





دانشگاه سبزگان  
دانشکده علوم  
گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد

## شبکه های اپتیکی برای گازهای کوانتومی فوق سرد و چگاله های بوز – اینشتین

سعیده حسنی

استاد راهنما:

دکتر سعید قنبری

اسفند 1389

## تقدیر و تشکر از

دکتر قنبری، به سبب راهنمایی‌ها، صبوری و آموختن نگاهی متفاوت.  
دکتر سعید، دکتر صراف‌اف‌فی و دکتر عابدینی، به سبب دریغ نکردن اندیشه‌شان.

پدرم، با منطق جاری زندگی‌اش.

مادرم، با دوست داشتن بی‌قید و شرطش.

اعضای خانواده، با قسمت کردن شادی‌ها و لبخندهایشان.

دوستانم، شاهدان زیبارویی که هر یک به نوعی در زندگی‌ام دلبری کرده‌اند.

و او، که ابتدا و انتهای همه‌ی این سپاس‌هاست.

## چکیده

شبکه های اپتیکی یا بلورهای مصنوعی نوری، که دارای صدها هزار میکروتله ی اپتیکی هستند با استفاده از تداخل پرتوهای لیزری ایجاد می شوند. گازهای کوانتومی فوق سرد در شبکه های اپتیکی سامانه های مورد اطمینانی برای بررسی مسائل بنیادی فیزیک بس ذره ای هستند و کاربردهای فراوانی در اپتیک کوانتومی و پردازش اطلاعات کوانتومی، تولید مولکول های سرد با ماندگاری بالا و درک بهتر فیزیک اتمی مولکولی دارند. به دام اندازی اتم های فوق سرد در پتانسیل های مصنوعی تناوبی هم چون شبکه های اپتیکی و مغناطیسی دائم امکان کنترل و دست کاری سامانه های کوانتومی را بسیار فراتر از آنچه در سامانه های کوانتومی ماده چگال دیگر می توان یافت، فراهم نموده است. ما در این پروژه به بررسی جدیدترین دستاوردها در زمینه ی گازهای کوانتومی فوق سرد در شبکه های اپتیکی خواهیم پرداخت.

## فهرست مطالب

صفحه

عنوان

### فصل اول:

- 1 ..... چگالش بوز - اینشتین
- 5 ..... 1-1 سامانه بوزونی ایده آل
- 7 ..... 1-1-1 دمای گذار و کسر چگاله
- 9 ..... 1-1-2 پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه بعدی
- 11 ..... 1-1-2 دمای گذار و سهم چگاله
- 13 ..... 1-1-3 چگاله ی بوز - اینشتین در پتانسیل توانی
- 16 ..... 1-1-4 چگالش بوز - اینشتین در ابعاد پایین تر
- 17 ..... 1-1-5 کمیت های ترمودینامیکی
- 19 ..... 1-1-5-1 گرمای ویژه در نزدیکی  $T_c$

### فصل دوم

- 23 ..... به دام اندازی و سردسازی اتم ها
- 23 ..... 1-2 ساختار اتمی
- 25 ..... 2-2 اثر زیمان
- 29 ..... 2-3 تله های مغناطیسی
- 32 ..... 2-3-1 تله ی چهار قطبی

34	..... 2-3 تله‌ی TOP
36	..... 2-3 میکرو تله
41	..... 2-4 اتم در حضور میدان الکتریکی
45	..... 2-4-1 برهم کنش اتم با نور لیزر
48	..... 2-4-2 نیروی وارد بر اتم در میدان لیزری
49	..... 2-4-3 تله‌های اپتیکی
50	..... 2-5 سردسازی لیزری
55	..... 2-6 تله‌ی مغناطو-اپتیکی
57	..... 2-7 سردسازی تبخیری

## فصل سوم

61	..... گازبوزونی غیر یکنواخت در دمای صفر
61	..... 3-1 برهم کنش در چگاله‌ی بوز-ایشترین
64	..... 3-2 معادله گراس-پیتاوسکی
66	..... 3-2-1 اتم‌ها با چه قدرتی برهم کنش می‌کنند؟
68	..... 3-3 توزیع تکانه و چگالی حالت‌ها در حضور پتانسیل هارمونیک
69	..... 3-4 حالت پایه برای بوزون‌های به دام افتاده
71	..... 3-4-1 محاسبه‌ی وردشی
74	..... 3-4-2 تقریب توماس-فرمی

