول [۲۱] و ... وجود دارند که هر رهیافتی با توجه به نوع سیستم مورد بررسی، مفید می باشد و باید مورد استفاده قرار گیرد. سیستمی که ما مورد بررسی قرار می دهیم، یک سیستم چند لایه

ای تخت می باشد، بنابراین ما رهیافتی را استفاده می کنیم که مناسبِ این سیستم باشد.

روندی که در این پایان نامه دنبال می کنیم به این صورت است که در فصل دوم به معرفی اثر کازیمیر و تاریخچه آن می پردازیم. سپس میدان الکترومغناطیسی خلا و انرژی نقطه صفر را که پایه و اساس تمام محاسبات ما می باشد بررسی می کنیم. در ادامه روش لیفشیتز را بررسی می کنیم. البته در پیوست الف نیروی بین دو تیغه دی الکتریک یا همان تئوری لیفشیتز را به روش کازیمیر به دست می آوریم. در نهایت نیروی کازیمیر را به عنوان یک حالت خاص از تئوری لیفشیتز که به جای دی الکتریک ها، رسانای کامل قرار دارد به دست می آوریم. هدف ما بررسی انرژی برهم کنشی لیفشیتز در سیستم های چند لایه ای تخت در دمای محدود غیر صفر می باشد. بنابراین ما به فرمول بندی نیاز داریم که شامل سه پارامتر خواص ماده، دما و هندسه سیستم باشد. در ادامه فصل دوم رابطه ای را معرفی می کنیم که این سه پارامتر را در خود دارد و اثبات این رابطه را بطور مفصل در پیوست (ب) می آوریم. برای این هدف در پیوست (ب) ابتدا تاثیر حضور دو مولکول را بر روی مدهای فرکانسی امواج الکترومغناطیسی که در محاسبه انرژی نقطه صفر به آنها نیاز داریم بررسی می کنیم و به رابطه ای می رسیم که انرژی برهم کنشی بین دو مولکول را به ما می دهد. در ادامه برای محاسبه انرژی برهم کنشی بین دو جسم ماکروسکوپیک این رهیافت را به حالتی که بیش از دو مولکول داشته باشیم تعمیم می دهیم. یک جنبه مهم از برهم کنش بین مولکول ها یا اجسام ماکروسکوپیک تاثیر دما روی این برهم کنش ها می باشد. همان طور که توضیح دادیم برهم کنش ناشی از تغییر در مدهای فرکانسی امواج الکترومغناطیسی می باشد که خود این تغییر هم بدلیل حضور مولکول ها بوجود می آید. در یک دمای محدود باید انرژی آزاد هلمولتز در محاسبه انرژی در نظر گرفته شود و انرژی هر مد یعنی $۱/۲\hbar\omega$ را با $k_BT\ln[۲\sinh(\frac{\hbar\omega}{۲k_BT})]$ ، بطوری که k_B ثابت بولتزمن، $۲\pi\hbar$ ثابت پلانک و T دمای مطلق می باشد، جایگزین نمود [۱] . با این توصیف به رابطه ای برای انرژی می رسیم که تابعی از دما نیز می باشد و رابطه اصلی در محاسباتی که در فصول بعد انجام می دهیم می باشد. در فصل سوم با استفاده از یک روش [۲۲] ، معادله عمومی مربوط به مدهای فرکانسی میدان الکترومغناطیسی که در اثر حضور جسم مختل شده اند را پیدا می کنیم. در این فصل انرژی آزاد برهم کنشی وان در والس -لیفشیتز را در سیستم چند لایه ای تخت به روش ماتریس های دو در دو بدست می آوریم. این روش معادله عمومی مدهای فرکانسی را به ما می دهد که به تعداد لایه های موجود در سیستم چندلایه وابسته است. برای بررسی این روش ابتدا معادله موج را برای سیستم چندلایه ای تخت متشکل از لایه های دی الکتریک همگن حل می کنیم و از حل آن میدان الکتریکی را بدست می آوریم. سپس شرایط مرزی را بر روی این میدان اعمال می کنیم. با اعمال شرایط مرزی معادله هایی بر حسب ضرایب به دست می آوریم که می توان این معادله ها را بصورت روابط ماتریسی نوشت. با استفاده از این فرم فرمول نویسی، ماتریسی را بدست می آوریم که می تواند بصورت ضرب دو ماتریس که عبارتند از ماتریس قطری انتشار و ماتریس متقارن ناپیوستگی تجزیه شود. ماتریس قطری، انتشار مدها را در هر یک از نواحی همگن در سیستم چندلایه تشریح می کند. ماتریس متقارن اثر ناپیوستگی دی الکتریک ها را روی مدهای الکترومغناطیسی شرح می دهد. مزیتی که این روش نسبت به تئوری لیفشیتز برای هندسه های ساده دارد این است که برای هر تعداد لایه می توان معادله عمومی مربوط به مدها را به روش ساده یافت. روش کار ما به این صورت است که ابتدا با حل معادله موج یک ماتریس دو در دو به دست می آوریم. سپس رابطه بین این ماتریس و معادله عمومی را نشان می دهیم. سرانجام با استفاده از این معادله عمومی انرژی برهم کنشی وان در والس را بصورت تابعی از فاصله بین دی الکتریک ها و تعداد لایه ها محاسبه می کنیم. در فصل انتهایی یعنی فصل چهارم کاربرد این روش را برای چند هندسه خاص که عبارتند از :

