چکیده

آزمون همگنی واریانس‌ها، فرض برابری واریانس‌های k جامعه ($k \geq ۲$) را در مقابل اینکه حداقل واریانس دو جامعه از آنها برابر نباشد، بررسی می‌کند. این آزمون یکی از آزمون‌های مهم و پرکاربرد در بیشتر حوزه‌های تحقیقاتی است. تاکنون آزمون‌های مختلفی توسط محققان برای این مسئله معرفی شده است. بسیاری از این آزمون‌ها در حالتی که توزیع داده‌ها نرمال نباشد و یا اندازه‌های نمونه کوچک و یا نابرابر باشد عملکرد خوبی از خود نشان نمی‌دهند. در این پایان نامه عملکرد نه آزمون بارتلت، بارتلت با اصلاح کشیدگی، شومیکر، ویلچ، برون و فورسیت، لون، الکساندر و گاورن، جیمز و آلام و کاهوی را با پنج روش برآورد مقادیر بحرانی، حذف صفرساختاری، برآورد مقادیر بحرانی با اعمال حذف صفرساختاری، خودگردان و خودگردان با اعمال حذف صفرساختاری در توزیع‌های چوله و متقارن با اندازه نمونه‌های مختلف مورد مقایسه قرار داده‌ایم. هدف مقایسه‌ی عملکرد روش‌های مختلف ذکر شده با روش‌های خودگردان و خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که این دو روش، عملکرد آزمون‌های مطرح شده را از نظر توان و نرخ خطای نوع اول به نحو چشم‌گیری بهبود می‌دهند. آزمون‌های الکساندر و گاورن، لون و برون و فورسیت دارای عملکرد خطای بهتری نسبت به سایر آزمون‌ها هستند. آزمون الکساندر و گاورن هنگامی که اندازه نمونه‌های بزرگ، متناظر با واریانس‌های بزرگ هستند در بین آزمون‌های استوار، پرتوان‌تر است.

کلمات کلیدی: *آزمون لون، آزمون بارتلت، همگنی واریانس‌ها، آزمون استوار، آزمون فرض خودگردان، برآورد مقادیر بحرانی، حذف صفر ساختاری، آزمون الکساندر و گاورن، آلام و کاهوی، جایگزین‌های ناهمگنی واریانس برای آزمون تحلیل واریانس F*

فهرست مطالب

فهرست مطالب الف

لیست تصاویر ت

لیست جداول ث

۱ مقدمه ۱

۱.۱ تاریخچه‌ی آزمون‌های همگنی واریانس‌ها ۲

۲ تعاریف و آزمون‌های مورد مطالعه ۷

۱.۲ آزمون‌های مبتنی‌بر تعدیل کشیدگی ۷

۱.۱.۲ آزمون بارتلت ۸

۲.۱.۲ آزمون بارتلت با اصلاح کشیدگی ۸

۳.۱.۲ آزمون شومیکر ۹

۲.۲ آزمون‌های مبتنی‌بر متغیرهای تبدیل یافته ۱۰

۱.۲.۲ آزمون لون ۱۰

۲.۲.۲ آزمون ویلچ ۱۱

۳.۲.۲ آزمون جیمز ۱۲

۴.۲.۲ آزمون برون و فورسیت ۱۴

۵.۲.۲ آزمون الکساندر و گاورن ۱۴

۳.۲ روش‌های بازنمونه گیری ۱۵

۱.۳.۲ الگوریتم روش خودگردان بوس و برون ۱۵

۲.۳.۲ آزمون آلام و کاهوی ۱۷
۴.۲ فرض همگنی واریانس‌ها براساس متغیرهای تبدیل‌یافته در طرح نامتعادل . ۲۱
۱.۴.۲ صفرهای ساختاری ۲۵
۵.۲ برآورد مقادیر بحرانی ۲۶

۳ مقایسه آزمون‌ها براساس مطالعات شبیه‌سازی ۲۸
۱.۳ طراحی شبیه‌سازی ۲۹
۲.۳ مقایسه‌ی نرخ خطای نوع اول ۳۳
۱.۲.۳ حالت سه گروهی ($k = ۳$) ۳۳
۱.۱.۲.۳ روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره . . ۳۳
۲.۱.۲.۳ روش حذف صفر ساختاری ۳۴
۳.۱.۲.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی ۳۵
۴.۱.۲.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی با اعمال حذف صفر ساختاری ۳۶
۵.۱.۲.۳ روش خودگردان ۳۷
۶.۱.۲.۳ روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۴۰
۲.۲.۳ حالت چهار گروهی ($k = ۴$) ۴۴
۱.۲.۲.۳ روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره . . ۴۴
۲.۲.۲.۳ روش حذف صفر ساختاری ۴۴
۳.۲.۲.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی ۴۵
۴.۲.۲.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی با اعمال حذف صفر ساختاری ۴۷
۵.۲.۲.۳ روش خودگردان ۴۸
۶.۲.۲.۳ روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۵۱
۳.۲.۳ حالت پنج گروهی ($k = ۵$) ۵۴
۱.۳.۲.۳ روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره . . ۵۴
۲.۳.۲.۳ روش حذف صفر ساختاری ۵۴
۳.۳.۲.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی ۵۵
۴.۳.۲.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی با اعمال حذف صفر ساختاری ۵۷
۵.۳.۲.۳ روش خودگردان ۵۸
۶.۳.۲.۳ روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۶۳