## فصل چهارم

77	چگاله‌های بوز- اینشتین در شبکه‌های اپتیکی
77	1-4 شبکه‌های اپتیکی
80	2-4 ساختار شبکه‌های اپتیکی
84	3-4 نظریه‌ی باند
87	4-4 گذار از ابرشاره به نارسانای مات
87	4-5 نوسانات بلاخ و شکست لاندائو-زنر
90	مراجع

# فصل اول

## چگالش بوز- اینشتین

پیش‌بینی چگالش بوز- اینشتین به سال 1925 برمی‌گردد. در این سال به دنبال کار بوز<sup>1</sup> فیزیکدان هندی، روی آمار فوتون‌ها، اینشتین<sup>2</sup> ایده‌ی آماری بوز را به بوزون‌های جرم‌دار بدون برهم‌کنش تعمیم داد، که نتیجه‌ی آن آمار بوز- اینشتین بود [1]. سپس اینشتین از این آمار نتیجه گرفت که زیر دمای خاصی، کسری متناهی از تعداد کل ذرات سامانه، پائین‌ترین حالت ذره‌ای را پر می‌کنند که به این پدیده چگالش بوز- اینشتین یا به اختصار BEC گفته می‌شود.

---

S. N. Bose<sup>1</sup>  
A. Einstein<sup>2</sup>



این پیش‌بینی حتی توسط خود اینشتین جدی گرفته نشد تا این که در سال 1938 فریتزلاندن<sup>1</sup> از آزمایشات ابرشاره هلیوم چهار ( $^4He$ ) مایع باخبر شد. با توجه به بوزون بودن هلیوم چهار و این حقیقت که دمای گذاری که از نظریه‌ی اینشتین برای چگالش به دست می‌آید نزدیک دمای مشاهده شده برای گذار هلیوم مایع بود، لاندن ارتباط بین ابرشاره هلیوم مایع و چگالش بوز-اینشتین را پیشنهاد کرد [2].

در سال 1959 هشت<sup>2</sup> نشان داد که هیدروژن اسپین-قطبیده نماینده خوبی برای گاز بوزونی با برهم‌کنش ضعیف است، چون برهم‌کنش جاذبه بین دو اتم هیدروژن که اسپین آن‌ها هم خط شده‌اند، خیلی ضعیف است و نمی‌تواند با هم حالت مقید تشکیل دهند، هم چنین این اتم‌ها به خاطر سبک بودنشان مورد توجه قرار گرفتند [3]. سرانجام پس از دو دهه کار آزمایشگاهی، چگالش بوز-اینشتین اتم‌های هیدروژن در سال 1998 به دست آمد. چگاله برای گازهای اتمی رقیق، اولین بار پس از گذشت 70 سال از پیش‌بینی اینشتین به صورت تجربی برای تقریباً 2000 اتم  $^{87}Rb$  توسط کرنل<sup>3</sup> و ویمن<sup>4</sup> در 5 ژوئن 1995 در JILA<sup>5</sup> به دست آمد که دمای گذار 170 نانوکلوین بود [4]. 4 ماه بعد برای اتم‌های سدیم، توسط کیتلی<sup>6</sup> در دانشگاه MIT با موفقیت انجام شد [5]. چند ماه پس از آن برای اتم‌های  $^7Li$  هم چگالش مشاهده شد [6]. به خاطر این دستاوردها جایزه‌ی نوبل سال 2001 به این سه فیزیکدان تعلق گرفت.

یکی از مشکلات رسیدن به چگالش بوز-اینشتین، دمای گذار خیلی پایین برای اتم‌ها بود که با تکنولوژی آن زمان غیر قابل دسترس بود. در دهه 1980 تکنیک‌هایی مانند سرمایش لیزری و تله‌های مغناطو-اپتیکی برای به دام انداختن و سرد کردن اتم‌های خنثی گسترش یافت [7، 8]. البته سرد کردن به وسیله لیزر به تنهایی نمی‌تواند چگالی‌های به اندازه‌ی کافی بزرگ و دمای پایین برای چگاله ایجاد کند. برای تحقق این

---

<sup>3</sup> F. London

<sup>1</sup> C. E. Hecht

<sup>2</sup> E. A. Cornell

<sup>3</sup> C. E. Wieman

<sup>4</sup> Joint Institute for Laboratory Astrophysics

<sup>5</sup> W. Ketterle

منظور روش سرمایه‌گذاری تبخیری پیشنهاد شد [7]. پس از سردسازی تبخیری اتم‌ها در حدود 100 مرتبه از اتم‌هایی که به وسیله لیزر سرد شده‌اند، سردتر هستند.

