شرایط روی ضرایب برای ستاره‌گونی توابع تحلیلی و کاربردهای آنها

معصومه سلیمانی فر

دانشگاه ارومیه
مرکز آموزش‌های نیمه حضوری
گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر سعید شمس

تابستان ۱۳۸۹

تقدیر و تشکر

خداوندا، مرا ذهنی ببخش که بی گناه، پاک و رها از بدیها باشد، ذهنی که توکل کند، تردید نورزد، داوری نکند، ذهنی که تو را در همه ببیند و همه را در تو.

مراتب سپاس صمیمانه خود را از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر سعید شمس دارم که در تمام مراحل این پایان‌نامه همواره مشوق و پشتیبان برایم بوده و با رهنمودهای ارزنده خود راهنمای اینجانب بوده‌اند.

از جناب آقای دکتراستاد باشی و جناب آقای دکتر آقالاری که زحمت خواندن و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند تشکر می‌کنم.

در پایان از پدر و مادر مهربانم که اسوه ای از صبر و شکیبایی و تجسمی از لطف و مهربانی هستند، کمال تشکر را دارم.

فهرست مندرجات

چکیده

با استفاده از ضرایب بسط توابع تحلیلی در مبدأ، آزمون هایی برای ستاره‌گونی تعیین می شوند و آنها را در جهت ستاره‌گونی تابع فوق هندسی گاوس بکاربرده و نتایج قبلی را بهبود می بخشیم و نتایج حاصله را در مورد رده خاصی از توابع تحلیلی بکار خواهیم برد.

مقدمه

در این پایان‌نامه معیارهایی برای ستاره‌گونی توابع تحلیلی و کاربردهای آن در زیر مجموعه‌های خاصی از توابع تک‌ارز، مورد بررسی قرار می گیرد که براساس مقاله‌ی:

I. R. Nezhmetdinov and S.Ponnusamy , *New coefficient conditions for the starlikeness* of analytic function and their applications , Houston Journal of Mathematics Volume 31, 2,(2005), 587-604.

به رشته‌ی تحریر درآمده است. و مشتمل بر سه فصل زیر است:

فصل اول در سه بخش ارائه شده است که در بخش اول به تعاریف و قضایایی که در فصول بعدی به آن نیاز خواهیم داشت، پرداخته‌ایم. در بخش دوم توابع تک ارز، محدب و ستاره‌گون را معرفی کرده و برخی از خواص اساسی آنها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در بخش سوم مفهوم پیروی دیفرانسیلی و خواص آن را بیان کرده‌ایم.

مباحث اصلی در فصل دوم و سوم گنجانده شده است.

فصل دوم شرایطی برای ضرایب ستاره‌گونی توابع تحلیلی بیان شده است.

فصل سوم در دو بخش تدوین شده است در بخش اول کاربرد معیار ستاره‌گونی را برای تابع فوق هندسی بیان می کنیم و در بخش دوم کاربرد این معیارهارا برای تابع فوق هندسی فرد مطرح شده است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل، تعاریف مقدماتی و قضیه‌های مورد نیاز از مباحث آنالیز مختلط ذکر می شود.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم Ω یک مجموعه باز و $f : \Omega \to \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. گوییم f در نقطه $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر است هرگاه

$$\lim_{z \longrightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

موجود باشد و آن را با $f'(z_\circ)$ نشان می‌دهیم. هرگاه f در هر نقطه $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر باشد، می‌گوییم f در Ω **تحلیلی**[۱] است.

تبصره ۲.۱.۱ قرص واحد را در صفحه اعداد مختلط بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$D = \{z : \ z \in \mathbb{C}, \ |z| < ۱\}$$

[۱] Analytic

تعریف ۳.۱.۱ (**نگاشت همدیس**[۲]) نگاشت پیوسته‌ای که اندازه زاویه بین خمهای مار بر یک نقطه‌ی مفروض z_0 را حفظ نماید، حافظ زاویه در z_0 گوییم، اگر $f(z)$ در z_0 حافظ زاویه باشد و بعلاوه جهت زوایای بین خمهای مار بر نقطه‌ی z_0 را نیز حفظ نماید، می‌گوییم $f(z)$ در z_0 همدیس است.