۳.۳ مقایسه‌ی توان آزمون‌ها ۶۹
۱.۳.۳ حالت سه گروهی ($k = ۳$) ۶۹
۱.۱.۳.۳ روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره . . ۶۹
۲.۱.۳.۳ روش حذف صفر ساختاری ۶۹
۳.۱.۳.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی ۷۰
۴.۱.۳.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی با اعمال حذف صفر ساختاری ۷۰
۵.۱.۳.۳ روش خودگردان ۷۱
۶.۱.۳.۳ روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۷۲
۲.۳.۳ حالت چهار گروهی ($k = ۴$) ۷۶
۱.۲.۳.۳ روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره . . ۷۶
۲.۲.۳.۳ روش حذف صفر ساختاری ۷۶
۳.۲.۳.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی ۷۶
۴.۲.۳.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی با اعمال حذف صفر ساختاری ۷۷
۵.۲.۳.۳ روش خودگردان ۷۷
۶.۲.۳.۳ روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۷۸
۳.۳.۳ حالت پنج گروهی ($k = ۵$) ۸۲
۱.۳.۳.۳ روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره . . ۸۲
۲.۳.۳.۳ روش حذف صفر ساختاری ۸۲
۳.۳.۳.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی ۸۲
۴.۳.۳.۳ روش برآورد مقادیر بحرانی با اعمال حذف صفر ساختاری ۸۳
۵.۳.۳.۳ روش خودگردان ۸۳
۶.۳.۳.۳ روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۸۷
۴.۳ مطالعه‌ی موردی ۹۳
۱.۴.۳ عملکرد خطای آزمون‌ها با روش‌های مختلف ۹۵
۲.۴.۳ عملکرد توان آزمون‌ها با روش‌های مختلف ۹۶
۳.۴.۳ نتیجه‌گیری نهایی ۹۹

مراجع ۱۰۱

لیست تصاویر

۱.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین نرخ خطا k=۳ . . . . ۴۳
۲.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین نرخ خطا k=۴ . . . . ۵۳
۳.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین نرخ خطا k=۵ . . . . ۶۸
۴.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین توان حالت اول k=۳ . . . . ۷۴
۵.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین توان حالت دوم k=۳ . . . . ۷۵
۶.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین توان حالت اول k=۴ . . . . ۸۰
۷.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین توان حالت دوم k=۴ . . . . ۸۱
۸.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین توان حالت اول k=۵ . . . . ۹۱
۹.۳ نمودار مقایسه‌ی میانگین توان حالت دوم k=۵ . . . . ۹۲
۱۰.۳ نمودار جعبه‌ای زمان تحمل موش‌ها ۹۵

لیست جداول

۱.۳ اندازه نمونه‌ها برای $k = ۳$ ۳۱
۲.۳ اندازه نمونه‌ها برای $k = ۵$ ۳۲
۳.۳ تعداد دفعات استواری برای روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره ۳۴
۴.۳ تعداد دفعات استواری برای روش حذف صفرساختاری ۳۴
۵.۳ تعداد دفعات استواری برای روش برآورد مقادیر بحرانی ۳۶
۶.۳ تعداد دفعات استواری روش برآورد مقادیر بحرانی با حذف صفرساختاری . ۳۷
۷.۳ تعداد دفعات استواری برای روش خودگردان ۳۹
۸.۳ برآورد خطای نوع اول $k = ۳$ روش خودگردان ۴۰
۹.۳ تعداد دفعات استواری برای روش خودگردان با اعمال حذف صفرساختاری ۴۱
۱۰.۳ برآورد خطای نوع اول $k = ۳$ روش خودگردان با حذف صفر ساختاری . . ۴۲
۱۱.۳ تعداد دفعات استواری برای روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره ۴۴
۱۲.۳ تعداد دفعات استواری برای روش حذف صفرساختاری ۴۵
۱۳.۳ تعداد دفعات استواری برای روش برآورد مقادیر بحرانی ۴۶
۱۴.۳ تعداد دفعات استواری روش برآورد مقادیر بحرانی با حذف صفرساختاری . ۴۸
۱۵.۳ تعداد دفعات استواری برای روش خودگردان ۵۰
۱۶.۳ برآورد خطای نوع اول $k = ۴$ روش خودگردان ۵۰
۱۷.۳ تعداد دفعات استواری برای روش خودگردان با اعمال حذف صفرساختاری ۵۱
۱۸.۳ برآورد خطای نوع اول $k = ۴$ روش خودگردان با حذف صفر ساختاری . . ۵۲
۱۹.۳ تعداد دفعات استواری برای روش ناحیه‌ی بحرانی براساس توزیع تقریبی آماره ۵۴
۲۰.۳ تعداد دفعات استواری برای روش حذف صفرساختاری ۵۵

۲۱.۳ تعداد دفعات استواری برای روش برآورد مقادیر بحرانی ۵۶
۲۲.۳ تعداد دفعات استواری روش برآورد مقادیر بحرانی با حذف صفرساختاری . ۵۸
۲۳.۳ تعداد دفعات استواری برای روش خودگردان ۶۰
۲۴.۳ برآورد خطای نوع اول $k = ۵$ روش خودگردان ۶۱
۲۵.۳ تعداد دفعات استواری برای روش خودگردان با اعمال حذف صفرساختاری ۶۴
۲۶.۳ برآورد خطای نوع اول $k = ۵$ روش خودگردان با حذف صفر ساختاری . . ۶۵
۲۷.۳ برآوردتوان $k = ۳$ با روش خودگردان ۷۲
۲۸.۳ برآوردتوان $k = ۳$ با روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۷۳
۲۹.۳ برآورد توان $k = ۴$ با روش خودگردان ۷۸
۳۰.۳ برآورد توان $k = ۴$ با روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۷۹
۳۱.۳ برآورد توان $k = ۵$ با روش خودگردان ۸۵
۳۲.۳ برآورد توان $k = ۵$ روش خودگردان با اعمال حذف صفر ساختاری . . . ۸۸
۳۳.۳ نتایج داده‌های مربوط به بررسی تأثیر مورفین بر زمان تحمل موش‌ها . . . ۹۴

