به نام خدا


دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار


عنوان رساله:

# برآوردگرموجکی خطی و غیر خطی تابع چگالی احتمال ومشتقات آن و بررسی خواص مجانبی برآوردگرها برای متغیرهای وابسته

ارائه شده جهت اخذ درجه دکتری

در رشته آمار ریاضی


نگارنده: نرگس حسینیون

استاد راهنما: جناب آقای دکتر نیرومند

استاد مشاور: جناب آقای دکتر دوستی



بهار 1388

**چکیده فارسی:**

تبدیل موجک روشی برای دست یابی به اطلاعات فرکانسی موجود در تابع، سیگنال ویا داده های تحت بررسی است ، با این امتیاز ویژه که بررسی کلیه مولفه های موجود، امکان پذیر است. واژه موجک در سال 1982 توسط *دوبیشی* ارائه شده است. تحلیل موجک در واقع صورت کاملی از روشهای موجود بررسی سیگنال در فضای هیلبرت است که به بکار گیری توابع پایه ای این فضا علاقمند است که استفاده از آنها بسیاری از تحلیل ها در فضای هیلبرت را آسان می کند.

با وجود اینکه این روش تحلیل ابتدا در ریاضیات معرفی و پایه های آن شکل گرفت، کم کم در زمینه های مختلف علوم مانند فیزیک کوانتومی، زمین شناسی وپزشکی توسعه پیدا کرد.

درفصل اول این رساله، موجک ها و نحوه پیدایش آنها و خواص و کاربردهای آنها و همچنین بعضی از قضایا و روابط مهم بین توابع موجکی را بطور کامل شرح خواهیم داد .

در فصل دوم، ابتدا برآوردگرهای موجکی خطی در برآورد تابع چگالی احتمال و تابع رگرسیونی را معرفی کرده و سپس بعد از شرح مفاهیمی مانند آستانه و انواع آن، بریده شده، برآوردگر غیر خطی را برای تابع چگالی احتمال و تابع رگرسیونی بررسی می کنیم.

فصل سوم به معرفی یک برآوردگرخطی برای تابع چگالی احتمال اختصاص داده شده است. در این فصل یک برآوردگر خطی موجکی را، معرفی وکران میانگین انتگرال مربع خطا را در حالتی که داده ها آ میخته هستند، محاسبه می کنیم.

در فصل چهارم این رساله، برآوردی براساس روش موجک، برای مشتقات جزئی تابع چگالی احتمال معرفی می کنیم و واریانس و نرخ همگرایی برآوردگررا در حالتی که متغیرها آمیخته هستند، می یابیم. سپس یک برآوردگر خطی برای مشتقات تابع چگالی احتمال معرفی و خواص مجانبی آن را در حالتی که متغیرها میخته هستند، بررسی می کنیم. نهایتا در بخش آخر این فصل، برآوردگری موجکی برای تابعی از مشتق تابع چگالی احتمال معرفی و نرخ همگرایی برآوردگر، در حالتی که متغیرها آمیخته هستند، مطالعه می شود. علاوه بر آن، ویژگیهای برآوردگرهای معرفی شده در فضای بسوو نیز بررسی می شود.

برآوردگری غیر خطی برای تابع چگالی احتمال را که در برآورد توابع پیوسته وحتی ناپیوسته مناسب است، در فصل پنجم معرفی وکران میانگین انتگرال مربع خطا را در حالتی که داده ها وابسته منفی هستند، محاسبه می کنیم. علاوه برآن با اعمال شریط خاص برای مشتقات تابع چگالی احتمال نیز یک برآوردگر موجکی غیر خطی معرفی و وکران میانگین انتگرال مربع خطا را در حالتی که داده ها وابسته منفی هستند، بررسی می کنیم

## Abstarct:

The wavelet transform is a tool for carving up functions, operators, or data into components of different frequency, allowing one to study each component separately. The term *wavelet* was itself coined in 1982, according to *Daubechies*. Wavelet analysis may be thought of as a generalization of analysis by the Hilbert space method, wherein one forms an orthogonal basis of the space of interest. Equations in that space may then be solved in terms of the basis.

Wavelets were developed independently in the fields of mathematics, quantum physics, electrical engineering, geology and medicine. Interchanges between these fields during the last ten years have led to many new wavelet applications such as image compression, turbulence, human vision, radar, and earthquake prediction.

In the first chapter, we explain some concepts like the definition of Wavelet, their origins and applications as well as some theorems that maybe useful through the thesis.

Second chapter is devoted to the linear wavelet-based estimators for density function and also Regression function. Afterward we define Thresholding and also Threshold estimators which help us to investigate another class of Wavelet-based estimator which is called nonlinear wavelet-based estimators.

Third chapter deals with the problem of estimating of density function and its derivatives with linear wavelet-based estimators and the behavior of these estimators for certain dependent sequences, called mixing sequences.

Fourth chapter contains three different subchapters. In the first one we propose wavelet-based estimators for the partial derivatives of multivariate density function and investigate the behavior of the estimators for mixing sequences. Third one considers the problem of estimating of the derivative of density function and finally in the thirst sub-chapter the problem of estimation of the function of derivative of the density function is considered.

Nonlinear wavelet-based estimators for density function and also its derivatives are discussed in final chapter. The behavior of our proposed estimators for negatively dependent sequences is also considered.

## فهرست مقالات پژوهشی نگارنده:

- N. Hosseinioun, H. A. Nirumand , H. Doosti, 2008, Formulate For Mean Integrated Squared Error of Nonlinear Wavelet-Based Density Estimators with Negatively Dependent Sequences, Current Development in Theory and Applications of Wavelets, Volume 2, Issue1, pages 25-36. Accepted.