قضیه ۴.۱.۱ هرگاه $f: G \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد، آنگاه f در هر نقطه‌ی $z_0 \in G$ که $f'(z_0) \neq 0$ باشد، همدیس است.

برهان: به مرجع [۵] مراجعه کنید. ■

مثال ۵.۱.۱ نگاشت $f(z) = z^2$ در هر نقطه‌ی $z_0 \neq 0$ همدیس است زیرا مشتق آن یعنی $f'(z) = 2z$ در z_0، مخالف صفر است. اما $f(z) = z^2$ در نقطه‌ی $z = 0$، که f' صفر می شود، همدیس نیست. زیرا در واقع

$$arg f(z) = arg z^2 = 2 arg z \ .$$

این نگاشت هر زاویه به رأس مبدأ مختصات را دو برابر می کند.

تبصره ۶.۱.۱ مجموعه توابع تحلیلی بر D را با $H(D)$ نمایش داده و قرار می دهیم :

[۲] Conformal map

$$A = \{f \in H(D) : f(0) = f'(0) - 1 = 0\} = \{f \in H(D) : f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k\}.$$

که نشان دهنده‌ی مجموعه توابع تحلیلی نرمالیزه بر گوی واحد D می باشد.

تعریف ۷.۱.۱ تابع تعریف شده مانند f در Ω بوسیله سری توانی قابل نمایش است هرگاه برای هر قرص $D(a,r) \subset \Omega$ یک سری مانند $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به‌ازای هر $z \in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

تذکر ۸.۱.۱ هرگاه f بوسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد، آنگاه $f \in H(\Omega)$ است و f' نیز با سری توانی در Ω قابل نمایش است، در واقع به ازای هر $z \in D(a,r)$ اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ آن‌گاه به ازای این z ها داریم

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$$

قضیه ۹.۱.۱ (**قضیه مدول ماکزیمم**[۳]) فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده و $f \in H(\Omega)$ و $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ دراین صورت

$$|f(a)| \leqslant Max|f(a+re^{i\theta})|, \qquad -\pi < \theta \leqslant \pi$$

تساوی در بالا برقرار است اگروفقط‌اگر f در Ω ثابت باشد. در نتیجه $|f|$ در هیچ نقطه از Ω ماکزیمم موضعی ندارد مگر f ثابت باشد.

برهان: به مرجع [۵] مراجعه شود. ■

[۳] Maximum modulus'Theorem

قضیه ۱۰.۱.۱ **(لم شوارتز)**[۴] فرض کنیم $\| f \|_\infty \leq 1, f \in H^\infty$ و $f(0) = 0$. در این صورت داریم:

$$| f(z) | \leq | z |, \quad z \in D$$

و

$$| f'(0) | \leq 1$$

به ازای یک $z \in D - \{0\}$ تساوی در $| f(z) | \leq | z |$ برقرار باشد یا در $| f'(0) | \leq 1$ تساوی برقرار است بطوریکه که $f(z) = \lambda z$ که در آن λ ثابت است، $| \lambda | = 1$.

برهان: به مرجع [۵] مراجعه شود. ■

۲.۱ توابع تک ارز، ستاره‌گون، محدب و محدب وار

تعریف ۱.۲.۱ کلاس توابع تحلیلی

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \ , \qquad a_1 = 1 \tag{1.1}$$

که در شرایط نرمالیزه $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ در دیسک واحد $D = \{z \ : \ z \in \mathbb{C} \ , \ |z| < 1\}$ صدق می کنند را با A نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۲.۱ تابع $f(z)$ را روی D **تک ارز**[۵] گوییم هر گاه برای هر z_1 و z_2 در D اگر $z_1 \neq z_2$ داشته باشیم $f(z_1) \neq f(z_2)$.

---

[۴] Schwarz Lemma

[۵] Univalent

تعریف ۳.۲.۱ تابع $f(z)$ را در نقطه $z_{\circ} \in \Omega$ موضعاً **تک ارز**[6] گوییم، هر گاه در یک همسایگی $z_{\circ}$ تک ارز باشد.

