فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

یکی از مباحث مهم آمار که همیشه مورد توجه و علاقه محققان بوده، مقایسه دو توزیع یا چگالی است که این مقایسه از طریق مقایسه شاخص هایی مانند میانگین، پراکندگی، چولگی، کشیدگی و ... انجام شده است. مان و ویتنی (۱۹۴۸) روش دیگری را برای مقایسه دو توزیع مطرح کردند. آنها برای یک شاخص رابطه $F \leq G$ را معرفی کردند که بطور دقیق تر می‌گوید F در آن شاخص کمتر از G است. امروزه از این ایده با عنوان "ترتیب تصادفی" یاد می شود، این موضوع توسط بیرن بام (۱۹۴۸) در مطالعه کشیدگی مورد استفاده قرار گرفت. به مرور زمان ترتیب های تصادفی زیادی توسط محققان معرفی شدند و خواص و ویژگی های آنها مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. ترتیب های تصادفی مهمی توسط لی من (۱۹۵۵)، ون زویت (۱۹۶۴) و بیکل و لی من (۱۹۷۵) ارائه شد. از جمله معروفترین ترتیب های تصادفی می‌توان ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب تصادفی نرخ خطر، ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس و ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی را نام برد. برای مطالعه خواص و ویژگی های ترتیب های تصادفی و ارتباط آنها با یکدیگر می توان به کتاب های لی من (۱۹۵۹)، مارشال و اولکین (۱۹۷۹)، راس (۱۹۹۶)، مولر و استوین (۲۰۰۲) و شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) مراجعه کرد. منابع ذکر شده معتبرترین منابع در زمینه ترتیب های تصادفی هستند.

در سال های اخیر در گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد پایان نامه هایی در زمینه ترتیب های تصادفی و کاربردهای آنها تدوین شده است از جمله اکبری (۱۳۸۳) و جراحی فریز (۱۳۸۸).

ترتیب های تصادفی کل زمان آزمون [۱] (TTT) و کل زمان آزمون تعمیم یافته [۲] ($GTTT$) برای نخستین بار بطور جدی توسط بارلو، بارتالومو، برمنر و برانک (۱۹۷۲) مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت و پس از آن بارلو و داکسوم (۱۹۷۲) برخی از خواص ترتیب تصادفی TTT و رابطه آن با ترتیب محدب و همچنین کاربردهایی از آن را بیان کردند. در ادامه تحقیقات روی این ترتیب تصادفی بارتازویچ (۱۹۸۶) و کلفسجو (۱۹۸۶) کاربردهایی از تبدیل TTT را در نظریه قابلیت اعتماد بیان کردند. سپس ابرامور و خاکیلو (۱۹۸۷) آزمونی برای میانگین باقیمانده عمر بر اساس تبدیل TTT انجام دادند. نیت و سامانیگو(۱۹۹۲) ارتباط تبدیل TTT با مفهوم $IFRA$ و وی (۱۹۹۲) ارتباط آن را با مفهوم IFR مورد مطالعه قرار دادند. بارتازویچ (۱۹۹۵) ارتباط ترتیب TTT را با ترتیب ستاره و ترتیب محدب نشان داد. پس از آن کسورجو و یو (۱۹۹۷) توانستند برآوردی از تبدیل TTT برای مشاهدات مانا بدست آورند. ناپو و اسپزچینو (۱۹۹۸) برخی از خواص منحنی TTT و پرز و همکاران (۱۹۹۸) ارتباط منحنی TTT و منحنی لورنس را مورد مطالعه قرار دادند.

در سال های اخیر نیز مطالعه در مورد این ترتیب تصادفی و رابطه آن با سایر ترتیب‌های تصادفی مورد توجه محققان قرار گرفته است. به عنوان مثال کوچار و همکاران (۲۰۰۲) ارتباط ترتیب تصادفی TTT با ترتیب تصادفی EW را بررسی کردند و کاربردهایی از این ترتیب ها را در نظریه قابلیت اعتماد ارائه دادند. لی و شیکد(۲۰۰۴, ۲۰۰۷) ارتباط ترتیب

[۱] Total Time on Test

[۲] Generelized Total Time on Test

تصادفی TTT با ترتیب تصادفی EW را نشان دادند. بلزونس و همکاران (۲۰۰۵) آزمون هایی را برای ترتیب TTT معرفی کرده‌اند. بارتازویچ و بنداچ (۲۰۰۹) نیز برخی از خواص ترتیب های تصادفی TTT و $GTTT$ را معرفی کرده‌اند و سرانجام کورز و استوت (۲۰۰۹) نمایش بهادری تبدیل TTT را مورد مطالعه قرار داده است.