- N. Hosseinioun, H. Doosti, H. A. Nirumand, 2008, Nonparametric Estimation of a Multivariate Probability Density for mixing sequences by the Method of Wavelets, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, Accepted.

- N. Hosseinioun, H. A. Nirumand, H. Doosti, 2008, Wavelet-Based Estimators of the Integrated Squared Density Derivatives for mixing sequences, Pakistan Journal of Statistics (PJS), Accepted.

- N. Hosseinioun, H. Doosti, H. A. Nirumand , 2008, On a Wavelet-Based Method of Estimating a Regression Function for Certain Dependent Sequences, Journal of Statistical Theory and Practice, submitted and raised.

- N. Hosseinioun, H. A. Nirumand, H. Doosti, 2008, Non parametric Estimation of Derivatives of a Density for Mixing Sequences by the Method of Wavelet, submitted and raised.

- N. Hosseinioun, H. Doosti, 2008, Wavelet based estimation of a density for $\rho^*$-mixing process, submitted.

- N. Hosseinioun, H. Doosti, 2008, On a Wavelet-Based Method of Estimating a Regression Function for Certain Dependent Sequences for $\rho^*$-mixing process, submitted.

## مقالات ارائه شده در کنفرانسهای بین المللی:

- Wavelet-based Estimation of Density Function with Negatively Dependent Sequences, ISI Conference, Lisbon, Portugal, September 2007.

- Wavelet-Based Estimators of the Integrated Squared Density Derivatives, Islamic Statistical Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, December 2007.

- Wavelet-Based Estimators for Density and Regression Functions for Certain Dependent Classes, Royal Statistical Society Conference, Nottingham, UK, September 2008.

- Nonparametric Estimation of Partial Derivatives of a Multivariate Probability Density for Mixing Sequences by the Method of Wavelets, Workshop on Recent Developments in Applied Probability and Statistics, Ankara-Turkey April 23-24, 2009

**پیشگفتار**

نظریه *موجك* شاخه ای از *تحلیل هارمونیك* و از پدیده های جدید علم ریاضی است که کاربرد های فراوانی در ریاضیات ، مخابرات و سایر علوم دارد. این نظریه علی رغم عمر کوتاه خود، به سرعت رشد کرده و تقریباً در هر زمینه ای که *تحلیل فوریه* حضور داشته، به رقابت با آن برخاسته است. مهمترین عرصه این رقابت در فشرده سازی و مخابره علائم و تصاویر است. ابزار مورد نیاز برای رسیدن به این اهداف، *تبدیلهای موجکی* هستند.
اخیراً موضوع *تحلیل موجکی* مورد توجه فراوان ریاضی دانان و مهندسان قرار گرفته است. برخی از آن به عنوان پایه ای جدید برای نمایش توابع یاد می کنند و عده ای آنرا به عنوان تکنیکی برای تحلیل زمان بسامدی به حساب می آورند و گروهی نیز آنرا شاخه جدیدی از ریاضیات می دانند.
ضعف *تبدیلهای فوریه* از آنجا ناشی می شود که توابع سینوسی و کسینوسی، با وجود اینکه پایه ای برای فضای $L^2[0,2\pi]$ هستند به $L^2(R)$ تعلق ندارند. برای برطرف کردن این نقیصه ، باید به دنبال پایه ای بود که $L^2(R)$ را تولید کند. ترجیح می دهیم که اینکار تنها توسط یك تابع انجام شود. تابعی که به فضای $L^2(R)$ تعلق داشته باشد باید سریعاً به سمت صفر میل کند و در اینجا این سوال پیش می آید که تابعی که سریعاً به سمت صفر میل می کند، چگونه می تواند تمام فضای $L^2(R)$ را تولید کند؟ پاسخ این است که این هدف، توسط انتقالهای تابع مورد نظر روی فضای $R$ انجام می گیرد.
سوال بعدی این است که آیا چنین خانواده ای از توابع، پایه ای برای $L^2(R)$ تشکیل می دهند؟ به عبارت دیگر آیا عناصر این خانواده بر یکدیگر عمودند؟ این مسئله، مدتها ذهن کسانی را که دراین زمینه کار می کردند به خود مشغول کرده بود. آنها به دنبال خانواده ای از توابع بودند که دارای *محمل فشرده* بوده و بر یکدیگر عمود باشند. توأم بودن این دو خاصیت بدیهی به نظر نمی رسید. اینکار بالاخره توسط *اینگرید دو بیشی* [1] انجام شد.
یکی از مهمترین کاربردهای *موجک ها* در پردازش و انتقال اطلاعات، خصوصاً فشرده سازی تصاویر است. تصاویر ، خواه به شکل ذخیره سازی عددی در حافظه رایانه ها و خواه در حین انتقال از نقطه ای به نقطه دیگر در شبکه اینترنت، فضای زیادی را اشغال می کنند. خوشبختانه می توان به کمک *موجکها* بدون تنزل کیفیت، آنها را فشرده و متراکم ساخت. امروزه این فنون برای نگهداری و ذخیره اطلاعات یا برای انتقال آنها از طریق اینترنت، تلفن، ماهواره و یا هر وسیله دیگری استفاده می شود. این عمل با حذف اضافات و نمایش تصویر به کمك تعداد محدودی پارامترهمراه است. برای این کار تاکنون از *تبدیلهای فوریه* استفاده می شده ولی در حال حاضر *تبدیلهای موجکی* در حال رقابت با آنها هستند و حتی در مواردی نظیر انگشت نگاری، برتری خود را نشان داده اند.
*آنالیز موجک* همراه با *تبدیل سریع فوریه* در تحلیل سیگنالهای گذرایی که سریعا تغییرمی کنند، سیگنالهای صوتی، جریان های الکتریکی در مغز، صداهای زیر آبی ضربه ای و داده های طیف نمایی و در کنترل