با ترکیب سرمایه‌گذاری لیزری و تبخیری برای اتم‌های قلیایی، آزمایشگران سرانجام موفق به تولید دما و چگالی لازم برای چگالش بوز-اینشتین شدند. تله‌های مغناطیسی، گشتاور مغناطیسی بزرگی لازم دارند که در اتم‌هایی که الکترون جفت نشده دارند این خصیصه وجود دارد. با توجه به این که لیزرهای موجود در ناحیه‌ی مادون قرمز یا مرئی هستند، بسامد گذار اتم‌ها برای استفاده از سرمایه‌گذاری لیزری نیز، باید در این ناحیه باشد. اتم‌های قلیایی این دو خاصیت مهم را دارند، علاوه بر این طیف ساده و مطالعه شده‌ی اتم قلیایی برای سرمایه‌گذاری تبخیری آن‌ها را نماینده‌ی مناسبی برای تشکیل چگالش بوز-اینشتین کرده است. هم‌چنین در سرمایه‌گذاری تبخیری نیاز داریم که برخوردهای الاستیک انجام شود و چون سطح مقطع برخورد الاستیک این اتم‌ها خیلی بزرگ است برای چگالش بوز-اینشتین مناسب هستند [4,9].

چگالی میدان الکتریکی برای یک میدان لیزری به صورت موج ایستا، در فضا تناوبی است. به خاطر جابجایی اشتراک این تناوب منجر به اعمال پتانسیلی بر اتم می‌شود که نسبت به زمان متناوب است. این اصل فیزیکی پشتوانه‌ی تولید شبکه‌های اپتیکی شد که با برهم‌نهی تعداد متفاوتی از باریکه‌های لیزر می‌توان پتانسیل‌های یک، دو یا سه بعدی متناوب ایجاد کرد.

حدس این مطلب که امواج ایستای نوری ممکن است برای محدود کردن حرکت اتم‌ها استفاده شوند به سال 1968 بر می‌گردد و توسط لتخوف<sup>1</sup> پیشنهاد شد [10]. و اولین مشاهده‌ی آزمایشگاهی شبکه‌ی اپتیکی در سال 1987 برای گازی کلاسیکی از اتم‌های سدیم انجام شد [11].

حال این سوال پیش می‌آید که چرا می‌خواهیم چگاله را در شبکه‌ی اپتیکی مطالعه کنیم؟ از دو منظر به این سوال می‌توان نگاه کرد. چرا چگاله و چرا شبکه‌های اپتیکی؟ چه تفاوتی بین قرار دادن اتم‌های فوق سرد و

چگاله‌ها در شبکه‌های اپتیکی وجود دارد؟ دما و چگالی اتم‌های فوق سرد و چگاله‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای با هم متفاوت است. برای اتم‌های سرد، دما در محدوده‌ی میکروکلوین و چگالی‌ها در حدود  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$  است، در عوض برای چگاله‌ها مقادیر نوعی از مرتبه‌ی 10 تا 100 نانوکلوین برای دما و  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$  یا بیشتر برای چگالی است. این اختلاف در مرتبه‌ی بزرگی پارامترهای فیزیکی چندین نتیجه دارد. اول این که دماهای پائین‌تر بدین معناست که چگاله معمولاً در ترازهای پائین‌تر انرژی شبکه خواهد بود بدون این که نیازی به سرد کردن باشد. دوم این که چگالی‌های بالاتر باعث افزایش ضریب انباشتگی شبکه می‌شود که می‌تواند از  $10^{-3}$  در اتم‌های سرد تا 1 در چگاله، افزایش یابد. سوم این که چگالی‌های بالاتر باعث می‌شوند برهم‌کنش‌های بین اتمی مهم شوند. از جمله‌ی این اثرات که در شبکه‌های اپتیکی دیده می‌شوند نوسانات بلاخ و تونل زنی لاندائو-زئر هستند. بنابراین قرارداد چگاله‌ها در شبکه‌های اپتیکی بیشتر از اتم‌های فوق سرد منجر به دست‌یابی به فیزیک پدیده‌های غیر خطی می‌شود [12].