مثال ۴.۲.۱ تابع $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در D تحلیلی و تک ارز است. این تابع اهمیت خاصی در نظریه توابع تحلیلی دارد و به **تابع کوبه**[7] معروف است.

تعریف ۵.۲.۱ مجموعه تمام توابع تحلیلی و تک ارز f که در دیسک واحد $D = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ تعریف شده و در شرایط نرمالیزه $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = 1$ صدق می کنند را با S (برگرفته از کلمه آلمانی *Schlicht*) نمایش می‌دهیم.

واضح است که هر $f \in S$ دارای بسط تیلور به فرم زیر می باشد:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad |z| < 1)$$

توابع محدب و ستاره‌گون و محدب وار

تعریف ۶.۲.۱ دامنه‌ی $\Omega \subset \mathbb{C}$ را نسبت به $z_{\circ}$ **ستاره‌گون**[8] گوییم، هرگاه هر پاره خطی که نقاط Ω را به $z_{\circ}$ وصل می‌کند، دقیقاً داخل Ω قرار گیرد.

تعریف ۷.۲.۱ تابع ستاره‌گون نگاشت همدیسی است که دیسک واحد را به مجموعه ستاره‌گونی نسبت به مبدا می‌برد. در واقع تابع تک ارز $f \in H(D)$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون می‌نامیم، هر گاه

[6] Locally Univalent
[7] Koebe Function
[8] Starlike

$f(D)$ نسبت به مبدا ستاره‌گون باشد.

مجموعه تمام توابع ستاره‌گون نسبت به مبدا در S را با S^* نمایش می‌دهیم.

مثال ۸.۲.۱ تابع کوبه $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ یک تابع ستاره گون است.

برای اثبات، ملاحظه می شود که نگاره‌ی $|z|<1$ تحت تابع $k(z)$، صفحه‌ی W است که در امتداد پرتو $-\frac{1}{4}$ تا $-\infty$ بریده شده است، بنابراین تصویر قرص واحد تحت این نگاشت ناحیه‌ای ستاره‌گون است.

تبصره ۹.۲.۱ قرار دهید:

$$P=\{\varphi\in H(D):\quad Re\varphi>0,\quad \varphi(0)=1\}.$$

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنید f تابعی تحلیلی در D و داشته باشیم $f(0)=f'(0)-1=0$. در این صورت $f\in S^*$ اگروتنهااگر

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\in P.$$

برهان: به مرجع [۶] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۱.۲.۱ دامنه‌ی $D\subseteq\mathbb{C}$ را **محدب** [۹] گوییم، هرگاه D نسبت به هر نقطه‌اش ستاره‌گون باشد. به‌عبارت دیگر، پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند، تماماً داخل D قرار گیرد.

[۹] Convex

تعریف ۱۲.۲.۱ تابع محدب نگاشت همدیسی است که دیسک واحد را به یک مجموعه محدب می‌برد. فرض کنیم $f \in H(D)$ تک ارز باشد، می‌گوییم f بر D محدب است هرگاه $f(D)$ محدب باشد. مجموعه تمامی توابع محدب بر D را با K نمایش می‌دهیم، بوضوح

$$K \subset S^* \subset S \subset A.$$

مثال ۱۳.۲.۱ تابع‌کوبه $(z \in D)$ $\quad f(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + \sum_{n=۲}^{\infty} nz^n$ قرص $|z| < ۱$ را بر میدان ستاره‌گونی می‌نگارد که محدب نیست.(نگاره شامل $-\frac{۱}{۴} - i$ و $-\frac{۱}{۴} + i$ هست ولی شامل نقطه‌ی $-\frac{۱}{۴}$ نیست.)

قضیه ۱۴.۲.۱ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و تک ارز در D باشد که $f(۰) = f'(۰) - ۱ = ۰$. در اینصورت $f \in K$ اگروتنهااگر

$$Re\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\} > ۰ \qquad (z \in D).$$

برهان: به مرجع [۵] مراجعه گردد. ■

قضیه ۱۵.۲.۱ (**قضیه‌ی الکساندر**[۱۰]) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد که $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در اینصورت $f \in K$ اگروتنهااگر $zf'(z) \in S^*$.