[1] Ingrid Daubechies

نیروگاههای برق از طریق صفحه نمایش کامپیوتر بکار رفته و نیز بعنوان ابزاری علمی، برای روشن ساختن ساختارهای پیچیده ای که در تلاطم ظاهر می شوند، جریان های جوی، و در بررسی ساختارهای ستاره ای و پردازش امواج زلزله استفاده می شوند. این آنالیز به عنوان یک ابزار عددی می تواند مانند *تبدیل سریع فوریه*، تا حد زیادی از پیچیدگی محاسبات بزرگ *مقیاس* بکاهد، بدین ترتیب که می توان با تغییر ضریب، ماتریس های متراکم را به شکل تنکی که به سرعت قابل محاسبه باشد در آورد. راحتی و سادگی این آنالیز باعث ساختن تراشه هایی شده است که قادر به کدگذاری به نحوی بسیار کارا، و فشرده سازی سیگنالها و تصاویرند.
*آنالیز موجک* امروزه در علم پزشکی نیز کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می توان به کاربرد آن در تصویر برداری پزشکی، کاهش اغتشاشات در تصاویر سونوگرافی با استفاده از *تبدیل موجك*، سی تی اسکن، جداسازی بافت های مغزی از تصاویرتشدید مغناطیس، تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی و عملکردهای تشدید مغناطیسی اشاره نمود.

نامگذاری *موجک ها* به پیروی از *گراسمن* [2] و *مورلت*[3] درسال 1982 انجام شده است. محققان برجسته دیگری را همانند *مالات* [4]، *لماریه* [5]، *لاگارمار*[6]، *استرنگ*[7] [93]، می توان نام برد.

همچنین علی رغم اینکه بیش از يك دهه از ورود *موجک ها* در علم آمار نمی گذرد، نتایج نظری و عملی ارزشمندی پیرامون نقش *موجک ها* در تحقیقات آماری به چاپ رسیده است و در تحقیقات آماری مورد توجه ویژه قرار گرفته اند. اولین بار *دوناهو*[8] و *جانستون*[9] در سال 1992 موجک *ها* را در تحقیقات آماری بکار بردند. در چند سال اخیر کتابها و مقالات متعددی که در زمینه کاربرد *موجک ها*، در شاخه های مختلف آمار به چاپ رسیده که اهمیت موضوع را نشان می دهد.

درفصل اول این رساله، *موجک ها* و نحوه پیدایش آنها و خواص و کاربردهای آنها و همچنین بعضی از قضایا و روابط مهم بین *توابع موجکی* را بطور کامل شرح خواهیم داد.

در فصل دوم، ابتدا برآوردگرهای *موجکی* خطی در برآورد تابع چگالی احتمال و تابع رگرسیونی را معرفی کرده و سپس بعد از شرح مفاهیمی مانند *آستانه* و انواع آن، *بریده شده*، برآوردگر غیر خطی را برای تابع چگالی احتمال و تابع رگرسیونی بررسی می کنیم.

فصل سوم به معرفی یک برآوردگرخطی برای تابع چگالی احتمال اختصاص داده شده است. در این فصل یک برآوردگر خطی موجکی را، معرفی وکران میانگین انتگرال مربع خطا را در حالتی که داده ها $\rho^*$- *آ میخته* هستند، محاسبه می کنیم.

---

[2] Grossman
[3] Morlet
[4] Mallat
[5] Lomareh
[6] Logarmar
[7] Strang
[8] Donoho
[9] Johnstone

در فصل چهارم این رساله، برآوردی براساس روش موجک، برای مشتقات جزئی تابع چگالی احتمال معرفی می کنیم و واریانس و نرخ همگرایی برآوردگررا در حالتی که متغیرها *آمیخته* هستند، می یابیم. سپس یک برآوردگر خطی برای مشتقات تابع چگالی احتمال معرفی و خواص مجانبی آن را در حالتی که متغیرها *آمیخته* هستند، بررسی می کنیم. نهایتا در بخش آخر این فصل، برآوردگری *موجکی* برای تابعی از مشتق تابع چگالی احتمال معرفی و نرخ همگرایی برآوردگر، در حالتی که متغیرها *آمیخته* هستند، مطالعه می شود. علاوه بر آن، ویژگیهای برآوردگرهای معرفی شده در *فضای بسو*نیز بررسی می شود.
برآوردگری غیر خطی برای تابع چگالی احتمال را که در برآورد توابع پیوسته وحتی ناپیوسته مناسب است، در فصل پنجم معرفی وکران میانگین انتگرال مربع خطا را در حالتی که داده ها *وابسته منفی* هستند، محاسبه می کنیم. علاوه برآن با اعمال شریط خاص برای مشتقات تابع چگالی احتمال نیز یک برآوردگر موجکی غیر خطی معرفی و وکران میانگین انتگرال مربع خطا را در حالتی که داده ها *وابسته منفی* هستند، بررسی می کنیم.

# فهرست مندرجات

# فصل 1

# مقدمات

### 1-1- مقدمه

ایده نمایش یک تابع برحسب مجموعه کاملی از توابع، اولین بار توسط *ژوزف فوریه*[10]، ریاضیدان و فیزیکدان سال های ۱۸۰۲-۱۸۰۶، طی رساله ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع بکار گرفته شد. *پایه های فوریه* بصورت ابزاری اساسی، با کاربردهای فوق العاده متواتر در علوم، در آمده اند، زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع و در نتیجه کمین های فیزیکی فراوانی بکار می روند. *هار*[11] اولین کسی بود که در سال ۱۹۰۹، به موجک ها اشاره کرد.