حال به جنبه‌ی دوم سوال می‌پردازیم. چرا شبکه‌های اپتیکی؟ ساده‌ترین جوابی که به ذهن می‌رسد این است که (1) یک مقیاس طولی جدید (طول شبکه) را به سامانه معرفی می‌کند که از مرتبه‌ی میکرون است. (2) بحث تناوب مطرح می‌شود در صورتی که قبل از آن فقط هارمونیک بودن مطرح بود. مقیاس طولی جدید بسامدهای موضعی خیلی بزرگ تله را ایجاد می‌کند که این حد از عمق تله ممکن است چگاله‌هایی که برهم‌کنش ندارند یا برهم‌کنش ضعیف دارند را کاملاً ایزوله کند. از طرف دیگر، تناوبی بودن ممکن است مطالعه‌ی مدل‌های اصلی رایج در فیزیک ماده‌ی چگال، مانند مدل بوز-هابارد<sup>1</sup>، را که گذار فاز کوانتومی از حالت ابرشاره به نارسانای مات را پیش‌بینی می‌کند آسان سازد.

---

<sup>1</sup> Bose – Hubbard model

در این بخش رفتار فیزیکی سامانه‌هایی را بررسی می‌کنیم که با وجود ناچیز بودن برهم‌کنش بین اتمی، اثرات کوانتمی نقش مهمی را ایفا می‌کنند. بدین معنا که دما و چگالی سامانه از حد معینی تجاوز نمی‌کنند.

$$n\lambda^3 \equiv \frac{n\hbar^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \ll 1$$

که در آن  $\lambda$  طول موج دمایی میانگین است. در حد  $\circ \rightarrow (n\lambda^3)$  همه کمیات فیزیکی به مقدار کلاسیکی شان میل می‌کنند. در مقادیر کوچک  $n\lambda^3$  کمیت‌ها به صورت سری توانی بر حسب این پارامتر بسط داده می‌شوند. وقتی  $n\lambda^3$  از مرتبه 1 می‌شود، رفتار سامانه به طرز قابل توجهی متفاوت از حالت کلاسیکی است و اثرات کوانتمی را نشان می‌دهد. در ادامه، دمای گذار چگالش و کسر چگاله را برای ذرات بدون برهم-کنش و برای بوزون‌ها در حضور پتانسیل خارجی توانی محاسبه می‌کنیم. بررسی چگالش در ابعاد پایین‌تر از دیگر مباحث این فصل است.

## 1-1 سامانه بوزونی ایده آل

در تعادل ترمودینامیکی عدد اشغال میانگین یک حالت تک ذره‌ای در توزیع بوزونی به صورت زیر است

$$\langle n(\mathcal{E}) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{(\mathcal{E}-\mu)}{kT}} - 1} \quad (1)$$

که در آن  $\mathcal{E}$  انرژی حالت تک ذره‌ای و  $\mu$  پتانسیل شیمیایی سامانه است. در آنسامبل کانونی بزرگ<sup>1</sup> با استفاده از تابع پارش، پتانسیل  $q$  و تعداد ذرات سامانه به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\frac{PV}{kT} \equiv q = \text{Ln}Z = - \sum_{\mathcal{E}} \text{Ln}(1 - ze^{-\beta\mathcal{E}}) \quad (2)$$

$$N \equiv \sum_{\mathcal{E}} \langle n(\mathcal{E}) \rangle = \sum_{\mathcal{E}} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\mathcal{E}} - 1} \quad (3)$$

که  $\beta = \frac{1}{kT}$  و  $Z \equiv \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)$  گریزندگی سامانه است.