- دو نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم؛
- نیم فضای تخت از جنس دی اکسید سیلیسیم با تیغه از جنس دی اکسیدسیلیسیم؛
- دو تیغه از جنس دی اکسیدسیلیسیم؛
- دو نیم فضای تخت از جنس فلز ایده ال

مورد بررسی قرار می دهیم. بدین صورت که ابتدا برای هر هندسه مورد نظر از روش ماتریس دو در دو معادله عمومی مربوط به مدهای فرکانسی را محاسبه می کنیم. سپس با داشتن این معادله عمومی انرژی برهم کنشی در این سیستم را بر حسب فاصله بین لایه ها بدست می آوریم و نمودار انرژی بر حسب فاصله بین لایه ها را رسم می کنیم.

فصل ۲

برهم کنش لیفشیتز بین دو جسم دی الکتریک

۱.۲ پیشگفتار

نیروی بین دو صفحه کاملا رسانای غیربااردار و موازی که به فاصله d از هم در خلا میدان الکترومغناطیسی کوانتومی قرار دارند، نیروی کازیمیر نامیده می شود. ما با استفاده از تئوری لیفشیتز نشان می دهیم که نیروی کازیمیر بر واحد سطح از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{F}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}. \qquad (۱.۲)$$

با توجه به اینکه مقادیر سرعت نور c ثابت پلانک تقسیم بر ۲π :

$$c = 2.9979 \times 10^8 \frac{m}{s}, \qquad (۲.۲)$$

$$\hbar = 1.0545 \times 10^{-34} js, \qquad (۳.۲)$$

هستند، اگر ما فاصله بین دو سطح را $۱\mu m$ در نظر بگیریم مقدار نیروی جاذبه کازیمیر بر واحد سطح:

$$\frac{F}{A} \approx 0.00123 N/m^2, \qquad (۴.۲)$$

است. پس متوجه می شویم که وقتی فاصله بین صفحات کمتر از $۱\mu m$ باشد مقدار این نیرو اهمیت پیدا می کند، که کاربرد آن در میکروماشین ها می باشد.

مبدا مطالعه نیروی کازیمیر در یک مساله شیمیایی مربوط به ذرات معلق پایدار در یک محلول بوده است. هنگامی که غلظت الکترولیت بیشتر از یک مقدار بحرانی شود لخته شدن اتفاق می افتد. این لخته شدن به عنوان یک نتیجه از اثر متقابل بین نیروهای جاذب و دافعه می باشد که نیروی جاذبه ناشی از اثر ملحق شدن نیروهای بین اتمی وان در والس می باشد و هر ذره باردار بوسیله یونهایی با بار مثبت احاطه می شود. تعداد اتمها در هر ذره نوعا از مرتبه بیلیون می باشد.

