دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی ، گرایش جبر

عنوان

بررسی گراف مقسوم علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های مربعی روی حلقه جابجایی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

پژوهشگر

خدیجه پاسبان خمری

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: پاسبان خمری نام: خدیجه

عنوان: بررسی گراف مقسوم علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های مربعی روی حلقه جابجایی

استاد راهنما: دکتر ابراهیم هاشمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: جبر

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۸۱

واژگان کلیدی: حلقه جابجایی، حلقه ناجابجایی، گراف مقسوم‌علیه‌های صفر، حلقه ماتریس‌های مربعی، حلقه ماتریس‌های بالامثلثی

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی تعاریف و خصوصیات اساسی گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه جابجایی و حلقه ناجابجایی می‌پردازیم. سپس نشان می‌دهیم حلقه جابجایی R و حلقه کسرهای کامل آن، $Q(R)$، دارای گراف‌های یکریخت هستند، و در نتیجه قطر و کمر یکسانی دارند.

هم‌چنین به بررسی خواصی از گراف (جهت‌دار) مقسوم علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های مربعی می‌پردازیم، سپس از این نتایج برای بحث در مورد روابط بین قطر گراف مقسوم علیه‌های صفر روی حلقه جابجایی R و حلقه ماتریس‌های مربعی $M_n(R)$ استفاده می‌کنیم.

همچنین مشخص می‌کنیم چه هنگام $diam(\Gamma(R)) \leq ۲$ یا $gr(\Gamma(R)) \geq ۴$. سپس از این نتایج برای بررسی قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه چندجمله‌ای‌های R، حلقه سری‌های توانی R و توسیع حلقه R توسط R -مدول M می‌پردازیم.

در آخر، گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه جابجایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تقدیم به روان پاک پدرم

اولین و بهترین معلم زندگی من

و به مادر بزرگوارم

باارزشترین سرمایه زندگی من

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خدای یکتا را که هرچه هست از اوست؛

سپاس او را که بی یاد و نامش نمی‌توان آغاز کرد و نمی‌توان به پایان برد؛

سپاس و حمد بیکران یگانه عالم را که توفیق کسب و دانش و معرفت را به ما عطا فرمود.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدسش را ستایش می‌کنم.

خدیجه پاسبان خمری

۱۳۹۲

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

اولین بار **بک**[۱] در سال ۱۹۸۸ به یک حلقه‌ی یک‌دار و جابجایی یک گراف نسبت داد. بک با استفاده از مفاهیم نظریه گراف‌ها، خواص جالبی از حلقه‌ها را به‌دست آورد. بعدها **اندرسون**[۲] و **لیوینگستون**[۳] (۱۹۹۹) به این موضوع علاقه‌مند شدند و به‌طور جدی نظریه گراف مقسوم‌علیه‌های صفر را با ارائه یک تعریف دقیق، بررسی خواص گرافی و مقایسه کردن آن‌ها با خواص حلقه‌ای پایه‌گذاری کردند. آنها گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه جابجایی R را با نماد $\Gamma(R)$ نشان دادند. مفهوم گراف مقسوم‌علیه‌های صفر در واقع پلی بین نظریه گراف‌ها و نظریه حلقه‌هاست.

ردموند[۴] (۲۰۰۲) این مفهوم را به حلقه‌های ناجابجایی گسترش داد و چندین تعریف مختلف از گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه ناجابجایی را ارائه نمود. اخیرا **اکستل**[۵] و همکارانش (۲۰۰۵)، **لوکاس**[۶] (۲۰۰۶)، اندرسون و **مولای**[۷] (۲۰۰۷) مفهوم **قطر**[۸] و **کمر**[۹] در حلقه چندجمله‌ای‌ها و حلقه سری‌های توانی روی یک حلقه جابجایی را مورد مطالعه قرار دادند.