در سال های ۱۹۳۰ ریاضیدانان به قصد تحلیل ساختارهای تکین موضوعی، به فکر اصلاح *پایه های فوریه* افتادند. و بعد از آن در سال ۱۹۷۰ یک ژئوفیزیکدان فرانسوی به نام *ژان مورلت* متوجه شد که *پایه های فوریه* بهترین ابزار ممکن در اکتشافات زیر زمین نیستند. این موضوع در آزمایشگاهی متعلق به *الف آکلین* [12] منجر به یکی از اکتشافات تبدیل به موجک *ها* گردید. در سال ۱۹۸۰ *میر*[13] ریاضیدان فرانسوی، نخستین *پایه های موجکی متعامد* را کشف کرد. در همین سال ها *مورلت* مفهوم موجک و تبدیل موجک را بعنوان یک ابزار برای آنالیز سیگنال زمین لرزه معرفی نمود و *گراسمن* فیزیکدان نظری فرانسه نیز فرمول وارونی را برای *تبدیل* موجک بدست آورد.

در این فصل بطور کامل درباره تاریخچه *موجك*، خواص آن و *پایه های موجکی*، نحوه تولید *پایه های موجکی*، *توابع موجکی* و روابط بین آنها و قضایای مهم مربوط به *موجک ها* را بیان می کنیم. سعی شده است در این فصل مطالبی برای کسانی که علاقمند به تحقیق در زمینه کاربرد موجک *ها* در آمار هستند، گنجانیده شود که پس از مطالعه این فصل، اطلاعات کافی در زمینه کاربرد آماری *موجک ها*، حاصل شود.

### 2-1- معرفی نمادها، فضاهای تابعی، تعاریف

#### 1-2-1- نمادها

در این بخش نمادهایی را که در این رساله از آنها استفاده شده است ذکر می کنیم:

1- قسمت مثبت و قسمت منفی تابع $f$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$f_+ = f 1_{f \geq 0} = f \vee 0 \quad \text{و} \quad f_- = -f\, 1_{f \leq 0} = -(f \wedge 0)$$

همچنین بدیهی است که $f = f_+ - f_- \ , \ |f| = f_+ + f_-$ .

---

[10] Jouseph Fourier
[11] Haar
[12] Alph Aklin
[13] Meyer

2- $\frac{a_n}{b_n}$ به طور مجانبی کراندار به صفر است، اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_b}=0$ و می نویسیم: $a_n=o(b_n)$ و اگربرای $k$ ثابت داشته باشیم: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_b}\le k$ ، آنگاه می نویسیم: $a_n=O(b_n)$

3- تابع $\delta_{m,n}$ کرونکر بصورت $\delta_{m,n}(x)=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq 0\end{cases}$ تعریف می شود.

4- تابع $f$ در $[a,b]$ با *تغییرات کراندار* نامیده می شود اگر $\sup_k\sum_{i=1}^{k}[f(x_i)-f(x_{i-1})]<\infty$ . در *بارا*[14] [12] می بینیم که $f$ در $[a,b]$ با *تغییرات کراندار* است، اگر و فقط اگر تفاضل دو تابع صعودی در $[a,b]$ باشد.

5- *فرآیند مانا*- فرآیند تصادفی $\{X_t,-\infty<t<+\infty\}$ *مانای اکید* است اگر توزیع بردارهای تصادفی $(X_{t_1+h},X_{t_2+h},...,X_{t_s+h})$ که $t_i+h\in T_i$ ، $i=1,2,...,s$ ، به $h$ بستگی نداشته باشد و فرآیند $\{X_t,-\infty<t<+\infty\}$ را *مانای ضعیف* گوئیم هرگاه تمام گشتاورهای توام تا مرتبه $n$ موجود بوده و نسبت به زمان تغییر نکندک یعنی مستقل از مبدا زمان باشد. مجموعه $T$ ممکن است اعداد حقیقی یا اعداد صحیح باشد که در این صورت به ترتیب فرآیندهای تصادفی زمان پیوسته و زمان گسسته خواهیم داشت. در این رساله فرآیندهای تصادفی زمان گسسته بیشتر مورد نظر است که آن را با $X_n$ نشان می دهیم. فرآیند تصادفی زمان پیوسته را معمولاً با $X_t$ نشان می دهند. هرچند در بسیاری از موارد هیچ فرقی بین آنها از نظر نوشتن قائل نمی شوند و با $X_t$ و $X_n$ نشان می دهند. توجه داشته باشید که در فرآیندهای تصادفی زمان پیوسته داریم:

$$\lim_{s\to 0}P\{|X(t+s)-X(t)|>\varepsilon\}=0$$

### 2-2-1-*فضای برداری و فضای توابع*

یك *فضای برداری حقیقی*، مجموعه ای از بردارها به همراه دو عمل جمع برداری و ضرب عدد در بردار است.
*فضای اقلیدسی* $R^n$ متشکل از بردارهای ستونی با $n$ مولفه است که مولفه ها اعداد حقیقی هستند و $R^1$ ، *فضای یك بعدی* و متناظر با یك خط راست است.

$R^2$ ، فضای معمولی $X-Y$ را نشان می دهد.

فضای $R^\infty$ ، فضای برداری است که تعداد مولفه های بردارهای تشکیل دهنده آن نامتناهی است.