برهان: قرار دهید $g(z) = zf'(z)$، لذا داریم

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = ۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

[۱۰] Alexander's theorem

بنابراین بوضوح حکم برقرار است. ■

قضیه ۱۶.۲.۱ (**قضیه‌ی نوشیرو ـوارچوسکی**[11]) اگر f یک تابع تحلیلی در دامنه‌ی محدب Ω بوده و $Re\{f'(z)\} > ۰$، آنگاه f در Ω تک ارز است.

برهان: فرض کنیم $z_۱, z_۲ \in \Omega$ و $z_۱ \neq z_۲$ نشان می دهیم $f(z_۱) \neq f(z_۲)$. چون حوزه‌ی Ω محدب است پس به ازای هر $۰ \leq t \leq ۱$ داریم:

$$z = (۱ - t)z_۱ + tz_۲ = t(z_۲ - z_۱) + z_۱ \in \Omega,$$

پس

$$f(z_۲) - f(z_۱) = \int_{z_۱}^{z_۲} f'(z)dz = (z_۲ - z_۱) \int_۰^۱ f'((۱ - t)z_۱ + tz_۲)dt$$

بنابراین

$$\frac{f(z_۱) - f(z_۲)}{z_۱ - z_۲} = \int_۰^۱ f'((۱ - t)z_۱ + tz_۲)dt$$

در نتیجه

$$Re\{\frac{f(z_۱) - f(z_۲)}{z_۱ - z_۲}\} = \int_۰^۱ Re(f'((۱ - t)z_۱ + tz_۲))dt$$

و چون $Re\{f'(z)\} > ۰$ بنابراین $Re\{\frac{f(z_۱)-f(z_۲)}{z_۱-z_۲}\} > ۰$ لذا از آنجایی که $z_۲ \neq z_۱$ پس $f(z_۱) \neq f(z_۲)$(در غیر این‌صورت $Re\{\frac{f(z_۱)-f(z_۲)}{z_۱-z_۲}\} = ۰$). ■

تذکر ۱۷.۲.۱ قضیه‌ی نوشیرو — وارچوسکی نشان می‌دهد که کلاس توابع S(توابع تک ارز)، تشکیل یک فضای برداری نمی‌دهد. یعنی لازم نیست مجموع دو تابع در S، متعلق به S باشد. برای

[11] Noshiro -Warschawski's theorem

مثال مجموع دو تابع $f(z)=\frac{z}{1-z}$ و $g(z)=\frac{z}{1+iz}$ در نقطه‌ی $\frac{1}{2}(1+i)$ مشتق صفر دارد، لذا $f+g$ تک ارز نیست.

تذکر ۱۸.۲.۱ کلاس تمام توابع تک ارز ستاره‌گون از مرتبه α را بفرم زیر معرفی می کنیم:

$$S^*(\alpha)=\{f\in A:\quad Re(\frac{zf'(z)}{f(z)})>\alpha\}$$

و مجموعه تمام توابع تک ارز محدب از مرتبه α را بصورت زیر است:

$$K(\alpha)=\{f\in A:\quad Re(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})>\alpha\}.$$

تعریف ۱۹.۲.۱ تابع f را **محدب وار یا نزدیک به محدب**[۱۲] گوییم هرگاه $h\in K$ موجود باشد چنانکه

$$Re\frac{f'(z)}{h'(z)}>0$$

کلاس توابع محدب وار را با CC نمایش می دهیم.

از آن‌جایی‌که $h\in K$ اگروتنهااگر $zh'\in S^*$، حال اگر قرار دهیم $zh'=g(z)$ آنگاه $g\in S^*$ لذا رابطه‌ی فوق را به‌فرم

$$Re\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\}>0$$

می‌توانیم بنویسیم. بنابراین f را محدب وار گوییم هرگاه $g\in S^*$ موجود باشد چنانکه داشته باشیم:

$$Re\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\}>0$$

[۱۲] Close-to-convex

۳.۱ توابع γ—مارپیچ، فوق هندسی گاوس و قویاً ستاره‌گون

یک تعمیم سازی دیگر ستاره‌گونی وجود دارد که منجر به معیار مفیدی برای تک ارزی می شود. ما به رده‌ای از توابع فنرگون مراجعه می کنیم که در سال ۱۹۳۳ بوسیله سپاسک ($Spask$)معرفی شده است.