فصل ۱

مقدمه

آزمون همگنی واریانس‌ها، فرض برابری واریانس‌های k جامعه $(k \geq ۲)$ را در مقابل اینکه حداقل واریانس دو جامعه از آنها برابر نباشد بررسی می‌کند. آزمون همگنی واریانس‌ها اغلب به عنوان یک آزمون مقدماتی برای تحلیل‌های دیگر مثل تحلیل واریانس یا ادغام داده‌ها از منابع مختلف برای بدست آوردن برآورد بهبود یافته‌ای از واریانس، مورد علاقه هستند.

به طور مثال از سال ۱۹۵۴ دولت ایالات متحده مزایده‌هایی را برگزار می‌کند که در آنها اجاره‌ی قسمت‌های ساحلی به بالاترین پیشنهاد برای تولید نفت و گاز ارائه می‌شود. پایگاه داده شامل خلاصه‌ی پیشنهادات و اطلاعات سالانه در هر اجاره‌نامه است. غالباً توزیع لگاریتم نرمال برای مدل‌سازی این پیشنهادات مورد استفاده قرار می‌گیرد. با فرض اینکه واریانس لگاریتم پیشنهادات در هر اجاره‌نامه‌یی از مزایده ثابت باشد، پارامتر مقیاس توزیع لگاریتم نرمال را می‌توان با استفاده از تمام پیشنهادات مزایده برآورد کرد (*کانوور*[۱] *و همکاران* [۱۶]).

همچنین، آزمون همگنی واریانس‌ها به خودی خود در بسیاری از حوزه‌های تحقیقاتی مورد علاقه است. افزایش یکنواختی یک هدف مهم در کنترل کیفیت فرایندهای تولید، سیستم‌های تولید محصولات کشاورزی و در توسعه‌ی روش‌های آموزشی و زیست‌شناسی است. زیست‌شناسان به تفاوت‌های موجود در تنوع جامعه به دلایل بسیاری، مثل تنوع شاخص ژنتیکی و در مطالعه‌ی مکانیسم‌های تطبیقی علاقه‌مند هستند
(*گستویرت*[۲] *و همکاران* [۲۱]). اهمیت آزمون همگنی واریانس‌ها باعث شده است که این

[۱] Conover
[۲] Gastwirth

امر در بسیاری از نرم‌افزارهای آماری گنجانده شود.

۱.۱ تاریخچه‌ی آزمون‌های همگنی واریانس‌ها

نخستین آزمون براساس آزمون نسبت درستنمایی توسط *نیمن و پیرسون*[۳] [۳۹] تحت فرض نرمال بودن معرفی شد. *بارتلت*[۴] [۴] این آزمون را با تصحیح اریبی اصلاح کرد. اگرچه این آزمون رایج‌ترین آزمون برابری واریانس‌ها است، ولی نسبت به انحراف از فرض نرمال بودن حساس است و آزمون استواری [۵] نیست.

کوکران[۶] [۱۵] آزمونی را مطرح کرد که در مقایسه‌ی با آزمون‌های آن زمان محاسبات ساده‌تری داشت، با این‌حال با کامپیوترهای امروزی تفاوت در زمان محاسبه بسیار اندک است.

کندال[۷] *و بارتلت* [۵] نیز تلاش‌هایی برای ساده کردن محاسبات انجام دادند. آزمون آن‌ها متکی به این حقیقت بود که $\ln s^{۲}$ تقریباً نرمال است و برای دامنه‌ی نرمال شده در نمونه‌هایی نرمال، از جدول‌هایی استفاده می‌کند. $s^{۲}$ واریانس نمونه‌ای را نشان می‌دهد.

هارتلی[۸] [۲۳] آزمونی معروف به $F - max$ را ارائه کرد که این آزمون تنها یک تبدیل نمایی از آزمون کندال و بارتلت است. مزیت این آزمون جدول‌های دقیق قابل دسترسی برای اندازه نمونه‌های برابر است.

باکس[۹] [۸] نشان داد که توزیع مجانبی آزمون بارتلت به کشیدگی توزیع‌های نمونه‌ای بستگی دارد. با تقسیم آماره‌ی بارتلت به $(۱ + \gamma/۲)$ که در آن $\gamma = \frac{E(Y_{ij}-\mu_i)^{۴}}{\sigma_i^{۴}} - ۳$ است Y_{ij}ها نمونه‌های تصادفی با اندازه‌ی n_i از جوامعی با میانگین μ_i و واریانس $\sigma_i^{۲}$ هستند. آزمون به طور مجانبی آزاد توزیع می شود به شرطی که گشتاور چهارم متناهی داشته باشد.

