بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

درجات نمایش‌های شبه جایگشتی مینیمال p—گروههای متناهی

قدرت غفارزاده

دانشکدهٔ علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه دکتری تخصصی

استاد راهنما:

دکتر هوشنگ بهروش

شهریور ۱۳۸۸

پایان نامه آقای قدرت غفارزاده دانشجوی دکتری ریاضی گرایش گروههای متناهی به تاریخ ۸۸/۶/۳۱ شماره ۸-۱ع مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۹/۵ نوزده نیم قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر هوشنگ بهروش

۲- استاد مشاور : دکتر حمید موسوی

۳- داور خارجی : دکتر محمدرضا درفشه

۴- داور خارجی : دکتر محمد شهریاری

۵- داور داخلی : دکتر علی سرباز جانفدا

۶- داور داخلی : دکتر محسن قاسمی

۷- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سعید استادباشی

۸۸/۷/۱

تقدیم به:

آستان حضرت دوست که هر چه دارم از دریای بیکران لطف اوست

پدرم که تمام موفقیتم را مدیون نان حلالی می‌دانم که برای ما فراهم کرد

مادر دلسوز و فداکارم که تمام زندگیش را وقف فرزندانش کرده است

برادرانم صمد و حبیب غفارزاده و خواهرم لاله غفارزاده

تشکر و قدردانی

بی‌تردید نگارش این مجموعه مرهون زحمات بی‌شائبه و بی‌دریغ استاد ارجمندی است که همواره و در همه حال در نهایت صبر و شکیبایی به یاریم شتافته و راهنمای بسیاری از مسایل بوده‌اند. به همین لحاظ مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را نسبت به استاد ارجمندم جناب آقای دکتر بهروش ابراز می‌دارم.

همچنین از آقایان دکتر محمدرضا درفشه و دکتر محمد شهریاری (داوران خارجی پایان‌نامه)، دکتر علی سرباز جانفدا و دکتر محسن قاسمی (داوران داخلی پایان‌نامه)، دکتر سعید استادباشی (نماینده تحصیلات تکمیلی)، دکتر اذانچیلر و سایر اساتید گروه ریاضی تشکر می‌نمایم.

از همکلاسی و دوست عزیزم آقای دکتر محمد حسن عباسپور که در بسیاری از مسایل مرا یاری دادند و نکات آموزنده‌ای را برای بهبود نگارش پایان‌نامه به من گوشزد کردند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

نمیدانم پس از مرگم چه خواهد شد.
نمیخواهم بدانم کوزه گر از خاک اندامم
چه خواهد ساخت.
ولی بسیار مشتاقم،
که از خاک گلویم سوتکی سازد
گلویم سوتکی باشد
بدست کودکی گستاخ و بازیگوش
واو
یکریز و پی در پی
دم خویش را بر گلویم سخت بفشارد
بدین سان بشکند در من
سکوت مرگبارم را...

دکتر علی شریعتی

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. فرض کنید $p(G)$ کوچکترین درجه نمایش جایگشتی باوفای G باشد. همچنین فرض کنید $q(G)$ و $c(G)$، به ترتیب کوچکترین درجات نمایشهای باوفای G بوسیله ماتریسهای شبه جایگشتی روی میدان اعداد گویای $\mathbb{Q}$ و میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشند.