تعریف ۱.۳.۱ یک فنر لگاریتمی، یک منحنی در صفحه مختلط به صورت $w = w_\circ e^{-\lambda t}$ که $-\infty < t < \infty$ می باشد، $w_\circ$ و λ ثابتهای مختلط با شرط $w_\circ \neq \circ$ و $Re\{\lambda\} \neq \circ$ می باشد. در این صورت بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $\lambda = e^{i\alpha}$، $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$. این منحنی را $\alpha-$ فنر می نامیم.

تذکر ۲.۳.۱ $\circ-$ فنرها نیم خط های شعاعی می باشند، برای هر $|\alpha| < \frac{\pi}{۲}$، یک $\alpha-$ فنرگون یکتا وجود دارد بطوریکه نقطه $w_\circ \neq \circ$ را به مبدأ وصل می کند.

تعریف ۳.۳.۱ دامنهٔ $D \subseteq \mathbb{C}$ شامل مبدأ $\alpha-$ فنرگون گفته می شود، اگر به ازای هر نقطهٔ $w_\circ$ در D، کمان $\alpha-$ فنر از $w_\circ$ به مبدأ کاملاً در D قرار گیرد.

تعریف ۴.۳.۱ یک تابع تحلیلی و تک ارز در قرص واحد D با فرض $f(\circ) = \circ$ $\alpha-$ فنرگون گفته می شود، اگر برد آن $\alpha-$ فنرگون باشد. بنابراین چنین تابعی فنرگون نامیده میشود، اگر برای برخی $|\alpha| < \frac{\pi}{۲}$، $\alpha-$ فنر گون باشد.

قضیه ۵.۳.۱ با فرض تحلیلی بودن f در D، $f(\circ) = \circ$، $f'(\circ) \neq \circ$ و $f(z) \neq \circ$،

$\circ < |z| < ۱$ و $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ در اینصورت f، α– فنرگون می باشد، اگروتنهااگر

$$Re\{e^{-i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \circ \qquad z \in D.$$

برهان: به منبع [۱۰] مراجعه شود. ■

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنید $f \in A$ باشد و در شرط (۱.۱) صدق کند آنگاه رده‌ی کلاس توابع γ– فنرگون از مرتبه β را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$SP(\gamma,\beta) = \{f \in A : Re\ e^{i\gamma}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \beta) > \circ \quad , z \in D\}$$

که در آن $-\frac{\pi}{۲} < \gamma < \frac{\pi}{۲}$ و $\circ \leq \beta < ۱$.

تعریف ۷.۳.۱ تابع $f \in A$ را **قویاً ستاره‌گون**[۱۳] **از مرتبه α را به صورت زیر تعریف می کنیم**

$$STS(\alpha) = \{f \in A : |arg\frac{zf'(z)}{f(z)}| \leq \frac{\pi\alpha}{۲}, z \in D\}.$$

تعریف ۸.۳.۱ **(تابع گاما)** در تبعیت از وایرشتراس تابع گاما را به صورت

$$\frac{۱}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=۱}^{\infty}\left[\left(۱+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right] \quad (۱.۲)$$

[۱۳] Strongly starlike function

تعریف می‌کنیم، که در آن γ همان ثابت اویلر است.

طرف راست (۱.۲) برای تمام z های متناهی تحلیلی است و تنها صفرهای آن در $z=0$ (صفر ساده) و در هر عدد صحیح منفی است.

قضیه ۹.۳.۱ اگر $Re(z)>0$، آنگاه

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt\,.$$

برهان: به مرجع [۵] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۰.۳.۱ **(تابع بتا)**β تابع بتا $\beta(p,q)$ را با

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\,,\quad Re(p)>0\,,\ Re(q)>0$$

تعریف می‌کنیم. صورت دیگر این تابع که مفید است، با اختیار $t=\sin^2\varphi$ بدست می‌آید:

$$\beta(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\,d\varphi\,,\quad Re(p)>0\,,\ Re(q)>0$$

تابع بتا و تابع گاما بشکل زیر به هم مربوط‌اند.