در فصل اول این پایان نامه برخی از مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در پایان نامه معرفی و به اختصار مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل دوم ابتدا ترتیب تصادفی TTT بر اساس شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) و مقاله لی و شیکد (۲۰۰۴) معرفی می شود. ویژگی های این ترتیب تصادفی، ارتباط آن با سایر ترتیب ها و همچنین کاربرد آن بر اساس مقالات کوچار و همکاران (۲۰۰۲) و فنگ یاو (۲۰۰۹) بیان می شود.

در فصل سوم در راستای مقاله لی و شیکد (۲۰۰۷) ترتیب تصادفی $GTTT$ به عنوان تعمیمی از ترتیب تصادفی TTT معرفی شده و کاربرد هایی از این ترتیب تصادفی در بیمه و نظریه قابلیت اعتماد بیان می شود. در ادامه با توجه به مقالات بارتازویچ و بنداچ (۲۰۰۹) و فنگ یاو (۲۰۰۹) به بررسی ویژگی های ترتیب تصادفی $GTTT$ و ارتباط آن با سایر ترتیب های تصادفی می پردازیم.

در فصل چهارم نیز پس از معرفی آزمون هایی برای مشخصه سازی ترتیب تصادفی TTT بر اساس مقاله بلزونس و همکاران (۲۰۰۵) کارایی این آزمون ها را مورد بررسی قرار می دهیم.

نتیجه گیری و آینده تحقیق پایان بخش مطالب این نوشته خواهد بود.

نمادها

تابع نرخ شکست .... $r(t)$

تابع میانگین باقیمانده عمر .... $m(t)$

ترتیب تصادفی معمولی .... $\leq_{st}$

ترتیب تصادفی نرخ خطر .... $\leq_{hr}$

ترتیب تصادفی نرخ درستنمایی .... $\leq_{lr}$

ترتیب تصادفی میانگین باقیمانده عمر .... $\leq_{mrl(dmrl)}$

ترتیب تصادفی میانگین باقیمانده عمر نزولی .... $\leq_{dmrl}$

ترتیب تصادفی محدب (مقعر) .... $\leq_{cx(cv)}$

ترتیب تصادفی محدب صعودی (مقعر صعودی) .... $\leq_{icx(icv)}$

ترتیب تصادفی تبدیل محدب .... $\leq_{c}$

ترتیب تصادفی پراکندگی .... $\leq_{disp}$

ترتیب تصادفی ستاره .... $\leq_{*}$

ترتیب تصادفی TTT .... $\leq_{ttt}$

ترتیب تصادفی $GTTT$ .... $\leq_{ttt}^{h}$

ترتیب تصادفی EW .... $\leq_{ew}$

ترتیب تصادفی توقف زیان .... $\leq_{sl}$

نرخ شکست صعودی (نزولی) .... $IFR(DFR)$

میانگین نرخ شکست صعودی (نزولی) .... $IFRA(DFRA)$

میانگین باقیمانده عمر صعودی (نزولی) .... $IMRL(DMRL)$

جدید بهتر از کارکرده .... NBU

جدید بدتر از کارکرده .... NWU

جدید بهتر از کارکرده در میانگین .... $NBUE$

جدید بدتر از کارکرده در میانگین .... $NWUE$

جدید بهتر از کارکرده در ترتیب کل زمان آزمون .... $NBUT$

جدید بدتر از کارکرده در ترتیب کل زمان آزمون .... $NWUT$

متغیر تصادفی حالت وزنی .... X_w

تابع وزنی .... $w(.)$

منحنی لورنتس متغیر تصادفی X .... $L_X(p)$

تابع ساختار سیستم .... ϕ

تبدیل TTT مرتبط با F .... $H_F^{-1}(p)$

تبدیل EW مرتبط با F .... $W_X(p)$

تبدیل توقف زیان مخاطره X .... $\Pi_X(t)$

مقدار کلی تغییر قیمت .... P_3

تبدیل $GTTT$ مرتبط با F .... $H_F^{-1}(p, h)$

تبدیل $GTTT$ توزیع F نسبت به G .... $H_F^{-1}(p, F|G)$

تابع تغییر شکل داده .... ψ

میزان پرداخت اضافی برای یک قرارداد بیمه .... ρ

فهرست جداول

فصل ۱

ترتیب های تصادفی یک متغیره

۱.۱ مقدمه

ترتیب های تصادفی و نامساوی ها در طی چهل سال اخیر مورد توجه و استفاده فراوان قرار گرفته اند و در برخی از زمینه های آمار و احتمال از جمله نظریه قابلیت اعتماد، نظریه صف، آنالیز بقا و.... و همچنین در اقتصاد و بیمه و علم مدیریت کاربرد زیادی دارند. محققان زیادی در زمینه ترتیب های تصادفی مطالعه کرده اند که می توان از لی من (۱۹۵۵)، ون زویت (۱۹٦۴)، مارشال و اولکین (۱۹۷۹)، راس (۱۹۹٦)، مولر و استوین (۲۰۰۲) و شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) و ... نام برد.