[14] Bara

*زیر فضای برداری*، زیر مجموعه ای از فضای برداری است که تحت جمع برداری و ضرب اسکالر دوبردار، بسته باشد، یعنی فضا را بوجود آورد. در فضای اقلیدسی $R^n$ ، اگر $x=(x_1,...,x_n)$ و $y=(y_1,...,y_n)$ باشد آنگاه

*ضرب داخلی* به صورت $<x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ و نرم یا اندازه به صورت $\|x\|=\sqrt{\sum x_i^2}$ تعریف می شود.

از فضای توابع زیر درمتن این رساله استفاده شده است:

1- *فضای توابع انتگرال پذیر مربعی* $L^2(R)$: گوئیم تابع $f$ متعلق به فضای $L^2(R)$ است هرگاه $\int |f(x)|^2 dx<\infty$. در این فضا، *ضرب داخلی* به صورت $<f,g>=\int_R f(x)g(x)dx$ و *نرم* $f$ به صورت $\|f\|=\sqrt{\int|f(x)|^2 dx}$ تعریف می شود.

اگر $f,g\in L^2(C)$ باشد که $C$ *مجموعه اعداد مختلط* می باشد، آنگاه *ضرب داخلی* و *نرم* به صورت $<f,g>=\int f(x)\overline{g}(x)dx$ و $\|f\|=\sqrt{\int f(x)\overline{f}(x)dx}$ تعریف می شود.

2- *فضای تمام دنباله های جمع پذیر مربعی* $L^2$**:** گوئیم دنباله $\{x_n\}$ متعلق به فضای $L^2$ است هرگاه $\underline{x}=\sum_{n\in z}|x_n|^2<\infty$ . در این فضا، *ضرب داخلی* بصورت $<\underline{x},\underline{y}>=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i$ و *نرم* به صورت $\|\underline{x}\|=\sqrt{\sum_{i\in z}|x_i|^2}$ تعریف می شود.

3- فضای *لبگ* $L^p(A)$، $1\le p<\infty$: گوئیم تابع $f$ متعلق به *فضای لبگ* $L^p(A)$ است هرگاه $\|f\|_P=\left(\int|f|^P dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$ و اگر $p=\infty$ آنگاه $\|f\|_\infty=ess\sup_{x\in A}|f(x)|<\infty$ .

4- فضای *هیلبرت*: *فضای هیلبرت* حالت عمومی تر فضای اقلیدسی $R^n$ با بعد متناهی است و با آن را با $H$ نشان می دهیم.

5- فضای *هولدر*: تابع $f(x)$ را متعلق به *فضای هولدر* $C^s(A)$ گوئیم هرگاه

الف- اگر $s=n$ آنگاه $f(x)$ ، $n$ بار مشتق پذیر باشد.

ب- اگر $0<s<1$ آنگاه

$$C^s(R)=\left\{f: f\in L^\infty\ (R), \sup_h \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^s}<\infty\right\}$$

ج- اگر $s=n+s'$ , $0<s'<1$ آنگاه

$$C^{s}(R)=\left\{f: f\in L^{\infty}(R)\bigcap C^{n}(R)\,\middle|\,\frac{d^{n}}{dx^{n}}f\in C^{s'}(R)\right\}$$

6 - *فضای سوبلو*: تابع $f(x)$ را متعلق به *فضای سوبلو* $W_2^s(R)$ می نامیم هرگاه $\left\|\left(1+|\omega|^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\omega)\right\|_{L^2}<\infty$، که

در آن $\hat{f}(\omega)$ *تبدیل فوریه* تابع $f(x)$ در بسامد $\omega$ است.

اگر $s=0$ باشد، فضای فوق *فضای لبگ* خواهد بود و برای $s=1,2,3,..$ فضای فوق شامل تمامی *فضای لبگ* خواهد بود که $s$ بار مشتق پذیرند و این مشتقات متعلق به *فضای لبگ* است و مشابه تعریف بالاداریم:

$$W_p^s(R)=\left\{f:\left\|\left(1+|\omega|^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\omega)\right\|_{L^p}<\infty\right\}$$

7- *فضای بسو*: در زیر یك تعریف از *فضای بسو* غیر همگن را بر بازه $I\subset R$ بیان می کنیم.

فرض کنید:

تفاضل از مرتبه‌صفر : $\Delta_h^{(0)}f(t)=f(t)$

تفاضل از مرتبه $r$ : $\Delta_h^{(r)}=\Delta_h^{(r-1)}\ f(x+h)-\Delta_h^{(r-1)}f(x)$

$\Delta_h^{(r)}$ برای بازه $I_{rh}=\{x\in I\,|\,x+rh\in I\}$ تعریف شده است.

ضریب $r$ *ام همواری* تابع $f\in L^p(I)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$W_{r,p}(f;t)=\sup_{|h|\le t}\left\|\Delta_h^{(r)}f\right\|_{L^p}(I_{rh})$$

به ازای مقادیر $s>0$، $0<p\le\infty$ و $0<q\le\infty$ ، $r$ را چنان انتخاب می کنیم که $r-1\le s\le r$ . نرم *نیمه فضای بسو* را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$|f|_{B_{p,q}^S}=\left[\int_0^{\infty}\left(h^{-s}W_{r,p}(f;h)\right)^q\frac{dh}{h}\right]^{\frac{1}{q}}\qquad,\qquad 1\le q<\infty$$

اگر $q=\infty$ تعریف می کنیم:

$$|f|_{B_{p,q}^S}=\sup_h W_{r,p}(f;h)$$

نرم *فضای بسو* به صورت $\|f\|_{L^p(I)}+|f|_{B_{p,q}^S}$ تعریف می کنیم.