هنگام محاسبه‌ی کمیات ترمودینامیکی گازها در حجم بالا، مرسوم است که مجموع روی حالت‌ها را به انتگرال تبدیل کرده و از چگالی حالت استفاده می‌کنند. این تعویض مجموع با انتگرال، تنها در صورتی که انرژی گرمایی  $kT$  خیلی بزرگتر از فاصله‌ی بین ترازهای انرژی تک ذره‌ای باشد درست است. یعنی

$kT \gg \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ . چگالی حالت‌هایی که انرژی‌شان بین  $\varepsilon$  و  $\varepsilon + d\varepsilon$  است را این‌طور می‌نویسیم

$$a(\varepsilon) d\varepsilon = \left(\frac{2\pi V}{h^3}\right) (2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon$$

با جایگذاری این عبارت در انتگرال وزن صفری را به تراز انرژی  $\varepsilon = 0$  نسبت می‌دهیم که درست نیست، زیرا از دید کوانتوم مکانیک به هر حالت تک ذره‌ای غیرتبهگن باید وزن آماری واحدی را نسبت داد، بنابراین سهم انرژی صفر از انتگرال بیرون خواهد آمد

$$\frac{P}{kT} = -\frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}} \text{Ln}(1 - ze^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon - \frac{1}{V} \text{Ln}(1 - z) \quad (4)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon} - 1} + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} \quad (5)$$

جملات  $\frac{1}{V} \text{Ln}(1 - z)$  و  $\frac{1}{V} \frac{z}{1 - z}$  در حد  $z \ll 1$  از مرتبه  $\frac{1}{N}$  هستند و می‌توان از آن‌ها صرف نظر کرد.

با نزدیک شدن  $z$  به عدد یک جمله‌ی  $\frac{1}{V} \frac{z}{1 - z}$  که برابر است با  $\frac{N_0}{V}$  تعداد ذراتی است که در

حالت پایه  $\varepsilon = 0$  قرار دارند) در مقایسه با  $\frac{N}{V}$  مهم می‌شود؛ یعنی سهم کثیری از ذرات در حالت پایه هستند

که این همان چگالش بوز-اینشتین است. با چنین تعریفی از  $N_0$ ، جمله‌ی دوم در معادله (5) به ازای همه‌ی

مقادیر  $z$  قابل چشم‌پوشی است.

در ادامه با تغییر متغیر  $\beta\varepsilon = \frac{p^2}{2mkT} = x$  و اعمال نتایج فوق در معادلات (4) و (5)، داریم

$$\frac{P}{kT} = -\frac{2\pi}{h^3} (2mkT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \text{Ln}(1 - ze^{-x}) dx = \frac{1}{\lambda^3} g_{\frac{3}{2}}(z) \quad (6)$$

$$\frac{N - N_0}{V} = \frac{2\pi}{h^3} (2mkT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{z^{-1}e^x - 1} = \frac{1}{\lambda^3} g_{\frac{5}{2}}(z) \quad (7)$$

$g_\nu(z)$  تابع بوز-اینشتین است که به صورت زیر تعریف می شود

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = z + \frac{z^2}{2^\nu} + \frac{z^3}{3^\nu} + \dots$$

### 1-1-1 دمای گذار و کسر چگاله

از رابطه‌ی به دست آمده برای تعداد کل ذرات سامانه، معادله‌ای برای  $N_e$  تعداد ذرات در حالت برانگیخته

( $\epsilon \neq 0$ ) استخراج می کنیم

$$N - N_0 = N_e = V \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} g_{\frac{3}{2}}(z) \quad (8)$$

در محدوده‌ی  $0 \leq z \leq 1$  بیشترین مقدار تابع بوز-اینشتین  $g_{\frac{3}{2}}(z)$  را با قرار دادن  $z = 1$  می توان بدست

آورد

$$g_{\frac{3}{2}}(1) = g_{\max} = 1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} + \dots \equiv \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \cong 2.612$$

که در آن  $\zeta$  تابع ریمان است. پس برای همه‌ی مقادیر  $z$  داریم:  $g_{\frac{3}{2}}(z) \leq \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$ . طبق رابطه (8) بیشترین

تعداد ذرات یا اتم‌هایی که می توانند در حالت برانگیخته قرار گیرند محدود می شوند به

$$N_e \leq \frac{V}{h^3} (2mkT)^{\frac{3}{2}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (9)$$

بنابر رابطه بالا اگر تعداد ذرات کل سامانه از این مقدار کمتر باشد، ذرات در حالت برانگیخته‌ی سامانه قرار

می گیرند و  $N_e \sim N$ .