ساده ترین راه برای مقایسه دو تابع توزیع، مقایسه میانگین های آنهاست. اما این مقایسه بر پایه دو عدد است و نمی تواند حاوی اطلاعات زیادی باشد. به علاوه برای برخی توزیع ها میانگین وجود ندارد. راه دیگری که برای مقایسه دو توزیع با میانگین های برابر می تواند مورد استفاده قرار گیرد، مقایسه پراکندگی و انحراف استاندارد دو توزیع است. اما در عمل به دنبال معیار هایی برای مقایسه دو توزیع هستیم که حاوی اطلاعات بیشتری باشد. بدین منظور ایده ترتیب های تصادفی نخستین بار توسط مان و ویتنی (۱۹۴۸) مطرح شد و پس از آن به سرعت رشد کرد و ترتیب های تصادفی زیادی توسط محققان معرفی شدند و ویژگی های آنها مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

در این فصل ابتدا به معرفی ترتیب های تصادفی مورد نیاز در این پایان نامه می پردازیم و در ادامه برخی تعاریف و ویژگی های متغیر های تصادفی را به طور خلاصه بیان می کنیم.

۲.۱ ترتیب های تصادفی

همانطور که اشاره شد ترتیب های تصادفی با در نظر گرفتن یک ویژگی از تابع توزیع به صورت رابطه $\leq$ تعریف می شود. مطالب این بخش از کتاب شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) گرفته شده است.

اگر Z, Y, X سه متغیر تصادفی با تابع توزیع به ترتیب K, G, F باشند آنگاه هر ترتیب تصادفی باید در سه اصل زیر صدق کند.

۱− $F \leq G$

۲− $G \leq F \Longrightarrow F =_{st} G \quad , \quad F \leq G$ که در آن $=_{st}$ به معنای برابری دو توزیع است.

۳− $G \leq K \Longrightarrow F \leq K \quad , \quad F \leq G$

یکی از مهمترین ترتیب های تصادفی ترتیب تصادفی معمولی است که در حالت تساوی به مفهوم همتوزیع بودن متغیر های تصادفی می باشد.

تعریف ۱−۱: فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی با تابع توزیع به ترتیب G, F باشند. اگر برای $x \in (-\infty, \infty)$ داشته باشیم

$$P(X > x) \leq P(Y > x) \qquad (۱-۱)$$

آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی معمولی است و با نماد $X \leq_{st} Y$ نشان می دهیم.

می دانیم $P(X > x) = \bar{F}(x)$ بنابراین بنا به رابطه (۱ − ۱) گوییم $X \leq_{st} Y$ اگر و تنها اگر $\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x)$.

ترتیب تصادفی معمولی دارای ویژگی های مهم و جالبی است که برخی از آنها را در قالب دو قضیه زیر بیان می کنیم.شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)

قضیه ۱–۱: اگر Y, X دو متغیر تصادفی باشند که $X \leq_{st} Y$ و Ψ یک تابع صعودی (نزولی) باشد آنگاه

$$\Psi(X) \leq_{st} (\geq_{st})\Psi(Y).$$

قضیه ۱–۲: فرض کنید $X_n, ..., X_۲, X_۱$ و $Y_n, ..., Y_۲, Y_۱$ دو نمونه تصادفی به ترتیب از Y, X باشند. اگر برای $i = ۱, ۲, ..., n$ داشته باشیم $X_i \leq_{st} Y_i$ آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{n} X_i \leq_{st} \sum_{i=۱}^{n} Y_i.$$

و همچنین برای هر تابع صعودی $\Psi : R^n \longrightarrow R$ داریم

$$\Psi(X_۱, ..., X_n) \leq_{st} \Psi(Y_۱, ..., Y_n).$$

مثال ۱–۱: اگر Y, X دو متغیر تصادفی نمایی به ترتیب با پارامترهای $\theta_۲, \theta_۱$ با شند به طوریکه که $\theta_۱ > \theta_۲$ آنگاه $\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x)$ و در نتیجه $X \leq_{st} Y$.

تعریف ۱–۲: فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی با تابع چگالی به ترتیب g, f باشند. اگر $\frac{g(x)}{f(x)}$ نسبت به x غیر نزولی باشد آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی است و با نماد $X \leq_{lr} Y$ نشان می دهیم.