کازیمیر برای درک بهتر، مثال ساده تر دو صفحه رسانای موازی را مورد بررسی قرار داد و دریافت که برهم کنش وان در والس می تواند نشانی از تغییر در انرژی نقطه صفر میدان باشد که این تغییر در اثر حضور دو اتم است. اما انرژی نقطه صفر و میدان الکترومغناطیسی خلا چیست؟ در این مورد در بخش دوم توضیح می دهیم. سرانجام در دو بخش آخر نیروی بین دی الکتریک ها بوسیله تئوری لیفشیتز مطالعه می شود. در حالت خاص نیروی بین صفحات کاملا رسانا از روی تئوری لیفشیتز بدست می آید که اثباتی برای درستی شکل نیروی کازیمیر می باشد.

۲.۲ میدان الکترومغناطیسی خلا و انرژی نقطه صفر

الکترودینامیک ِکوانتمی وجود یک انرژی نقطه صفر را برای میدان های الکترومغناطیسی حتی در غیاب هر گونه منبعی اثبات می کند.

نشان می دهیم که هامیلتونی یک مد میدان الکترومغناطیسی معادل با هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ ساده است.

هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ ساده بصورت رابطه زیر می باشد:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \qquad (۵.۲)$$

در این رابطه p و q عملگرهای مکانیک کوانتومی در فضای هیلبرت هستند. با تعریف عملگرهای غیر هرمیتی زیر:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - imq), \qquad (۶.۲)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + imq), \qquad (۷.۲)$$

همچنین به طور معادل:

$$q = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a - a^\dagger), \qquad (۸.۲)$$

$$p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a + a^\dagger), \qquad (۹.۲)$$

و با جایگذاری این عملگرها در رابطه هامیلتونی رابطه زیر را برای هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده به دست می آوریم:

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}). \qquad (۱۰.۲)$$

ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ ساده بوسیله ویژه مقدارهای عملگر زیر تعیین می شوند:

$$N = a^\dagger a, \qquad (۱۱.۲)$$

که رابطه ویژه برداری و ویژه مقداری این عملگر بصورت زیر می باشد:

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \qquad (۱۲.۲)$$

عملگرهای $a^\dagger$ و a به ترتیب عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده می باشند و در روابط زیر صدق می کنند:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad (۱۳.۲)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \qquad (۱۴.۲)$$

ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ از رابطه زیر بدست می آید:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega. \qquad (۱۵.۲)$$

معادلات ماکسول برای میدان آزاد یا به عبارت دیگر میدان در ناحیه ای که هیچگونه منبعی وجود ندارد بصورت روابط زیر می باشند:

$$\nabla.E = 0, \tag{۱۶.۲}$$

$$\nabla.B = 0, \tag{۱۷.۲}$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{۱۸.۲}$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{۱۹.۲}$$

پتانسیل برداری A و پتانسیل اسکالر ϕ بصورت روابط زیر هستند:

$$B = \nabla \times A, \tag{۲۰.۲}$$

$$E = -(\frac{1}{c})\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\phi. \tag{۲۱.۲}$$

از رابطه (۱۹.۲) معادله موج برای میدان A بصورت رابطه زیر بدست می آید:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \tag{۲۲.۲}$$

که این معادله موج با استفاده از پیمانه کولمب $\nabla.A = 0$ و در غیاب هر گونه منبعی $J = 0$ و $\rho = 0$ به دست می آید.