هدف این پایان‌نامه، مطالعه ارتباط سه عدد فوق در رده p—گروههای متناهی می‌باشد. در این راستا ابتدا الگوریتم‌های ساده شده برای محاسبه سه عدد فوق در p—گروهها بدست می آوریم. سپس به بررسی این سوال می‌پردازیم که آیا p—گروهی مانند G وجود دارد که $c(G) \neq q(G) \neq p(G)$. با توجه به اینکه اگر p عدد اول فرد باشد، آنگاه همواره $c(G) = q(G)$. لذا برای یافتن جوابی برای سوال فوق باید توجه خود را به ۲—گروهها معطوف کنیم. از این رو سه عدد فوق را برای گروههای از مرتبه $۲^{۶}$ محاسبه می‌کنیم. در این گروهها دیده می‌شود که همواره $q(G) = p(G)$. سپس نتیجه فوق را به کل p—گروهها تعمیم می‌دهیم و در آنجا نشان می‌دهیم که اگر $p = ۲$، آنگاه $q(G) = p(G)$ و اگر p عدد اول فرد باشد، آنگاه $c(G) = q(G) = p(G)$. در قسمت آخر این پایان‌نامه، سه عدد ذکر شده را در گروههای H، K و $H \times K$ مورد مطالعه قرار خواهیم داد و در این راستا نشان خواهیم داد که علیرغم اینکه در حالت کلی روابط زیر برقرار نیستند، ولی در p—گروههای غیربدیهی، هر سه رابطه زیر برقرار می‌باشند.

$$p(H \times K) = p(H) + p(K),$$

$$q(H \times K) = q(H) + q(K),$$

$$c(H \times K) = c(H) + c(K).$$

۱ مقدمه

بنا بر قضیه کیلی [۱]، هر گروه دلخواه G را می‌توان در گروه متقارن S_G نشاند. بنابراین اگر G گروه متناهی با n عضو باشد، آنگاه گروه G را می‌توان در S_n نشاند. ولی در اکثر موارد G را می‌توان در گروههای متقارن S_n با $n < |G|$ نیز نشاند. از این رو مطالعه کوچکترین عدد طبیعی مانند n به طوری که گروه G را بتوان در S_n نشاند، جالب به نظر می‌رسد. به ویژه اینکه برخی افراد همچون برکویچ [۲]، جانسون [۳] و رایت [۴] در [۸]، [۱۴] و [۱۹]، با استفاده از چنین عددی به مطالعه گروههای متناهی پرداخته‌اند (عدد فوق را با علامت $p(G)$ نشان خواهیم داد). البته تمام مطالعات ایشان در این زمینه با استفاده از الگوریتم‌های داده شده توسط زیرگروههای یک گروه و صرفا با استفاده از نظریه گروه بوده است. ولی می‌توان ۲ مفهوم دیگر $q(G)$ و $c(G)$ را نیز با استفاده از نظریه نمایش و سرشت، بیان کرد که ارتباط نزدیکی با مفهوم اول دارند و در بسیاری از موارد کرانهای پائین جالبی برای $p(G)$ می‌باشند. همچنین در برخی موارد به سادگی محاسبه می‌شوند. لذا مفاهیم $q(G)$ و $c(G)$، اگرچه تاریخچه مستقلی دارند، ولی می‌توانند برای محاسبه $p(G)$ بسیار ارزشمند باشند. از این رو یافتن ارتباط سه عدد فوق در رده‌های مختلف گروههای متناهی با اهمیت خواهد بود. هدف این پایان‌نامه نیز مطالعه ارتباط سه مفهوم فوق در رده p—گروههای متناهی می‌باشد.

ابتدا تعریف دقیق مفاهیم ذکر شده را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ الف) ماتریس مربعی A روی میدان F، ماتریس جایگشتی [۵] نامیده می‌شود، هرگاه درایه‌های

---

[۱] Cayley

[۲] Berkovich

[۳] Johnson

[۴] wright

[۵] permutation matrix

آن ۰ و ۱ باشند و در هر سطر و هر ستون آن فقط یک ۱ وجود داشته باشد.

ب) ماتریس مربعی A روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ (به همین ترتیب روی هر زیرمیدان $\mathbb{C}$)، ماتریس شبه جایگشتی[۶] نامیده می‌شود، هرگاه دارای اثر[۷] صحیح نامنفی باشد.

با توجه به تعریف ۱.۱، نتیجه می‌شود هر ماتریس جایگشتی روی $\mathbb{C}$، یک ماتریس شبه جایگشتی است.

تعریف ۲.۱ فرض کنید G یک گروه متناهی باشد.