یک روش جالب برای بدست آوردن آزمون‌های استوارتر برای واریانس، شامل استفاده از آماره‌ی F تحلیل واریانس یک‌طرفه است، که به طور آشکار استوار است. مفهومی که توسط *کندال و بارتلت* پیشنهاد شد، به وسیله‌ی *باکس* به آزمونی تحت عنوان آزمون $log - anova$ توسعه داده شد. این آزمون به‌طور خلاصه به صورت زیر است. برای عدد صحیح اختیاری $m \geq ۲$،

---

[۳] Neyman and Pearson

[۴] Bartlett

[۵] Robust

[۶] Cochran

[۷] Kendall

[۸] Hartley

[۹] Box

هر نمونه به طور تصادفی به زیر نمونه‌هایی با اندازه‌ی m تقسیم می‌شود. مشاهدات باقیمانده یا استفاده نمی‌شوند و یا در زیر نمونه‌های آخری قرار می‌گیرند. واریانس نمونه‌ای s_{ij} برای هر زیر نمونه محاسبه می‌شود. تبدیل لگاریتمی $Y_{ij} = \ln s_{ij}$ برای $j = ۱, \ldots, [\frac{n_i}{m}]$؛ $i = ۱, \ldots, k$ متغیرها را به نرمال نزدیک می‌سازد. حال از آماره‌ی

$$F(Y_{ij}) = \frac{\frac{\sum_i n_i(\bar{Y_i} - \bar{Y})^۲}{(k-۱)}}{\frac{\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y_i})^۲}{(N-k)}}$$

به عنوان آماره ی آزمون استفاده می شود. توجه کنید که $F(Y_{ij})$ آماره‌ی F تحلیل واریانس یک‌طرفه برای مشاهدات Y_{ij} است. مطالعات بعدی توسط *لوی*[۱۰] [۳۰]، *لایارد*[۱۱] [۲۸] و *گرتساید*[۱۲] [۲۰] استوار بودن این روش را تایید کردند. اما آنها نشان دادند که توان آن در مقایسه با آزمون‌های دیگر که به اندازه‌ی آن استوار هستند، کمتر است.

یک تبدیل دیگر که منجرمی‌شود مشاهدات به نرمال نزدیکتر شود، به *گرتساید* [۲۰] نسبت داده شده است. این تبدیل از $w_{ij} = w_i(\ln s_{ij} + c_i)$ استفاده می‌کند که در آن w_i و c_i ثابت‌های نرمال کننده هستند. با این حال در روش تصادفی تقسیم نمونه به دلیل اینکه از همه‌ی مشاهدات استفاده نمی‌کنیم این فرایندها در عمل جذاب و جالب توجه نیستند.

آزمون لون[۱۳] [۲۹] تحلیل واریانس آزمون F روی $Z_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y_i}|$ است. که Y_{ij}ها نمونه‌های تصادفی با اندازه‌ی n_i از جوامعی با میانگین μ_i و واریانس $\sigma_i^۲$ هستند. به علاوه استفاده از متغیرهای دیگری مانند $Z_{ij}^{\frac{۱}{۲}}$، $\ln Z_{ij}$ و $Z_{ij}^۲$ نیز به وسیله‌ی *لون* پیشنهاد شده است. یک آزمون که معمولاً از نظر توان و استواری در حالت غیر نرمال مناسب است آزمون لون با استفاده از میانه‌ی نمونه‌ایی به عنوان یک برآورد پارامتر مکان است.

شارما و کیبریا[۱۴] [۴۷] نیز به بررسی آزمون‌های مختلف از لحاظ استواری و توان پرداخته‌اند. آنها متغیرهای $Z_{ij}^{\frac{۱}{۲}}$، Z_{ij} و $Z_{ij}^۲$ را با استفاده از میانگین، میانه و میانگین پیراسته‌ی ۱۰/۰ مورد بررسی قرار داده‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که در آزمون لون استفاده از میانه نتیجه‌ی بهتری ارائه می‌دهد.

[۱۰] Levy
[۱۱] Layard
[۱۲] Gartside
[۱۳] Levene
[۱۴] Sharma and Kibria

اولین آزمون ناپارامتری برای مسئله‌ی برابری واریانس‌ها به وسیله‌ی مود[15] [۳۷] معرفی شده است. این آزمون، مانند همه‌ی آزمون‌های ناپارامتری توزیع‌های یکسانی را تحت فرض صفر در نظر می‌گیرد. به ویژه لازم است که میانگین‌ها برابر باشند و یا تبدیلی به کار رود که به میانگین‌های برابر برسیم که در عمل اغلب میسر نمی‌شود.

برای اولین بار *بوس و براون*[16] [۶] نسخه‌ی خودگردان [17] آزمون‌ها را مطرح کردند. پس از ایشان *لیم و لوح*[18] [۳۱] با پیروی از الگوریتم مطرح شده توسط *بوس و برون* نسخه‌ی خودگردان تعدادی از آزمون‌ها را برای مسئله‌ی آزمون همگنی واریانس‌ها مورد بررسی قرار دادند.