در این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم R یک حلقه جابجایی و یک‌دار و $M_n(R)$، حلقه ماتریس‌های $n \times n$، و هم‌چنین $\Gamma(R)$ و $\Gamma(M_n(R))$ به ترتیب گراف مقسوم‌علیه‌های صفر R و گراف مقسوم علیه‌های صفر $M_n(R)$ باشد.

حال به معرفی مفاهیم و تعاریفی از نظریه گراف و نظریه حلقه‌های جابجایی که در این پایان‌نامه استفاده شده‌اند، می‌پردازیم. تعاریف مربوط به گراف به کار رفته در این قسمت از مرجع [۹]، گرفته شده‌اند.

[۱] Beck
[۲] Anderson
[۳] Livingston
[۴] Redmond
[۵] Axtell
[۶] Lucas
[۷] Mulay
[۸] Diameter
[۹] Girth

۲.۱ مفاهیم مربوط به نظریه گراف

تعریف ۱.۲.۱. گراف G، زوج مرتب (V, E) است که در آن V یک مجموعه و E زیرمجموعه‌ای از $V \times V$ می‌باشد، V را مجموعه رئوس و E را مجموعه یال‌های گراف G گوییم.

تعریف ۲.۲.۱. دو رأس x و y در G را مجاور گویند، هرگاه بین x و y یالی موجود باشد.

تعریف ۳.۲.۱. $G' = (V', E')$ یک زیرگراف $G = (V, E)$ است اگر $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$، که در این‌صورت با نماد $G' \subseteq G$ نمایش می‌دهیم. زیرگرافی از G که مجموعه رأس‌های آن V' و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه‌ی همه‌ی یال‌هایی از G باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است را زیرگراف القا شده توسط V' نامیده و با $G[V']$ نمایش داده می‌شود. می‌گوئیم $G[V']$ یک زیرگراف القایی G است.

تعریف ۴.۲.۱. در گراف G دنباله‌ای از رئوس متمایز مانند $(a_۰, a_۱, ..., a_n)$ که در آن برای هر $۰ \leq i \leq n$، a_i و $a_{i+۱}$ مجاورند را مسیری به طول n می‌نامیم. مسیر $(a_۰, a_۱, ..., a_n)$ با شرط $a_۰ = a_n$، دور نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. گراف G را همبند گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه a و b از G، مسیری در G موجود باشد. در غیر این‌صورت G را ناهمبند نامند.

تعریف ۶.۲.۱. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس a و b را فاصله a و b نامیده و با $d(a, b)$ نمایش می‌دهیم، هم‌چنین اگر مسیری بین a و b موجود نباشد، می‌نویسیم $d(a, b) = \infty$. بیشترین فاصله بین دو رأس G، را قطر G می‌نامیم و با $diam(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. کمر گراف G، طول کوتاه‌ترین دور در یک گراف است و آن را با $gr(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر گرافی فاقد دور باشد، می‌نویسیم $gr(G) = \infty$.

تعریف ۸.۲.۱. گرافی که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشد را گراف کامل گوییم. گراف کامل با n رأس را با K^n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. گراف G را r -بخشی گوییم، هرگاه رأس‌های G را بتوان به r زیر مجموعه افراز کرد به‌طوری که بین رأس‌های هیچ‌یک از این زیرمجموعه‌ها یالی نباشد. گراف r -بخشی G را یک گراف r -بخشی کامل گوییم، هرگاه هر دو رأس که در یک بخش نباشند، با یکدیگر مجاور باشند. گراف دوبخشی کامل با بخش‌های با اندازه‌های m و n را با $K^{m,n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. گراف ستاره گرافی است که در آن یک رأس با بقیه رئوس مجاور است و بین رأس‌های دیگر یالی وجود ندارد. به عبارت دیگر گراف $K^{1,n}$ را ستاره می‌نامیم.

بنابر تعریف واضح است که اگر $m, n \geq 2$، $gr(K^{n,m}) = 4$ و برای هر $n \geq 1$، $gr(K^{1,n}) = \infty$.