*فضای بسو* کلاس بسیار بزرگی از توابع است که دارای *نرم بسو* متناهی اند و این کلاس را با $F_{p,q}^{S}$ نشان می دهیم. به عنوان مثال *فضای هولدر* $C^{s}$ یك فضای $B_{\infty,\infty}^{S}$ و *فضای سوبلو* $W_{2}^{S}$، یك فضای $B_{2,2}^{S}$ است.

روابط بین *فضای بسو* با *فضاهای هولدرو سوبلو* بصورت زیر می باشد:

اگر

$$C^{s} = \left\{ f : \sup_{x,h} |h|^{-s} \left| f(x+h) - f(x) \right| < \infty,\ \|f\|_{\infty} < \infty \right\},\ 0 < s \leq 1$$

$$W_{P}^{S} = \left\{ f : \left\| F\left( \left( 1 + |x|^{S} \right) \hat{f} \right) \right\|_{P} < \infty \right\},\ s \geq 0$$

فضایی از توابع در $L^{p}$ باشد که مشتقهای آنها تا مرتبه $s$ در $L^{p}$ قرار دارد=

در این صورت داریم:

$$B_{\infty,\infty}^{S} = C^{S} \qquad , \ 0 < s < 1$$

$$B_{p,q}^{S} = C^{S} \qquad , \quad s > \frac{d}{p}$$

$$B_{p,q}^{S} \subset w_{p}^{s} \subset B_{p^{2}}^{S} \ , \qquad p \leq 2$$

$$B_{P^{2}}^{S} \subset w_{P}^{S} \subset B_{P,P}^{S} \ , \qquad p \geq 2$$

$$B_{p,q}^{S} \subset \beta_{p',q'}^{s'} \qquad , \quad p' \geq p\,, s = s' - \frac{1}{p'} + \frac{1}{p}\ , \ q' \geq q$$

$$B_{\infty,\infty}^{S} = C^{S} \qquad , \qquad 0 < s < 1$$

$$B_{p,q}^{S} \subset C^{0} \qquad , \qquad s > \frac{1}{p}$$

$$B_{p,p}^{S} \subset W_{p}^{S} \subset B_{p,p}^{S}\ , \qquad p \geq 2$$

**3-1 - تعاریف**

**1-3-1-** فرض کنید $\{\varphi_{n}\}$ خانواده ای از توابع در یك *فضای هیلبرت* باشد. این خانواده را *متعامد* گوئیم هر گاه

$$< \varphi_{n}, \varphi_{m} >= 0 \ , \forall n \neq m$$

**1-3-2-** دو تابع $f,g$ از $L^2(R)$ را *متعامد* گوئیم هر گاه $<f,g>=0$ و می نویسیم $f \perp g$ و دنباله $\{f_n\}_{n\in z}$ از توابع را *متعامد یکه* نامیم اگر $<f_m,f_n>=\delta_{m,n}$. به عبارت دیگر خانواده متعامد $\{f_n\}$ را *متعامد* یکه گوئیم، هر گاه $\forall n\ ,\ \|f_n\|=1$.

**مثال1-3-1-1-** خانواده $\{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ در فضای $R^3$ *متعامد* است.

**1-3-3-** فرض کنید $S=\{\varphi_n\}$ خانواده شمارش پذیری از توابع *متعامد یکه* بر بازه‌ای مانند $I$ باشد و $f\in L^2(I)$ در این صورت سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ را که در آن $c_n=<f,\varphi_n>=\int_I f(x)\overline{\varphi}_n(x)dx$ ، *سری فوریه* $f$ نسبت به خانواده $S$ می نامیم.

**1-3-4-** اگر $f$ تابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi$ باشد و $f\in L^2([0,2\pi])$ ، آنگاه سری $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ را *سری فوریه* تابع $f$ گوئیم که در آن $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\Pi} f(x)e^{-inx}dx$.

**1-3-5-** *تبدیل فوریه* تابع $f\in L^1(R)$ را چنین تعریف می کنیم:

$$\hat{f}(\omega)=\int_R f(x)e^{-i\omega x}dx \quad , \quad \omega\in R$$

**مثال1-3-2-** اگر $f_l(x)=\begin{cases}1 \ ;|x|\le l/2\\ 0 \ ;|x|>l/2\end{cases}$ ، داریم:

$$\hat{f}_l(x)=\int_{-l/2}^{l/2} e^{-i\omega x}dx=-\frac{1}{i\omega}\, e^{-i\omega x}\Big|_{-l/2}^{l/2}=\frac{1}{\omega}\frac{e^{i\omega l/2}-e^{-i\omega l/2}}{i}=l\frac{\sin\omega l/2}{\omega l/2}$$

**1-3-6-** به ازای هر عدد صحیح $k$ ، $f(x-k)$ را *انتقال صحیح یا انتقال تابع* $f$ گوئیم.

**1-3-7-** به ازای هر عدد صحیح $j$ ، تابع $f(2^j x)$ را یك *اتساع* تابع $f(x)$ گوئیم.

**1-3-8-** *نقطه لبگ تابع* $f$ ، نقطه ای مانند $x$ است که در شرط $\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}|f(x+t)-f(x)|\,dt=0$ صدق می کند.

**1-3-9-** هر معادله تابعی به شکل کلی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N} C_k f(\alpha x-\beta_k)$$

که در آن $\alpha > 1$ و $\beta_0 < \beta_1 < .... < \beta_N$ اعداد ثابت حقیقی بوده و $C_k$ ها اعداد ثابت *مختلط* هستند، يك *معادله تفاضلی دو مقیاسی* یا يك *معادله اتساع* نامیده می شود.