قضیه ۱۱.۳.۱ اگر $Re(p)>0$ و $Re(q)>0$، آنگاه

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که

$$\beta(p,q)=\beta(q,p)\,.$$

برهان: به مرجع [۵] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۲.۳.۱ نماد پوچهامر[۱۴] یا تغییر فاکتوریل را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$(\lambda, 0) = 1 \quad , (1, n) = n! \quad , (\lambda, n) = \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

پس:

$$(a, n) = (a)_n = \prod_{k=1}^{n} (a+k-1) \ , \quad n \geq 1$$

تعریف ۱۳.۳.۱ فرض کنیمa وb وc اعداد مختلط و... $c \neq 0, -1, -2, ...$ باشند. تابع

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) := F(a, b; c; z) = 1+\frac{ab}{1!c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2+... \qquad (1.3)$$

تابع فوق هندسی گاوس[۱۵] نام دارد. که این تابع در D تحلیلی است.

تذکر ۱۴.۳.۱ با توجه به نماد پوچهامر رابطه‌ی (۱.۳) را به صورت زیر می نویسیم

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a, k)(b, k)}{(c, k)(1, k)} z^k \qquad (1.4)$$

به راحتی می توان دید که سری (۱.۳) برای z هایی که $|z| < 1$، بطور مطلق همگراست و برای $|z| > 1$ واگراست. همچنین برای z هایی که $|z| = 1$ بطور مطلق همگراست هر گاه $c > a + b$ ، و برای $z = -1$ سری همگراست هر گاه $c > a + b - 1$. پس تابع فوق هندسی در D تحلیلی است. با مشتق گیری از طرفین رابطه (۱.۴) داریم:

$$F'(a, b; c; z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(a, k)(b, k)}{(c, k)k!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a, k+1)(b, k+1)}{(c, k+1)k!} z^k.$$

[۱۴] Pochhammer Symbol

[۱۵] Gaussian hypergeometric function

اما چون $(a, k+۱) = a(a+۱, k)$. لذا داریم؛

$$F'(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+۱, b+۱; c+۱; z).$$

تذکر ۱۵.۳.۱ با استفاده از تابع فوق هندسی می توان برخی توابع در آنالیز مختلط را بر حسب تابع فوق هندسی بیان نمود ذیلاً چند مثال ذکر می گردد.

$$F(۱, p; p; z) = \frac{۱}{۱-z} \quad , \quad F(۱, ۱; ۲; z) = -\frac{\ln(۱-z)}{z}$$

$$F(۱, ۲; ۱; z) = \frac{۱}{(۱-z)^۲} \quad , \quad \lim_{b \longrightarrow \infty} F(۱, b; ۱; \tfrac{z}{b}) = e^z$$

$$F(-n, b; b; -z) = (۱+z)^n \quad , \quad zF(۱, ۱; ۲; -z) = \log(۱+z)$$

$$F(\tfrac{۱}{۲}, -\tfrac{۱}{۲}; \tfrac{۱}{۲}; \sin^۲ z) = \cos z \quad , \quad F(\tfrac{۱}{۲}, ۱; ۱; \sin^۲ z) = \sec z$$

$$F(\tfrac{۱}{۲}, \tfrac{۱}{۲}; \tfrac{۳}{۲}; z^۲) = \frac{\sin^{-۱} z}{z} \quad , \quad F(\tfrac{۱}{۲}, ۱; \tfrac{۳}{۲}; -z^۲) = \frac{\tan^{-۱} z}{z}$$

$$. \quad F(n, -n; \tfrac{۱}{۲}; \tfrac{۱-x}{۲}) = T_n(x)$$

قضیه ۱۶.۳.۱ اگر $|z| < ۱$ و اگر $Re(c) > ۰$ و $Re(b) > ۰$، آنگاه

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} . \int_۰^۱ t^{b-۱}(۱-t)^{c-b-۱}(۱-tz)^{-\alpha}\, dt$$

برهان: فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی باشد:

$$\frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} . \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}$$

اگر $Re\ b > ۰$ و $Re\ c > ۰$ بنابه قضیه‌ی ۱۱.۳.۱:

$$\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} = \mathcal{B}(b+n, c-b) = \int_۰^۱ t^{b+n-۱}(۱-t)^{c-b-۱}\, dt$$