با توجه به غیر نزولی بودن $\frac{g(x)}{f(x)}$ نسبت به x نتیجه می گیریم که اگر برای هر $x \leq y$،

$$f(x)g(y) \geq f(y)g(x),$$

آنگاه

$$X \leq_{lr} Y$$

مثال ۱ــ۲: اگر Y, X دو متغیر تصادفی از توزیع گاما با پارامترهای به ترتیب (α, β_1) و (α, β_2) با شند به طوریکه که $\beta_2 < \beta_1$ آنگاه $\frac{g(x)}{f(x)} = (\frac{\beta_2}{\beta_1})^{\alpha} e^{-x(\beta_2 - \beta_1)}$ نسبت به x صعودی است و در نتیجه $X \leq_{lr} Y$.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع و تابع چگالی به ترتیب f, F باشد. تابع نرخ شکست متغیر تصادفی X را با $r(x)$ نشان می دهیم که به صورت زیر تعریف می شود

$$r(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t \mid X > t)}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t)}{\Delta t P(X > t)}$$

در نتیجه

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

که $\bar{F}(t)$ تابع بقای متغیر تصادفی X است.

تعریف ۱ــ۳: فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع نرخ شکست به ترتیب $r_G(t), r_F(t)$ باشند. اگر

$$r_F(x) \geq r_G(x) \qquad , \qquad \forall x \in R^+,$$

آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی نرخ شکست است و با نماد $X \leq_{hr} Y$ نشان می دهیم.

مثال ۱—۳: اگر Y, X دو متغیر تصادفی یکنواخت به ترتیب روی بازه های $(0, \theta_1)$ و $(0, \theta_2)$ با شند به طوریکه $\theta_1 < \theta_2$ آنگاه با یک محاسبه ساده داریم $r_F(x) = \frac{1}{\theta_1 - x}$ و $r_G(x) = \frac{1}{\theta_2 - x}$ بنابراین $r_F(x) > r_G(x)$ و در نتیجه $X \leq_{hr} Y$.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع بقای $\bar{F}$ و میانگین متناهی μ باشد. تابع میانگین باقیمانده عمر متغیر تصادفی X را با $m(t)$ نشان می دهیم که به صورت زیر تعریف می شود

$$m(t) = \begin{cases} E[X-t|X>t] & t \leq t^* \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که در آن $t^* = sup\{t : \bar{F}(t) > 0\}$.

تعریف ۱—۴: فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی با توابع میانگین باقیمانده عمر به ترتیب l, m باشند

الف) اگر برای $t \in R$، $m(t) \leq l(t)$ آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی میانگین باقیمانده عمر است و با نماد

$$X \leq_{mrl} Y,$$

نشان می دهیم.

ب) اگر برای $u \in [0, 1]$ رابطه $\frac{l(G^{-1}(u))}{m(F^{-1}(u))}$ نسبت به u صعودی باشد آنگاه گوییم X در ترتیب تصادفی میانگین باقیمانده عمر نزولی $(DMRL)$ کوچکتر از Y است و با نماد

$$X \leq_{dmrl} Y,$$

نشان می دهیم.

بطور معادل گوییم $X \leq_{dmrl} Y$ اگر و تنها اگر $\frac{\frac{1}{E(Y)}\int_{G^{-1}(p)}^{\infty}\bar{G}(u)du}{\frac{1}{E(X)}\int_{F^{-1}(p)}^{\infty}\bar{F}(u)du}$ برای $u \in [0, 1]$ صعودی باشد.

تعریف ۱—۵: فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی باشند

الف) اگر برای همه توابع محدب (مقعر) $\Phi : R \longrightarrow R$ داشته باشیم $E(\Phi(X)) \leq E(\Phi(Y))$ آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی محدب (مقعر) است و به صورت

$$X \leq_{cx(cv)} Y,$$

نشان می دهیم.

ب) اگر برای همه توابع محدب صعودی (مقعر صعودی) $\Phi : R \longrightarrow R$ داشته باشیم $E(\Phi(X)) \leq E(\Phi(Y))$ آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی محدب صعودی (مقعر صعودی) است و با نماد

$$X \leq_{icx(icv)} Y,$$

نشان می دهیم.

تعریف ۱—۶: فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی با توابع توزیع به ترتیب G, F باشند. همچنین فرض کنید G^{-1}, F^{-1} معکوس از راست پیوسته G, F باشند. اگر برای $0 < \alpha \leq \beta < 1$ داشته باشیم $F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha) \leq G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha)$ آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی پراکندگی است و با نماد

$$X \leq_{disp} Y,$$

نشان می دهیم.

بطور معادل گوییم $X \leq_{disp} Y$ اگر و تنها اگر $G^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\alpha)$ برای $\alpha \in (0, 1)$ صعودی باشد.