با استفاده از جداسازی متغیرهای مکان و زمان پتانسیل برداری، حل های تکفام را بدست می آوریم:

$$A(r,t) = \alpha(t)A_0(r) + \alpha^*(t)A_0(r) = \alpha(0)e^{-i\omega t}A_0(r) + \alpha^*(0)e^{i\omega t}A_0^*(r), \tag{۲۳.۲}$$

بصورتیکه $A_0(r)$ معادله موج هلمهولتز را ارضا می کند:

$$\nabla^2 A_0(r) + k^2 A_0(r) = 0 \qquad (k = \omega/c). \tag{۲۴.۲}$$

بردارهای میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی توسط روابط زیر داده می شوند:

$$E(r,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\alpha(t)A_0(r) + \alpha^*(t)A_0^*(r)], \tag{۲۵.۲}$$

$$B(r,t) = \alpha(t)\nabla \times A_0(r) + \alpha^*(t)\nabla \times A_0^*(r). \tag{۲۶.۲}$$

انرژی الکترومغناطیسی از رابطه زیر بدست می آید:

$$H_F = \frac{1}{8\pi}\int d^3r(E^2 + B^2) = \frac{k^2}{2\pi}|\alpha(t)|^2. \tag{۲۷.۲}$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$$q(t) = \frac{i}{c\sqrt{4\pi}}[\alpha(t) - \alpha^*(t)], \tag{۲۸.۲}$$

$$p(t) = \frac{k}{\sqrt{4\pi}}[\alpha(t) + \alpha^*(t)], \tag{۲۹.۲}$$

شکل بازنویسی شده هامیلتونی بصورت زیر:

$$H_F = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \tag{۳۰.۲}$$

خواهد بود که نشان می دهد هامیلتونی هر مد میدان با فرکانس ω با هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده با فرکانس ω که دارای جرم واحد است معادل می باشد.

۳.۲ کوانتش یک مد میدان

برای بررسی هر مد میدان به وسیله مکانیک کوانتمی، کافی است که نوسانگر هماهنگ ساده معادل آن را به وسیله مکانیک کوانتمی بررسی می کنیم:

با در نظر گرفتن $m = ۱$ متغیرهای کلاسیکی زیر را با عملگرهای مکانیک کوانتومی جایگزین می کنیم:

$$\alpha(t) \longrightarrow (2\pi\hbar c^2/\omega)^{\frac{1}{2}} a(t), \tag{۳۱.۲}$$

$$\alpha^*(t) \longrightarrow (2\pi\hbar c^2/\omega)^{\frac{1}{2}} a^\dagger(t). \tag{۳۲.۲}$$

پتانسیل برداری کلاسیکی بوسیله عملگر زیر جایگزین می شود:

$$A(r,t) = (\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega})^{\frac{1}{2}} [a(t)A_0(r) + a^\dagger(t)A_0^*(r)], \tag{۳۳.۲}$$

همچنین میدان های الکتریکی و مغناطیسی از روابط زیر بدست می آیند:

$$E(r,t) = i(2\pi\hbar\omega)^{\frac{1}{2}} [a(t)A_0(r) - a^\dagger(t)A_0^*(r)], \tag{۳۴.۲}$$

$$B(r,t) = (\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega})^{\frac{1}{2}} [a(t)\nabla\times A_0(r) + a^\dagger(t)\nabla\times A_0^*(r)]. \tag{۳۵.۲}$$

هامیلتونی مد میدان کوانتیده عبارت است از:

$$H_F = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}). \tag{۳۶.۲}$$

ویژه مقادیر انرژی مربوط به مد میدانی با فرکانس ω به وسیله رابطه زیر داده می شود:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{۳۷.۲}$$

که عدد صحیح n عبارت است از تعداد کوانتاهای انرژی و یا تعداد فوتون ها در مد میدانی که به واسطه حالت $|n\rangle$ توصیف می شود.

حالت خلا $|۰\rangle$ حالتی است که در آن هیچ فوتونی وجود ندارد اما دارای انرژی $\frac{۱}{۲}\hbar\omega$ می باشد.

بنابراین تئوری کوانتمی تابش یک انرژی نقطه صفر را برای میدان الکترومغناطیسی پیش بینی می کند. در حالت خلا و همچنین در همه حالات دیگر مقدار متوسط میدان های الکتریکی و مغناطیسی صفر است:

$$\langle n|E(r,t)|n\rangle = \langle n|B(r,t)|n\rangle = 0, \tag{۳۸.۲}$$

زیرا:

$$\langle n|a|n\rangle = 0. \tag{۳۹.۲}$$

اما مقدار متوسط مربعِ میدان ها غیر صفر می باشد، یعنی:

$$\langle n|E^2(r,t)|n\rangle \neq 0, \tag{۴۰.۲}$$

$$\langle n|B^2(r,t)|n\rangle \neq 0. \tag{۴۱.۲}$$

این بدان معناست که بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی در حالت $|n\rangle$ حول صفر افت و خیز می کنند.