متون آماری قابل توجهی در مورد آزمون همگنی واریانس‌ها وجود دارد که عملکرد آزمون‌های مختلفی که پیشنهاد شده‌اند، را بررسی می‌کنند. آزمون‌های بسیار زیادی به منظور تعیین استواری آنها در سطوح معنی‌داری اسمی، بررسی و شبیه‌سازی شده‌اند. مطالعات قبلی *برون و فورسیت*[19] [۱۲]، *کانوور و همکاران* [۱۶]، جینگ[20] *و همکاران* [۲۲]، *کسلمن*[21] *و همکاران* [۲۶]، *شارما* [۴۸]، *ماروزی*[22] [۳۴]، [۳۵]، *زیمرمن*[23] [۵۱]، و *پالمن*[24] *و همکاران* [۴۲] همگی نشان می‌دهند که آزمونی که به طور یکنواخت برای همه‌ی توزیع‌ها و ترکیبات اندازه نمونه‌ها بهترین باشد وجود ندارد. در تلاش جهت دستیابی به آزمون‌های استوار نسبت به فرض غیر نرمال بودن سه رهیافت ارائه شده است (*بوس و برون* [۷]):

۱. تعدیل آزمون‌های موجود براساس توزیع نرمال با استفاده از برآوردگری از کشیدگی [۴۹]، [۱۰]،

۲. انجام تحلیل واریانس روی متغیرهای تبدیل یافته مانند قدرمطلق انحراف از میانگین و میانه[۲۹]، [۱۲]،

۳. روش‌های بازنمونه‌گیری [۶]، [۱۰].

---

[15] Mood
[16] Boos and Bronwine
[17] Bootstrap
[18] Lim and Loh
[19] Brown and Forsythe
[20] Geng
[21] Keselman
[22] Marozzi
[23] Zimmerman
[24] Pallmann

در این پایان نامه قصد داریم که با استفاده از مطالعه‌ی شبیه‌سازی شده به بررسی عملکرد آزمون‌های مختلف موجود براساس هر کدام از سه رهیافت مذکور بپردازیم. در روش اول آزمون‌های بارتلت اصلاح شده و شومیکر را مطالعه می‌کنیم. رایج‌ترین و شناخته‌شده‌ترین آزمون در روش دوم آزمون لون است. این آزمون به صورت ساده انجام آزمون تحلیل واریانس یک‌طرفه روی متغیرهای قدرمطلق انحراف از یک معیار مرکزی است. پرکاربردترین نوع این آزمون استفاده‌ی از میانه یا میانگین مشاهدات به عنوان معیار مرکزی است. در حالتی که مشاهدات از یک جامعه‌ی نرمال با حجم نمونه‌ی برابر برای گروه‌های مورد مطالعه استخراج می‌شوند، به راحتی می‌توان نشان داد که فرض همگنی واریانس گروه‌ها، معادل فرض برابری میانگین‌های متغیرهای قدرمطلق انحراف از میانه یا میانگین است. بنابراین در حالت برابری اندازه‌ی گروه‌ها تحلیل واریانس روی متغیرهای قدرمطلق انحراف به درستی برابری همگنی واریانس‌های متغیرهای اصلی را توصیف می‌کند. متوسط قدرمطلق انحراف به حجم گروه‌ها وابسته است. در صورت عدم برابری اندازه‌ی گروه‌ها فرض برابری میانگین‌ها دیگر معادل فرض همگنی واریانس‌ها نخواهد بود و استفاده از آزمون لون مناسب به نظر نمی‌رسد. در این وضعیت با انجام تبدیلاتی می‌توان به فرض صحیح دست یافت (*کی و لوی*[۲۵] [۲۷] و *اونیل و متیوس*[۲۶] [۴۱]). همچنین در این حالت، متغیرهای قدرمطلق انحراف از میانگین یا میانه یکی از فرضیات پایه‌ای تحلیل واریانس، یعنی فرض همگنی واریانس‌ها را برقرار نمی‌کنند. در نتیجه تحلیل واریانس با استفاده از آماره‌ی F مناسب نیست. در حالت ناهمگنی واریانس گروه‌ها، جایگزین‌های مناسبی برای تحلیل واریانس پیشنهاد شده است. از جمله جایگزین‌های مناسب که بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند می‌توان به آزمون‌های، ویلچ، الکساندر و گاورن، برون و فورسیت و جیمز اشاره کرد (پارا فروتوس[۲۷] [۴۳]). در این پایان نامه عملکرد این آزمون‌ها وقتی که روی متغیرهای قدرمطلق انحراف از میانه اعمال می‌شوند را در مقایسه‌ی با آزمون لون مورد بررسی قرار می‌دهیم. ملاک مقایسه، کنترل نرخ خطای نوع اول و توان است. در روش سوم، نسخه‌ی خودگردان تمام آزمون‌های ذکر شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم و آنها را با حالت‌های غیر خودگردان از نظر عملکرد کنترل نرخ خطای نوع اول و توان، مورد مقایسه قرار می‌دهیم. مطالعات شبیه‌سازی شده‌ی قبلی نشان داده است که نسخه‌ی خودگردان آزمون‌ها عملکرد خوبی از جهت کنترل نرخ خطای نوع اول دارد. مقایسات برای توزیع‌های مختلف شامل توزیع‌های چوله و دم‌سنگین در حالات اندازه