هم‌چنین $diam(K^{1,1}) = 1$ و اگر $m \geq 2$ یا $n \geq 2$، $diam(K^{m,n}) = 2$.

تعریف ۱۱.۲.۱. $\overline{K}^{m,3}$ گرافی است که در واقع از به هم پیوستن گراف دو بخشی کامل $G_1 = K^{m,3}(= A \cup B \ ; \ |A| = m, |B| = 3)$ با گراف ستاره‌ی $G_2 = K^{1,m}$ به وسیله یکی گرفتن مرکز G_2 و یک نقطه از B به دست می‌آید.

بنابر تعریف واضح است که اگر $m \geq 2$، آن‌گاه $gr(\overline{K}^{m,3}) = 4$ و هم‌چنین $gr(\overline{K}^{1,3}) = \infty$.

تعریف ۱۲.۲.۱. رأسی از یک گراف را پایانی گوییم، هرگاه فقط یک رأس دیگر وجود داشته باشد که با آن مجاور باشد.

۳.۱ مفاهیم مربوط به نظریه حلقه‌های جابجایی

در این پایان‌نامه، همواره R حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار است که $1_R \neq 0$ و هرگاه از M به عنوان R -مدول یاد می‌کنیم M، R -مدولی یکانی است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. گوییم a یک مقسوم‌علیه صفر چپ است اگر عنصر ناصفر $x \in R$ موجود باشد که $ax = 0$. به طور مشابه مقسوم‌علیه صفر راست تعریف می‌شود. عنصر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر گوییم، هرگاه a یا یک مقسوم‌علیه صفر چپ باشد یا یک مقسوم‌علیه

صفر راست. هم‌چنین عنصر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر دو طرفه گوییم، هرگاه a هم یک مقسوم‌علیه صفر چپ باشد و هم یک مقسوم‌علیه صفر راست.

قرارداد ۲.۳.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. برای $A \subseteq R$ قرارداد می‌کنیم :*

$$A^* = A - \{۰\}.$$

هم‌چنین برای هر مجموعه X، تعداد عناصر X را با $|X|$ نمایش می‌دهیم. اگر X متناهی نباشد، می‌نویسیم $|X| = \infty$.

تعریف ۳.۳.۱. عضو x از حلقه R را که مقسوم‌علیه صفر نباشد منظم، و حلقه‌ای را که مقسوم‌علیه صفر ناصفر نداشته باشد حوزه صحیح می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱. ایده‌آل P از حلقه R را اول گوییم، هرگاه $P \neq R$ و برای هر دو ایده‌آل A و B، اگر $AB \subseteq P$، آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول حلقه R را با $spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۳.۱. ایده‌آل سره M از حلقه R را ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه هیچ ایده‌آل سره بین M و R وجود نداشته باشد. هم‌چنین هر حلقه جابجایی R که دقیقا یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد را موضعی گوییم.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. ایده‌آل اولی از R مانند p را که شامل I است، یک ایده‌آل اول مینیمال I می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل اولی از R مثل q موجود نباشد که $I \subseteq q \subsetneqq p$.

هر ایده‌آل اول مینیمال (۰) به ایده‌آل اول مینیمال R معروف است.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. a را یک عنصر پوچ‌توان نامند، هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری که $a^n = ۰$. مجموعه عناصر پوچ‌توان R را با $nil(R)$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که هر عنصر پوچ‌توان در حلقه R، یک مقسوم‌علیه صفر است. هم‌چنین $۰ \in R$ عنصری پوچ‌توان است.

تعریف ۱.۳.۸. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. a را یک عنصر خودتوان نامند، هرگاه $a = a^۲$. عنصر خودتوان a را نابدیهی گوییم، هرگاه $a \neq ۰$ و $a \neq ۱$.

واضح است که در هر حلقه، صفر تنها عنصر پوچ‌توان است که خودتوان نیز هست. در حلقه R، اگر e خودتوان نابدیهی باشد، چون $(۱ - e)e = ۰$، پس e یک مقسوم‌علیه صفر است.