۴.۲ نیروی بین دو جسم دی الکتریک(برهم کنش وان در والس)

فرضیه ساده شده رساناهای کامل در همه فرکانس های میدان غیر واقعی می باشد و بیان کازیمیر باید به وسیله یک نظریه دیگر که شامل خواص محیط های دی الکتریک می باشد جایگزین شود. برای این منظور باید نیروهای ون در والس جاذب بین مولکول های دو بره را با هم جمع نمود.

ابتدا یک مولکول ساده را در فاصله d از یک نیم فضای $z \geq d$ با N_1 مولکول داخلی بر واحد حجم بررسی می کنیم:

اگر پتانسیل بین مولکولی عبارت باشد از:

$$V(r) = -\frac{B}{r^\gamma}, \qquad (۴۲.۲)$$

پس انرژی برهم کنشی بین تک مولکول و نیم فضا عبارت است از:

$$\begin{aligned} V(d) &= -N_1 B \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{d}^{+\infty} dz [x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{\gamma}{2}} \\ &= -\frac{2\pi N_1 B}{(\gamma-2)(\gamma-3)} d^{3-\gamma}. \end{aligned} \qquad (۴۳.۲)$$

حال اگر تک مولکول به وسیله یک نیم فضا $z \leq 0$ از N_2 مولکول بر واحد حجم جایگزین شود پس انرژی بین مولکولی به ازای واحد سطح می شود:

$$V(d) = -\frac{2\pi N_1 N_2 B}{(\gamma-2)(-3)} \int_0^{+\infty} dR (R+d)^{3-\gamma} = -\frac{2\pi N_1 N_2 B}{(\gamma-2)(\gamma-3)(\gamma-4)} \frac{1}{d^{\gamma-4}}, \qquad (۴۴.۲)$$

و بنابراین نیروی بر واحد سطح بین دو الکتریک عبارت است از:

$$F(d) = -\frac{\partial V(d)}{\partial d} = -\frac{2\pi N_1 N_2 B}{(\gamma-2)(\gamma-3)} \frac{1}{d^{\gamma-3}}. \qquad (۴۵.۲)$$

با فرض پتانسیل لاندن- وان در والس بین مولکولی داریم:

$$\gamma = 6 \quad B = \frac{3\hbar\alpha^2\omega_0}{4} \qquad N_1 = N_2 = N \quad F(d) = -\frac{\pi N^2 \hbar \omega_0 \alpha^2}{8d^3} \equiv \frac{-A}{6\pi d^3}, \qquad (۴۶.۲)$$

که در آن A ثابت هاماکر- دی بوئر است که برابر با $A \equiv \frac{3\hbar\alpha^2\omega_0\pi^2}{4}$ می باشد.

اگر ما برهم کنش تاخیری وان در والس را در نظر بگیریم داریم:

$$\gamma = 7 \qquad B = \frac{23\hbar c\alpha^2}{4\pi}, \qquad (۴۷.۲)$$

نیروی جاذبه بین دو بره

$$F(d) = -\frac{23N^2\hbar c\alpha^2}{40d^4}, \qquad (۴۸.۲)$$

خواهد بود.

اولین آزمایش روی نیروهای بین دو صفحه دی الکتریک نشان داد که نیروهای واکنشی بطور کلی یک مرتبه از نظر اندازه نسبت به انتظاری که از برآورد ثابت دی بوئر- هاماکر داشته اند بزرگتر بود به خصوص که در محاسبه $F(d)$ فرض شده بود که نیروهای بین مولکولی تا زمانی که نیروهای بین دو مولکول از حضور یک مولکول سوم مستقل