[۲۵] Keyes and Levy

[۲۶] O'Neill and Mathews

[۲۷] Parra Frutos

نمونه‌های کوچک و بزرگ جوامع انجام می‌شود. در بین توزیع‌های متقارن، توزیع‌های نرمال، تی استودنت با چهار درجه‌ی آزادی که دارای دنباله‌ی بلند و کشیدگی کوتاه و توزیع یکنواخت با کشیدگی بسیار کم را انتخاب می‌کنیم. از توزیع‌های چوله نیز توزیع‌های نمایی با میانگین $\frac{۱}{۳}$ با دنباله‌ی سنگین و کشیدگی بالا و توزیع کای‌دو با چهار درجه‌ی آزادی با دنباله‌ی بلند و کشیدگی بالا را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تمام آزمون‌های ذکر شده را با دو روش حذف صفرساختاری و برآورد مقادیر بحرانی نیز مورد بررسی قرارمی‌دهیم. و عملکرد آنها را با روش خودگردان مقایسه می‌کنیم. می‌بینیم که عملکرد آزمون‌ها با روش خودگردان به طور چشم‌گیری بهبود می‌یابد. در آزمون‌های الکساندر و گاورن، جیمز، ویلچ و شومیکر هنگامی که اندازه نمونه‌های بزرگ متناظر با واریانس‌های بزرگ هستند مقدار توان بالاست و برعکس هنگامی که اندازه نمونه‌های بزرگ متناظر با واریانس‌های کوچک هستند مقدار توان کم است. در حالی که در سایر آزمون‌ها عکس این مطلب برقرار است. مطالبی که بررسی خواهیم کرد به این صورت خواهد بود که ابتدا در فصل دوم آزمون‌های مختلف را با سه روش ذکر شده در سه بخش شرح می‌دهیم. در فصل سوم تمامی آزمون‌ها را با روش‌های مختلف شبیه‌سازی می‌کنیم و به مقایسه‌ی عملکرد آن‌ها از نظر نرخ خطای نوع اول و توان می‌پردازیم.

فصل ۲

تعاریف و آزمون‌های مورد مطالعه

تا به حال مطالعات بسیار جامعی در زمینه‌ی آزمون‌های همگنی واریانس‌ها صورت گرفته است. در تلاش جهت دستیابی به آزمون‌های استوار نسبت به فرض غیر نرمال بودن سه رهیافت زیر ارائه شده است(*بوس و برون* [۷]):

۱. تعدیل آزمون‌های موجود براساس توزیع نرمال با استفاده از برآوردگری از کشیدگی [۴۹]، [۱۰]،

۲. انجام تحلیل واریانس روی متغیرهای تبدیل یافته مانند قدرمطلق انحراف از میانگین و میانه[۲۹]، [۱۲]،

۳. روش‌های بازنمونه‌گیری [۶]، [۱۰].

در این فصل آزمون‌های رایج موجود را براساس سه رهیافت مذکور بررسی می‌کنیم.

۱.۲ آزمون‌های مبتنی‌بر تعدیل کشیدگی

فرض می‌کنیم k نمونه‌ی مستقل $Y_{i1},\ldots,Y_{in_i}$؛ $i=1,\ldots,k$ داریم. Y_{ij}؛ $j=1,\ldots,n_i$ مستقل و هم توزیع هستند که تابع توزیع آنها $F(\frac{y_i-\mu_i}{\sigma_i})$ است و گشتاور چهارم متناهی دارد. که در آن تابع F و پارامترهای مکانی و مقیاسی نامعلوم‌اند. می‌خواهیم آزمون فرض

$$H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2$$

در مقابل اینکه حداقل دومورد از آنها برابر نباشند را آزمون کنیم.

۱.۱.۲ آزمون بارتلت

اولین آزمونی که در این قسمت معرفی می‌کنیم مربوط به آزمون بارتلت [۴] است. این آزمون اصلاحی از آزمون نسبت درستنمایی مطرح شده توسط *نیمن و پیرسون* است. مهمترین ویژگی این آزمون این است که در برابر غیرنرمال بودن بشدت غیراستوار است. آماره‌ی آزمون بارتلت به صورت زیر است.

$$B = \frac{(N-k)\ln S_a^۲ - \sum_{i=۱}^{k}(n_i-۱)\ln S_i^۲}{۱+\frac{۱}{۳(k-۱)}(\sum_{i=۱}^{k}\frac{۱}{n_i-۱}-\frac{۱}{N-k})}$$

که در آن

$$\begin{aligned} S_i^۲ &= \frac{\Sigma_{j=۱}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_i)^۲}{n_i-۱}, \\ S_a^۲ &= \frac{\Sigma_{i=۱}^{k}(n_i-۱)S_i^۲}{N-k}. \end{aligned}$$

تحت فرض $H_۰$، B به صورت تقریبی یک متغیر کای‌دو با $k-۱$ درجه‌ی آزادی است (پارا فروتوس [۴۳]).
هرگاه B بزرگتر از چندک $(۱-\alpha)$۱۰۰ درصد از توزیع کای‌دو با $k-۱$ درجه‌ی آزادی باشد آزمون بارتلت فرض صفر را رد می‌کند.

۲.۱.۲ آزمون بارتلت با اصلاح کشیدگی

باکس [۸] یک تعدیل کشیدگی را برای آزمون بارتلت پیشنهاد کرد. همچنین هنگام استفاده از آزمون بارتلت اصلاح شده برای توزیع‌های غیر نرمال، بهبودهایی مشاهده شده است و برای این توزیع‌ها، آزمون به طور مجانبی استوار است. اما این آزمون هنوز غیراستوار است و هیچ یک از مطالعات مقایسه‌ای، این آزمون را پیشنهاد نمی‌کنند مگر وقتی که توزیع جامعه به طور آشکار

نرمال باشد. آزمون تعدیل کشیدگی باکس به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
B۲ &= kB, \\
k &= \frac{۲}{\hat{\beta}_۲ - ۱}, \\
\hat{\beta}_۲ &= \frac{N\Sigma_{i=۱}^{k}\Sigma_{j=۱}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^۴}{(\Sigma_{i=۱}^{k}\Sigma_{j=۱}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^۲)^۲}.
\end{aligned}
$$

B۲ دارای توزیع مجانبی $\chi^۲_{k-۱}$ درجه‌ی آزادی است (پارا فروتوس [۴۳]). مقادیر بحرانی برای B۲ همانند B است.