حال اگر تعداد کل ذرات سامانه افزایش یابد حالت‌های برانگیخته می‌توانند تا مقدار ذکر شده در (9) را در خود جای دهند و بقیه ذرات در تراز  $\epsilon = 0$  قرار خواهند گرفت که همان پدیده چگالش بوز-اینشتین است و تعداد کل آن‌ها با رابطه زیر داده می‌شود

$$N_o = N - N_e = N - \frac{V}{h^3} (2mkT)^{\frac{3}{2}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (10)$$

در حالت کلی شرط آغاز چگالش بوز-اینشتین را می‌توان این گونه نوشت

$$N > VT^{\frac{3}{2}} \frac{(2\pi mk)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (11)$$

اکنون اگر تعداد ذرات و حجم سامانه ثابت بماند و  $T$  متغیر باشد داریم

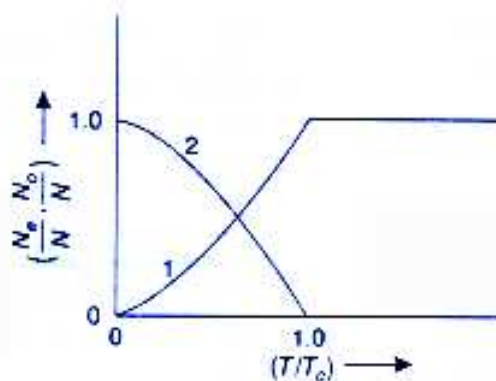
$$T < T_c = \frac{h^2}{2\pi mk} \left\{ \frac{N}{V \zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

$T_c$  دمای بحرانی سامانه است که به  $m$  و چگالی ذرات سامانه  $\left(\frac{N}{V}\right)$  بستگی دارد و در دماهای پایین تر از آن اتم‌ها

به حالت پایه ریزش می‌کنند و چگالش اتفاق می‌افتد. در حد  $T < T_c$  سامانه ترکیبی از دو فاز متفاوت است

1- فاز نرمال، شامل  $N_e \left\{ = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$  ذره که روی حالت‌های برانگیخته توزیع شده‌اند.

2- فاز چگاله: شامل  $N_o \{ = N - N_e \}$  ذره که در حالت پایه تجمع کرده‌اند.



شکل (1-1): نسبت تعداد اتم های فاز نرمال (1) و فاز چگاله (2) به تعداد کل اتم ها بر حسب پارامتر دما در

گاز بوزونی ایده آل [13 و 14]

شکل (1-1) نمودار مربوط به  $\frac{N_e}{N}$  و  $\frac{N_o}{N}$  را نشان می دهد. با توجه به شکل، در ناحیه  $\frac{T}{T_c} > 1$  یعنی در

دماهای بالاتر از دمای بحرانی فقط فاز نرمال وجود دارد. در این حالت تعداد ذرات در حالت پایه

یعنی  $\frac{z}{1-z}$  از مرتبه واحد است که به طور کلی در مقایسه با تعداد کل ذرات ناچیز است. رابطه ی زیر را

می توان برای نسبت تعداد اتم های حالت پایه به تعداد کل اتم ها نوشت

$$\frac{N_o}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$$

همان طور که از این رابطه پیداست هر چه دما از مقدار صفر به  $T_c$  نزدیک تر می شود تعداد ذرات در حالت

پایه یا همان ذرات چگاله کاهش می یابد.

## 1-2 پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه بعدی

در فضای فاز سه بعدی هر حالت انرژی حجم  $\hbar^3$  را اشغال می کند [13 و 14]. حال اگر کره ای به شعاع  $p$  را

در این فضا فرض کنیم و بخواهیم تمام ذراتی را که اندازه حرکت شان کمتر از  $p$  باشد را حساب کنیم باید

تمام حجم این کره را در نظر بگیریم تا بتوانیم  $G(\mathcal{E})$ ، تعداد کل حالت هایی که انرژی شان کمتر از  $\mathcal{E}$  است،

را به دست آوریم

$$G(\mathcal{E}) = \frac{V}{\hbar^3} \frac{4\pi}{3} p^3 = V \left(\frac{4\pi}{3}\right) \frac{(2m\mathcal{E})^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{\sqrt{2}(m\mathcal{E})^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \quad (13)$$

$$\mathcal{E} = p^2 / 2m$$



برای به دست آوردن  $g(\mathcal{E})$  چگالی حالت‌هایی که انرژی‌شان بین  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$  است، باید از  $G(\mathcal{E})$  نسبت به  $\mathcal{E}$

مشتق گرفت

$$g(\mathcal{E}) = \frac{dG(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \frac{m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \mathcal{E}^{1/2} \quad (14)$$

از این معادله می‌توان به رابطه‌ای برای چگالی حالت‌ها در  $d$  بعد به صورت  $g(\mathcal{E}) \propto (\mathcal{E}^{\frac{d}{2}-1})$  رسید که برای

ذرات محبوس در یک جعبه به حجم  $V$ ،  $d=3$  است.