در این رساله با حالت خاص اینگونه معادلات سر و کار داریم یعنی وقتی که $\alpha = 2^j$ ، $j$ عدد صحیح و $\beta_k = k$ و $C_k$ ها اعداد حقیقی هستند.

**1-3-10-** هر جواب غیر صفر *معادله اتساع* $f(x) = \sum_{k=0} C_k f\left(2^j x - k\right)$ را يك تابع *پیمایشی* گوئیم. *تابع جعبه ای وتابع کلاهك* دو جواب غیر صفر، از جوابهای این معادله هستند که به این ترتیب معرفی می شوند:

$$\text{تابع کلاهك}=\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{جاها سایر} \end{cases} \qquad \text{،تابع جعبه ای}=\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{جاها سایر} \end{cases}$$

**1-3-11-** زیر فضای خطی $V$ از *فضای هیلبرت* $H$ را *زیر فضای بسته* $H$ گوئیم هر گاه $V$ شامل همه نقاط حدی با شد بطوریکه اگر $K_n \in V$ و $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} \circ$ و $V^{\perp}$ *زیر فضای متعامد* $V$ باشد. در این صورت

$$x \in V^{\perp} \Rightarrow < x, y >= 0 \quad \forall y \in V$$

**1-3-12-***تکیه گاه* تابع $f$ را با $Supp \ f$ نشان می دهیم و برابر است با .$\{x : f(x) \neq 0\}$

**1-3-13-** دنباله توابع $\{f_j\}$ را *متعامد یکه* گوئیم هرگاه $f_j$ ها دوبدو متعامد باشند و $\|f_j\| = 1$ .

**1-3-14-** دنباله توابع $\{f_j\}$ ها را سیستم *متعامد کامل* گوئیم، هرگاه $f_j$ ها دو به دو *متعامد* باشند و برای همه $j$ ها ، $\|f_j\| = 1$ و تنها*تابع متعامد* بر هر کدام از $f_j$ ها تابع صفر باشد. به عبارت دیگر هر تابع $f \in L^2(R)$ را بتوان با ترکیب خطی متناهی دلخواهی از $f_j$ ها تقریب زد .

### 1-4 - مختصری در مورد موجک *ها* و تاریخچه آن

موجک *ها* ابزاری قابل انعطاف با محتوای غنی ریاضی و توانایی بالا در کاربرد هستند و برای تجزیه و تحلیل يك تابع نوسانی از زمان یا مکان که موج نامیده می شود، به کار می روند.

ایده نمایش یک تابع برحسب مجموعه کاملی از توابع اولین بار توسط *ژوزف فوریه* ، ریاضیدان و فیزیکدان سال های ۱۸۰۲-۱۸۰۶ طی رساله ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع بکار گرفته شد. در واقع برای آنکه یک تابع مانند $f$ به شیوه ای ساده و فشرده نمایش داده شود، *فوریه* اساسا ثابت کرد که می توان از محور هایی استفاده کرد که به کمک مجموعه ای نامتناهی از توابع سینوس وار ساخته می شوند. به عبارت

دیگر فوریه نشان داد که یک تابع را می توان بوسیله حاصل جمع بی نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $Sin(ax)$ و $Cos(ax)$ نمایش داد:

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

که در آن

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx \quad \text{و} \quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(kx)dx \quad \text{و} \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(kx)dx .$$

**مثال 1-4 -1-** اگر $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos(x))$ ، بدیهی است که تابع متناوب با دوره تناوب $\pi$ است. بنابراین $a_0=0,b_n=0$ و

$$a_n=\tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos(x))\cos nxdx$$

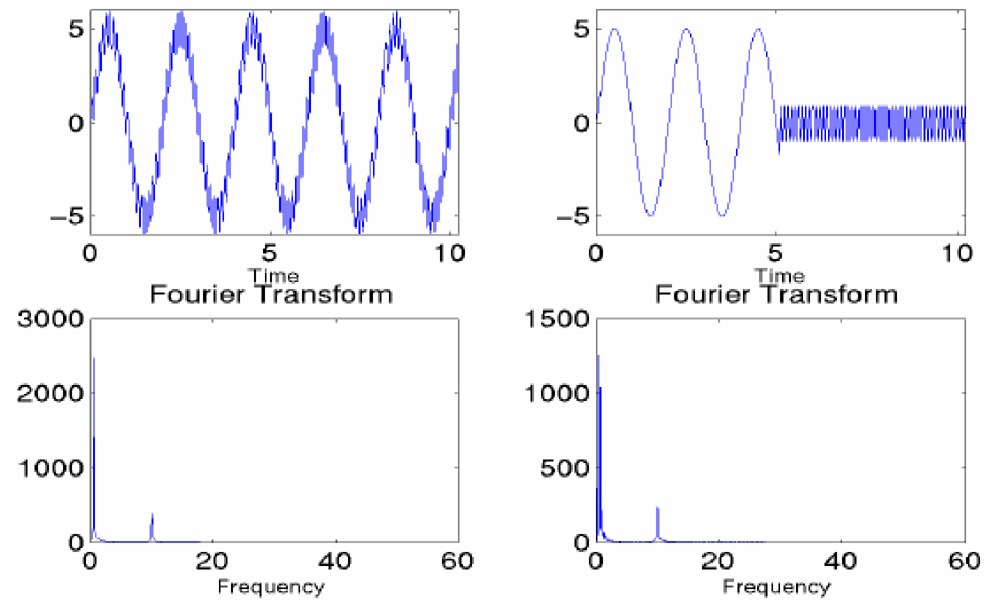
$$=\tfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx-\tfrac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nxdx=\tfrac{4}{n\pi}\sin\tfrac{n\pi}{2},n\in N$$

بنابراین

$$\operatorname{sgn}(\cos(x))=\tfrac{4}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\tfrac{n\pi}{2}\cos nx=\tfrac{4}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x$$

*پایه های فوریه* بصورت ابزارهایی اساسی، با کاربردهای فوق العاده متواتر در علوم، در آمده اند، زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع و در نتیجه کمیت های فیزیکی فراوانی بکار می روند. با گذشت زمان ضعف *پایه های فوریه* نمایان شد. استفاده از *بسط فوریه* برای توابع با سیگنالهای گذرا که روی بخش بزرگی از دامنه خود صفر هستند، مناسب نیست. زیرا تعداد زیادی از *مؤلفه های فوریه* (موجهای سینوسی) لازم است تا بتوان يك ناپیوستگی را نمایش داد.