۳.۱.۲ آزمون شومیکر

آزمون بعدی که معرفی می‌کنیم آزمونی است که توسط شومیکر[۴۹] معرفی شده است.
آماره‌ی آزمون

$$S_{ts} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{(\ln s_i^۲ - \overline{\ln s^۲})^۲}{\widehat{var}(\ln s_i^۲)}$$

است که در آن

$$\overline{\ln s^۲} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} \ln s_i^۲}{k},$$

$$\widehat{var}(\ln s_i^۲) = \frac{[\frac{\hat{\mu}_۴}{\hat{\sigma}^۴} - \frac{(n-۳)}{(n-۱)}]}{n}. \qquad (۱.۲)$$

است و$\hat{\mu}_۴$ برآورد کننده‌ی گشتاور چهارم حول میانگین جامعه است.

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_۴ &= \frac{\sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^۴}{N}, \\
\hat{\sigma}^۲ &= \frac{\sum_{i=۱}^{k}(n_i - ۱)s_i^۲}{N}.
\end{aligned}
$$

برای افزایش دقت شبیه‌سازی می‌توان از فرمول مجانبی

$$\widehat{var}(\ln s_i^۲) = \frac{۱}{(n-۱)}[\frac{\hat{\mu}_۴}{\hat{\sigma}^۴} - \frac{(n-۳)}{n}] \qquad (۲.۲)$$

استفاده کرد. برای اثبات روابط (۱.۲) و (۲.۲) به مرجع [۲۷] مراجعه کنید .

n میانگین هارمونیک $\frac{k}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}}$ است. برای n نابرابر، استفاده از میانگین هارمونیک برای n عملکرد را نسبت به اینکه از خود n_i ها در فرمول استفاده کنیم، بهبود می‌دهد.

زمانی که S_{ts} از صدک $100(1-\alpha)$ توزیع χ^2_{k-1} تجاوز کند، فرض H_0 رد می‌شود.

۲.۲ آزمون‌های مبتنی‌بر متغیرهای تبدیل یافته

۱.۲.۲ آزمون لون

فرض کنید Y_{ij}، $i=1,\dots,k$؛ $j=1,\dots,n_i$ ، j امین مشاهده از i امین گروه را نشان می‌دهد. آزمون لون (*پارا فروتوس*[۴۳]) به عنوان تحلیل واریانس یک طرفه روی قدرمطلق انحراف مشاهدات از معیارهای مرکزی مانند میانه و میانگین، تعریف می‌شود. این آزمون همچنان توجه محققان را به خود جلب می‌کند. مطالعات اخیر رویکردهای متفاوتی برای بهبود این آزمون با به کار بردن دیگر مقیاس‌های استوار مکان به جای میانگین را نشان می‌دهند. برون و فورسیت [۱۲] در شبیه سازی‌های خود نشان دادند که سطح آزمون میانگین لون برای داده‌های متقارن نزدیک سطح اسمی ۰٫۰۵ است اما برای داده‌های نامتقارن اینگونه نیست. آزمون‌های میانگین و میانه‌ی لون هر دو تقریباً سطح صحیحی برای توزیع‌های متقارن دارند.

میلر[۱] [۳۸] نشان داد اگر در $M_{ij}=|Y_{ij}-\bar{Y_i}|$ که در آن $\bar{Y_i}$ میانگین نمونه‌ی گروه iام است، اگر به جای میانگین، میانه را استفاده کنیم می‌توان به‌طور مجانبی آن را برای جوامع نامتقارن نیز به کار برد.

آزمون لون یک تحلیل واریانس یک طرفه روی $Z_{ij}=|Y_{ij}-\tilde{Y_i}|$ است که در این پایان نامه از این نوع استفاده می‌کنیم. پس در اینجا $\tilde{Y_i}$ میانه‌ی Y_{ij}ها در گروه i ام برای $j=1,\dots,n_i$ است. به این ترتیب آماره‌ی آزمون به صورت زیر است.

$$L = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k}(\bar{Z}_i-\bar{Z})^2 n_i}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Z_{ij}-\bar{Z}_i)^2},$$
$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

[1] Miller

$$\bar{Z}_i = \frac{\sum_{j=۱}^{n_i} Z_{ij}}{n_i},$$
$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{n_i} Z_{ij}}{N}.$$

L تقریباً دارای توزیع F با $k-۱$ و $N-k$ درجه‌ی آزادی است.
کانوور و همکاران [۱۶] با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی تایید کرده‌اند که آزمون لون از لحاظ توان و استواری سطح، یکی از بهترین آزمون‌ها تحت غیر نرمال بودن است.
هنگامی که فرض همگنی واریانس گروه‌ها برقرار نیست جایگزین‌های مناسبی برای تحلیل واریانس پیشنهاد شده است. از جمله جایگزین‌های مناسب که بیشترین توجهات را جلب کرده‌اند(*پارا فروتوس*[۲] [۴۳]):

۱. *ویلچ*[۳]

۲. جیمز[۴]

۳. *برون و فورسیت*

۴. *الکساندر و گاورن*[۵]

هستند.