حال فرض کنید این ذرات در یک پتانسیل هماهنگ سه بعدی به صورت زیر قرار داشته باشند

$$\begin{cases} V(r) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2) \\ V(r) = \frac{1}{2}m(\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2 + \omega_3 z^2) & \omega_i^2 = \frac{k_i}{m} \\ \mathcal{E}(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2})\hbar\omega_3 \end{cases} \quad (15)$$

$\mathcal{E}(n_1, n_2, n_3)$  انرژی حالات دسترس پذیر سیستم است.

باید تعداد حالت‌های انرژی را، که انرژی‌شان کمتر از  $\mathcal{E}$  باشد، حساب کنیم. ابتدا یک دستگاه مختصات

جدید را که دارای محوره‌های  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$  است و حالت‌ها به سطح انرژی  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$  محدودند

انتخاب می‌کنیم

$$\begin{cases} G(\mathcal{E}) = \frac{1}{\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \int_0^{\mathcal{E}} d\mathcal{E}_1 \int_0^{\mathcal{E}-\mathcal{E}_1} d\mathcal{E}_2 \int_0^{\mathcal{E}-\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2} d\mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_i = \hbar\omega_i n_i \end{cases} \Rightarrow G(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}^3}{6\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (16)$$

در محاسبه‌ی انتگرال بالا از صفر انرژی حالات صرف نظر شده است. هم‌چنین چون اختلاف هر دو تراز

انرژی روی محوره‌های تعریف شده  $\hbar\omega_i$  است پس فضایی که یک تراز در کل اشغال می‌کند

$(\hbar\omega_1)(\hbar\omega_2)(\hbar\omega_3)$  است. از مشتق رابطه (16) نسبت به  $\mathcal{E}$  می‌توان چگالی حالت‌های انرژی را برای این

نوسانگر سه بعدی به صورت زیر پیدا کرد

$$g(\varepsilon) = \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (17)$$

رابطه‌ی (17) را برای یک نوسانگر هماهنگ  $d$  بعدی تعمیم می‌دهیم و معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{d-1}}{(d-1)! \prod_{i=1}^d \hbar \omega_i} \quad (18)$$

در حالت کلی می‌توان چگالی حالت سامانه‌های مختلف را به صورت  $g(\varepsilon) = c_\alpha \varepsilon^{(\alpha-1)}$  نوشت که در گاز محبوس در حجم  $V$ ،  $\alpha = 3/2$  و برای نوسانگر سه بعدی  $\alpha = 3$  است.

### 1-2-1 دمای گذار و سهم چگالش

اگر  $N$  تعداد ذرات کل سامانه به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد می‌توان در انرژی کل نوسانگر هماهنگ از صفر انرژی چشم‌پوشی کرد و آن را به شکل  $\varepsilon_i = n_i \hbar \omega_i$  در نظر گرفت. تعداد کل ذرات در حالت‌های برانگیخته  $N_{ex}$  با استفاده از توزیع ذرات  $f(\varepsilon)$  و چگالی حالت‌های انرژی  $g(\varepsilon)$  به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$N_{ex} = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) \quad (19)$$

$N$  وقتی بیشینه می‌شود که  $\mu = 0$  باشد، دمای مربوط به حالت همان دمای گذار است که در بالا ذکر شد و به صورت زیر می‌توان آن را بدست آورد

$$\left\{ \begin{array}{l} N = N_{ex}(T_c, \mu = 0) = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{e^{\varepsilon/kT_c} - 1}, \quad g(\varepsilon) = c_\alpha \varepsilon^{\alpha-1} \\ N = C_\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{e^{\varepsilon/kT_c} - 1} = C_\alpha (kT_c)^\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} \\ x = \frac{\varepsilon}{kT_c} \end{array} \right. \quad (20)$$