تعریف ۱.۳.۹. ایده‌آل I از حلقه R را پوچ گوییم، هرگاه تمام عناصر I پوچ‌توان باشد.

مثال ۱.۳.۱۰. $nil(R)$ یک ایده‌آل پوچ از حلقه جابجایی R است.

تعریف ۱.۳.۱۱. مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ را رادیکال پوچ گوییم و با $N(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱۲. حلقه R را تقلیل یافته گوییم، هرگاه صفر تنها عنصر پوچ‌توان آن باشد. به عبارت دیگر حلقه جابجایی R تقلیل یافته است اگر رادیکال پوچ آن برابر صفر باشد.

تعریف ۱.۳.۱۳. عنصر a از حلقه R را وارون‌پذیر گوییم، هرگاه عضوی مانند b از R موجود باشد که $ab = ۱$. مجموعه‌ی عناصر وارون‌پذیر R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱۴. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یک‌دار باشد. بعد R را با $dimR$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$dimR = sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{۰\} \mid \text{زنجیری از ایده‌آل‌های اول به طول } n \text{ موجود باشد.}\}$$

اگر این زنجیر متناهی نباشد بعد R را برابر ∞ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱۵. حلقه R را فون نیومن منظم گوییم، هرگاه برای هر $x \in R$، عنصر $y \in R$ موجود باشد که $x = x^۲y$.

واضح است که حلقه‌های فون نیومن منظم، تقلیل یافته هستند.

لم ۱۶.۳.۱. *حلقه جابجایی یک‌دار R فون‌نیومن منظم است اگر و فقط اگر هر ایده‌آل اصلی آن به وسیله یک عضو خودتوان تولید شود.*

برهان. ($\Leftarrow$) اگر Ra ایده‌آل اصلی از حلقه R باشد، طبق فرض $b \in R$ موجود است که $a = a^۲b$. واضح است که ab خودتوان است و به علاوه $Ra = Rab$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $a \in R$ عضو دلخواهی از حلقه R باشد. طبق فرض عنصر خودتوان b از R وجود دارد که $Ra = Rb$. بنابراین $r, r' \in R$ موجودند که $a = rb$ و $b = r'a$. چون b خودتوان است، $a = rb^۲$ یعنی $a = r(r'a)b$، مجددا با جایگذاری b در عبارت اخیر $a = a^۲(rr'^۲)$. یعنی $r'' := rr'^۲$ به‌گونه ای یافت شد که $a = a^۲r''$، بنابراین R حلقه فون نیومن منظم است. $\square$

تعریف ۱۷.۳.۱. گوییم حلقه جابجایی R، π -منظم است اگر برای هر $r \in R$، عدد صحیح مثبت n و عنصر $x \in R$ موجود باشند به‌قسمی که $r^{۲n}x = r^n$.

واضح است که هر حلقه فون نیومن منظم، π -منظم است. به سادگی می‌توان نشان داد حلقه R فون نیومن منظم است اگر و تنها اگر تقلیل یافته و صفر بعدی باشد.

قضیه ۱۸.۳.۱. [۱۳، قضیه ۳.۱] *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

۱. *R، π - منظم است.*

۲. *برای هر $r \in R$، یک عنصر $y \in R$ و عدد صحیح مثبت n وجود دارد به‌قسمی که $r^{n+۱}y = r^n$.*

۳. *$R/N(R)$ یک حلقه فون نیومن منظم است.*

۴. *R صفر- بعدی است.*

برهان. ($۱ \Leftarrow ۲$) کافیست قرار دهیم $y = r^{n-۱}x$.

($۲ \Leftarrow ۱$) چون $r^n = r^{n+۱}y = r^n(ry) = r^{n+۱}yry = r^{n+۲}y^۲ = ... = r^{۲n}y^n$، کافیست $x = y^n$ انتخاب کنیم.