۲.۲.۲ آزمون ویلچ

یکی از شناخته شده‌ترین جایگزین‌های پارامتری تحلیل واریانس موردی است که توسط *ویلچ* [۵۰] ارائه شده است. این مورد به صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است و در بسته‌های نرم افزارهای آماری رایج به آسانی در دسترس پژوهشگران قرار دارد.
آماره‌ی آزمون ویلچ به صورت زیر است:

$$Q = \frac{\dfrac{\sum_{i=۱}^{k} w_i(\bar{Z}_i - \bar{Z}^*)^۲}{(k-۱)}}{۱ + \dfrac{۲(k-۲)}{k^۲-۱}\sum_{i=۱}^{k}\dfrac{(۱-\frac{w_i}{W})^۲}{n_i-۱}}$$

[۲] Parra Frutos
[۳] Welch
[۴] James
[۵] Alexander and Govern

که در آن

$$
\begin{aligned}
w_i &= \frac{n_i}{S^{۲}_{Z,i}},\\
W &= \sum_{i=۱}^{k} w_i,\\
S^{۲}_{Z,i} &= \frac{\sum_{j=۱}^{n_i}(Z_{ij}-\bar{Z}_i)^{۲}}{n_i-۱},\\
\bar{Z}^* &= \frac{\sum_{i=۱}^{k} w_i\bar{Z}_i}{W}.
\end{aligned}
$$

آماره‌ی ویلچ تقریباً دارای توزیع F با $k-۱$ و ν درجه ی آزادی است که

$$\nu = \frac{k^{۲}-۱}{۳\sum_{i=۱}^{k}\frac{(۱-\frac{w_i}{W})^{۲}}{n_i-۱}}$$

است. هرگاه Q بزرگتر از توزیع F با $k-۱$ و ν درجه‌ی آزادی باشد، فرض صفر را رد می‌کنیم.

۳.۲.۲ آزمون جیمز

آزمون بعدی توسط جیمز[۲۵] پیشنهاد شده است. آماره‌ی آزمون جیمز به صورت زیر است:

$$U = \Sigma_{i=۱}^{k} w_i(\bar{Z}_i-\bar{Z}^*)^{۲}$$

تقریب $\chi^{۲}$ با $k-۱$ درجه‌ی آزادی برای U زمانی که اندازه نمونه‌ها کوچک و یا حتی نسبتاً بزرگ هستند، رضایتبخش نیست. بنابراین جیمز دو روش را برای اصلاح مقدار بحرانی پیشنهاد می‌کند. هرچند مطالعات شبیه‌سازی مختلف نشان می‌دهد که آزمون مرتبه‌ی دوم جیمز تحت شرایط واقعی گسترده‌ای صحیح‌ترین روش به نظر می‌رسد. یکی از نقص‌های عمده‌ی آن پیچیدگی محاسباتی آن است. فرایند مرتبه‌ی اول جیمز نرخ خطای نوع اول را در ناهمگنی واریانس‌ها برای اندازه نمونه‌های کوچک کنترل نمی‌کند و اغلب اوقات فرض صفر را رد می‌کند. روش مرتبه‌ی دوم جیمز به صورت گسترده‌ای توصیه می‌شود و به صورت زیر است . فرضیه صفر رد می‌شود اگر $U > h۲(\alpha)$ باشد، که

$$
\begin{aligned}
h2(\alpha) &= c(\alpha)+\frac{1}{2}(3X_4+X_2)\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-\frac{w_i}{W})^2}{n_i-1} \\
&+ \frac{1}{16}(3X_4+X_2)^2(1-\frac{k-3}{c(\alpha)})(\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-\frac{w_i}{W})^2}{n_i-1})^2 \\
&+ \frac{1}{2}(3X_4+X_2)[(8R_{23}-10R_{22}+4R_{21}-6R_{12}^2+8R_{12}R_{11}-4R_{11}^2) \\
&+ (2R_{23}-4R_{22}+2R_{21}-2R_{12}^2+4R_{12}R_{11}-2R_{11}^2)(X_2-1) \\
&+ \frac{1}{4}(-R_{12}^2+4R_{12}R_{11}-2R_{12}R_{10}-4R_{11}^2+4R_{11}R_{10}-R_{10}^2)(3X_4-2X_2-1)] \\
&+ (R_{23}-3R_{22}+3R_{21}-R_{20})(5X_6+2X_4+X_2) \\
&+ \frac{3}{16}(R_{12}^2-4R_{23}+6R_{22}-4R_{21}+R_{20})(35X_8-15X_6+9X_4+5X_2) \\
&+ \frac{1}{16}(-2R_{22}+4R_{21}-R_{20}+2R_{12}R_{10}-4R_{11}R_{10}+R_{10}^2)(9X_8-3X_6-5X_4-X_2) \\
&+ \frac{1}{4}(-R_{22}+R_{11}^2)(27X_8+3X_6+X_4+X_2) \\
&+ \frac{1}{4}(R_{23}-R_{12}R_{11})(45X_8+9X_6+7X_4+3X_2),
\end{aligned}
$$

$c(\alpha)$ نشان دهنده‌ی چندک $\alpha - 1$ توزیع χ^2_{k-1} است و

$$X_{2s}=\frac{c(\alpha)^s}{(k-1)(k+1)(k+3)\dots(k+2s-3)}, \tag{3.2}$$

$$R_{st}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(\frac{w_i}{W})^t}{(n_i-1)^s}.$$

مقدار بحرانی برای تقریب مرتبه‌ی اول جیمز که با $h1(\alpha)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر است:

$$h1(\alpha)=c(\alpha)+\frac{1}{2}(3X_4+X_2)\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-\frac{w_i}{W})^2}{n_i-1}.$$

که با استفاده از رابطه‌ی (۳.۲)، $h1(\alpha)$ رامی‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$h1(\alpha)=c(\alpha)+\frac{c(\alpha)}{2(k-1)}(1+\frac{3c(\alpha)}{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-\frac{w_i}{W})^2}{n_i-1}.$$