با تعریف توابع گاما و زیمان می توان به تعداد ذرات در دمای گذار و در نتیجه به دمای گذار بر حسب این

تعداد ذرات دست یافت

$$\left\{ \begin{array}{l} N = c_{\alpha} \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (kT_c)^{\alpha} \Rightarrow kT_c = \frac{N^{\frac{1}{\alpha}}}{[c_{\alpha} \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)]^{1/\alpha}} \\ \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} dx x^{\alpha-1} e^{-x} \quad , \quad \zeta(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-\alpha} \end{array} \right. \quad (21)$$

با قرار دادن  $\alpha = 3$  دمای گذار را برای سامانه نوسانگر هماهنگ سه بعدی به دست می آوریم

$$\left\{ \begin{array}{l} kT_c = \frac{\hbar \bar{\omega} N^{1/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}} \approx 0.94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3} \quad , \quad \alpha = 3 \\ \bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3} \quad , \quad \Gamma(3) = 3\Gamma(2) = 3 \times 1 = 3 \end{array} \right. \quad (22)$$

$\bar{\omega}$  چگالی فضای فاز نامیده می شود که برابر است با مقدار ذراتی که در حجم یک مکعب که طول اضلاع

آن برابر با طول موج گرمایی  $\lambda_T$  است قرار دارند

$$\lambda_T^3 = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \Rightarrow \bar{\omega} = n \times \lambda_T^3 = n \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2}$$

نسبت چگاله برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی را نیز به دست می آوریم

(23)

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{ex}(T) = c_{\alpha} \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1} = c_{\alpha} \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (kT)^{\alpha} \\ N_{ex} = V \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\alpha} \quad \quad \quad N_0 = N - N_{ex}(T) = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\alpha} \right] \\ kT_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[c_{\alpha} \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)]^{1/\alpha}} \\ N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \right] \quad \quad \quad \alpha = 3 \end{array} \right.$$

3-1 چگالی بوز - اینشتین در پتانسیل توانی

در این بخش دمای بحرانی برای چگالش، کسر چگاله و ظرفیت گرمایی ذرات بوزونی مقید در پتانسیل توانی را به دست می آوریم و نشان می دهیم که نتایج قسمت قبل برای کسر چگاله و دمای گذار حالت خاصی از این نتایج کلی ترند [15 و 16]. در پتانسیل هایی که در اینجا در نظر می گیریم فاصله ی ترازهای انرژی به گونه ای است که  $K_B T \gg \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$ . حجم بین سطوح انرژی  $\epsilon$  و  $\epsilon + d\epsilon$  در فضای فاز متناسب با تعداد حالت ها در این بازه است که با پتانسیل خارجی  $V(\vec{r})$ ، فضای قابل دسترس سامانه را مشخص می کند. پس چگالی حالت ها را می توان نوشت

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3} \int_{v^*} \sqrt{\epsilon - V(\vec{r})} d^3\vec{r} \quad (24)$$

که  $v^*$  فضای قابل دسترس برای ذرات با انرژی  $\epsilon$  است. با تبدیل جمع به انتگرال در معادله ی  $N = \sum_n f(\epsilon_n) = \sum_n \frac{1}{e^{(\epsilon_n - \mu)/k_B T} - 1}$ ، که تعداد کل ذرات را می دهد، رابطه ی بین تعداد ذرات و  $\mu$  به دست می آید

$$N = N_0 + \int_0^\infty g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad (25)$$

و انرژی کل سامانه با انتگرال زیر داده می شود

$$E(T) = \int_0^\infty \epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad (26)$$

با استفاده از رابطه ی انرژی، ظرفیت گرمایی ویژه  $C(T) = \frac{\partial E(T)}{\partial T}$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$C(T) = \frac{1}{K_B T} \int_0^\infty g(\epsilon) (f(\epsilon))^2 \left[ \mu'' + \frac{\epsilon - \mu}{T} \right] e^{(\epsilon - \mu)/K_B T} d\epsilon. \quad (27)$$

برای محاسبه ی  $C(T)$  و  $E(T)$  به عبارت صریحی از پتانسیل شیمیایی نیاز داریم.

پتانسیل توانی کلی زیر را با قدرت  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  و طول های مشخصه  $a, b, c$  در نظر بگیرید [15 و 16]،