علاوه بر آن *بسط فوریه* فقط محتوای فرکانسی سیگنال ها را نمایش می دهد، در حالیکه معلوم نمی کند هر فرکانس در چه زمانی اتفاق افتاده است. در مورد *سیگالهای مانا*، این ویژگی مشکلی ایجاد نمی کند، اما دربسط فوریه یک سیگنال نامانا، محتوای فرکانسی سینگال در زمان نامعلوم باقی می ماند. در زیر دو سیگنال *نامانا* و *بسط فوریه* هریک را می بینید. همانطور که مشاهده می شود *روش فوریه* محتوای فرکانسی این دو سیگنال را مانند هم نشان می دهد.

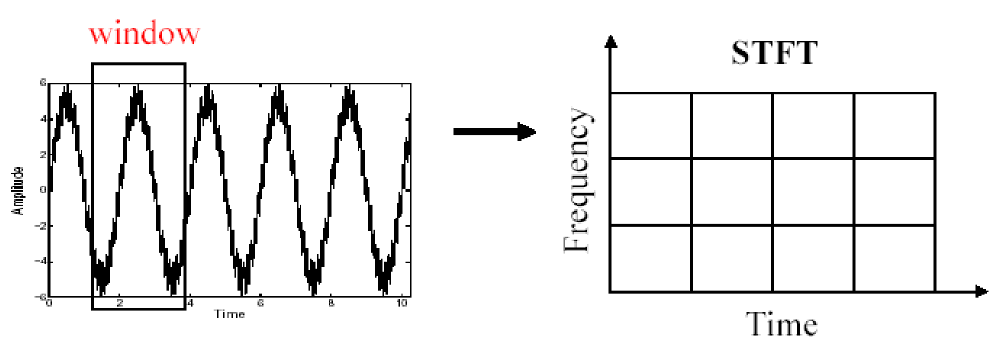



شکل 1-1- دو *سیگنال نامانا* و *بسط فوریه* هریک

در سال ۱۹۴۶ با استفاده از *توابع پنجره ای*، که توسط *دنیس گبر*[15] [44] ارائه شد، *تبدیل فوریه پنجره ای* معرفی شد. در تبدیل *فوریه پنجره ای* سیگنال $x(t)$ در زمان $t$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{STFT}_{\mathrm{X}}^{(\omega)}(t,f)=\int_{t}\left[x(t)\bullet\omega^{*}(t-t')\right]\bullet e^{-j2\pi\ t\ f}\,dt$$

که در آن $\omega^{*}(t-t')$ *پنجره* تعریف شده روی سیگنال $x(t)$ از زمان $t$ تا $t'$ است. اساس این روش به این ترتیب است که در این *روش پنجره ای* مانند $\omega^{*}$ روی سیگنال قرار گرفته و در طول سیگنال (روی تمام مقادیر $t$) پیش می رود.




شکل 2-1-عملکرد *روش فوریه پنجره ای*

[15] Denis Gabor

این روش محتوای فرکانسی سیگنال در زمان را کاملا مشخص می کند، اما عیب بزرگ آن، وابستگی این روش به ابعاد *پنجره* انتخاب شده است.در واقع سیستم معرفی شده توسط *گابر*، تشکیل یک قالب یا یک پایه در فضای $L^2(R)$ می دهد. اگر این سیستم بخواهد در فضای $L^2(R)$ باشد، نمی تواند محتوای فرکانسی سیگنال در زمان را کاملا مشخص کند به این ترتیب که اگر *پنجره* دارای ابعاد کوچک باشد، این تبدیل در محتوای فرکانس و اگر پنجره دارای ابعاد بزرگ باشد، درمحتوای زمان ضعیف عمل می کند.( *اصل عدم قطعیت ایزنبرگ*[16]) برای مطالعه بیشتر در این زمینه به *ویداکوویک*[17] [100] مراجعه کنید.

*هار* اولین کسی بود که در سال ۱۹۰۹، به *موجک ها* اشاره کرد. اساس کار *هار* به این صورت بود که او برای تقریب یك تابع پیوسته مانند $f$ در بازه $[0,1]$ از یك تابع پله ای واحد مانند $\varphi_0(x)$ شروع کرد و با انتقال هر زوج پله مجاور به صورت زیر :

$$\varphi_0(x)=1_{0\le x\le 1}=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=1_{0\le x<\frac{1}{4}}-1_{\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}}=\begin{cases}1 & 0\le x\le \frac{1}{4}\\ -1 & \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$$\varphi_1(x)=1_{0\le x<\frac{1}{2}}-1_{\frac{1}{2}\le x<1}=\begin{cases}1 & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\le x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

وبه همین ترتیب

$$\varphi_n(x)=1_{\frac{k}{2^j}\le x<\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}}-1_{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}\le x<\frac{k+1}{2^j}}$$

[16] Heisenberg's uncertainty principle
[17] Vidacovic