(۲ ⇐ ۳) فرض کنیم $r \in R$ و $\overline{r}$ باقیمانده آن در $R/N(R)$ باشد. در این‌صورت برای y و n متناظر آن در $R/N(R)$ داریم $\overline{r}^{n+1}\overline{y} = \overline{r}^n$. در نتیجه $(\overline{r}^n\overline{y} - \overline{r}^{n-1})^2 = \overline{0}$ و چون $R/N(R)$ یک حلقه تقلیل یافته است لذا $\overline{r}^n\overline{y} = \overline{r}^{n-1}$. با ادامه این روند نتیجه می‌گیریم $\overline{r}^2\overline{y} = \overline{r}$.

(۳ ⇐ ۲) برای هر $r \in R$، $x \in R$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $r - r^2x \in N(R)$. در این‌صورت برای بعضی اعداد صحیح مثبت n داریم $0 = (r - r^2x)^n = r^n(1 - rx)^n$. می‌نویسیم $(1 - rx)^n = 1 - prx$ و تعریف می‌کنیم $y = px$.

(۳ ⇔ ۴) حلقه‌های R و $R/N(R)$ به‌طور همزمان صفر-بعدی هستند. □

تعریف ۱.۳.۱۹. در حلقه R اگر $S = R - Z(R)$، آن‌گاه $R_s = \{\frac{a}{b} \mid a \in R, b \in S\}$ را با نماد $Q(R)$ نمایش می‌دهیم و آن را حلقه کسرهای کامل R می‌نامیم که در آن جمع و ضرب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{و} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

معمولا، عنصر $x \in R - Z(R)$ را یک عنصر منظم R گوییم.

قضیه ۱.۳.۲۰. [۱۳، قضیه ۳.۲] *فرض کنیم Q یک حلقه کسرهای کامل باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

۱. *Q، π - منظم است.*

۲. *برای هر $a \in Q$، یک خودتوان $e \in Q$ وجود دارد به‌قسمی که $a + (1 - e)$ یکه و $a(1 - e)$ پوچ‌توان است.*

۳. *برای هر $a \in Q$، عنصر $b \in Q$ موجود است به‌قسمی که $a + b$ یکه و ab پوچ‌توان است.*

۴. *برای هر $a \in Q$، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد به‌قسمی که $a^n = re$، که r یکه و e خودتوان است.*

برهان. (۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم a در Q باشد. $a' \in Q$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $a^{2n}a' = a^n$. به آسانی می‌توان نشان داد که a^na' و $1 - a^na'$ عناصر خودتوان در Q هستند. به علاوه،

$$[a(1 - a^na')]^n = a^n(1 - a^na')^n = a^n(1 - a^na') = 0.$$

پس $a(1 - a^na')$ پوچ‌توان است. نشان می‌دهیم $a + (1 - a^na')$ یک عنصر یکه است. کافیست نشان دهیم متعلق به هیچ ایده‌آل اول P از Q نیست.

اگر P یک ایده‌آل اول Q باشد، آن‌گاه $a(1 - a^na') \in P$. اما هر دوی a و $(1 - a^na')$ نمی‌توانند در P باشند زیرا اگر در P باشند، آن‌گاه $1 \in P$. بنابراین $a + (1 - a^na') \notin P$.

(۲ $\Leftarrow$ ۳) واضح است.

(۳ $\Leftarrow$ ۴) فرض کنیم a در Q باشد و b را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرایط گزاره (۳) صدق کند. اگر P ایده‌آل اولی از Q باشد و اگر $a^n + b^n \in P$ که n عدد صحیح مثبتی باشد به‌قسمی که $(ab)^n = 0$، آن‌گاه a^n و b^n متعلق به P هستند. بنابراین a و b در P هستند که با فرض منظم بودن $a + b$، در تناقض است. اگر $r = a^n + b^n$ و $e = a^n/(a^n + b^n)$، آن‌گاه r و e عناصر مورد نظر هستند.

(۴ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنیم $P_1 \subseteq P_2$ ایده‌آل‌های اول Q باشند. اگر $a \in P_2$، آن‌گاه $a^n = re$؛ که n، r و e عناصر مذکور در گزاره (۴) هستند. عنصر $1 - e \notin P_2$ و از $e(1 - e) = 0$ نتیجه می‌شود $e \in P_1$. بنابراین $P_1 = P_2$، که نشان می‌دهد Q، صفر-بعدی است. □

نتیجه ۲۱.۳.۱. [۱۳، نتیجه ۳.۳] *فرض کنیم Q یک حلقه کسرهای کامل و تقلیل یافته باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

۱. *Q فون نیومن منظم است.*

۲. *برای هر $a \in Q$، عنصر خودتوان $e \in Q$ موجود است به‌طوری که $a + (1 - e)$ یکه است و $a(1 - e) = 0$.*

۳. *برای هر $a \in Q$، عنصر $b \in Q$ وجود دارد به‌طوری که $a + b$ یکه است و $ab = ۰$.*

۴. *برای هر $a \in Q$ داریم $a = re$ به‌طوری که r یکه است و e خودتوان است.*

لم ۲۲.۳.۱. *هرقلمرو صحیح فون نیومن منظم، میدان است.*

برهان. فرض کنیم R قلمرو صحیح فون نیومن منظم باشد و $a \in R \neq ۰$. در این‌صورت $b \in R$ موجود است که $a = a^۲b$. بنابراین $a(۱ - ab) = ۰$. چون R قلمرو صحیح است $۱ - ab = ۰$ لذا $ab = ۱$. پس R میدان است. □

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای از R باشد. پوچ‌ساز X را که با نماد $ann(X)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$ann(X) = \{a \in R \mid aX = ۰\}.$$

لم ۲۴.۳.۱. [۱۵، قضیه ۶] *اگر R حلقه‌ای جابجایی باشد و $x \in R$ موجود باشد به‌طوری که $ann(x)$ در بین بقیه پوچسازها ماکسیمال باشد آن‌گاه $ann(x)$ ایده‌آلی اول است.*

برهان. فرض کنیم $ann(x)$ در بین پوچسازها ماکسیمال باشد و فرض کنیم $ab \in ann(x)$. نشان می‌دهیم $a \in ann(x)$ یا $b \in ann(x)$.

فرض کنیم $a \notin ann(x)$. در این‌صورت $ax \neq ۰$. داریم $ann(ax) \supseteq ann(x)$ زیرا هر عنصری که پوچساز x باشد، پوچساز ax نیز هست. حال از آنجائی که $ann(x)$ در بین پوچسازها ماکسیمال است لذا $ann(ax) \subseteq ann(x)$. در نتیجه $ann(ax) = ann(x)$. چون b پوچساز ax است لذا $b \in ann(x)$. □

لم ۲۵.۳.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و X یک زیرگروه جمعی R باشد. در این‌صورت برای هر $a \in R$ داریم :*

$$[X : X \cap ann_l(a)] = |Xa|.$$

برهان. تابع $f : X \longrightarrow Xa$ را با ضابطه $f(x) = xa$ در نظر می‌گیریم. به وضوح f یک همریختی جمعی پوشاست. حال چون $Kerf = X \cap ann(a)$ پس داریم $[X : X \cap ann_l(a)] = |Xa|$. □

نتیجه ۲۶.۳.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت برای هر $a \in R$ داریم :*

$$[R : ann_l(a)] = |Ra|.$$

قضیه ۲۷.۳.۱. [۱۵، قضیه ۸۲] *فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. فرض کنیم A یک R -مدول ناصفر متناهیا تولیدشده و S نیز یک زیرحلقه مشمول در $Z(A)$ باشد. در این‌صورت عنصر ناصفر منحصر به‌فردی مانند a در A وجود دارد به‌طوری که $Sa = ۰$.*

فصل ۲

همبندی، قطر و کمر در گراف مقسوم‌علیه‌های صفر