الف) درجه کوچکترین نمایش جایگشتی باوفای G (یا یک نمایش باوفای G توسط ماتریسهای جایگشتی) را با علامت $p(G)$ نشان می‌دهیم.

ب) درجه کوچکترین نمایش باوفای G بوسیله ماتریسهای شبه جایگشتی روی میدان اعداد گویای $\mathbb{Q}$ را با علامت $q(G)$ نشان می‌دهیم.

ج) درجه کوچکترین نمایش باوفای G بوسیله ماتریسهای شبه جایگشتی روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ را با علامت $c(G)$ نشان می‌دهیم.

د) هر نمایش جایگشتی باوفای G از درجه $p(G)$ را یک نمایش جایگشتی باوفای مینیمال G می‌نامیم. به همین ترتیب می‌توان نمایشهای شبه جایگشتی باوفای مینیمال روی $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{C}$ را نیز تعریف کرد.

مفاهیم $q(G)$ و $c(G)$ توسط هارتلی[۸] در [۹] معرفی شده‌اند و توسط بهروش و افراد دیگری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

با توجه به مطالب بالا، خلاصه‌ای از ۶ فصل موجود در این پایان‌نامه را ارائه می‌نماییم. در فصل ۱

[۶] quasi-permutation matrix

[۷] trace

[۸] Hartley

تاریخچه مطالب و کلیات کارهایی که انجام خواهیم داد، بیان می‌شود. در فصل ۲، تعاریف و مفاهیم مقدماتی درباره گروههای پوچتوان (به ویژه، p–گروهها و گروههای آبلی) و برخی مفاهیم مورد نیاز از نظریه سرشت را بیان خواهیم کرد. در فصل ۳، ابتدا خلاصه‌ای از مطالب و الگوریتم‌هایی را می آوریم که قبلاً راجع به درجات نمایشهای شبه جایگشتی باوفای مینیمال بیان شده‌اند، سپس با استفاده از مطالب فوق، الگوریتم‌هایی ساده ولی مشابه به صورتهای اولیه بیان می‌کنیم. در قسمت آخر فصل ۳، توجه خود را به p–گروهها معطوف می‌کنیم و در آنجا روی تعداد جملات مجموعها و همچنین برخی خواص زیرگروههای موجود در الگوریتم‌های مربوط به p–گروهها بحث خواهیم کرد.

در ادامه این پایان‌نامه و در فصلهای ۴ و ۵ به بررسی ارتباط اعداد $p(G)$، $q(G)$ و $c(G)$ در رده p–گروههای متناهی می‌پردازیم. به ویژه اینکه می‌خواهیم سوال زیر را مورد مطالعه قرار دهیم.

سوال ۳.۱ فرض کنید G یک p–گروه متناهی باشد. گروه G را طوری پیدا کنید که

$$c(G) \neq q(G) \neq p(G).$$

در حقیقت بنا بر نتیجه ۹.۳، اگر p یک عدد اول فرد باشد، آنگاه $c(G) = q(G)$. لذا برای حل مسئله فوق باید حالت $p = ۲$ را در نظر گرفت. بنابراین می‌توان سوال فوق را به صورت زیر نیز بیان کرد:

برای یک ۲–گروه مانند G، در چه حالتی نامساوی $c(G) < q(G) < p(G)$ برقرار است؟

چون ۲–گروههای از مرتبه کوچکتر یا مساوی ۳۲ قبلا در [۵] بررسی شده‌اند و در آنجا $q(G) < p(G)$ اتفاق نمی‌افتد. لذا برای یافتن جوابی برای سوال فوق به بررسی گروههای از مرتبه ۶۴ می‌پردازیم و در فصل ۴ نشان می‌دهیم که همانند بسیاری از p–گروههای بررسی شده در [۲]—[٦]، نامساوی $q(G) < p(G)$ هرگز در گروههای از مرتبه ۶۴ رخ نمی‌دهد. بنابراین این احتمال وجود دارد که همواره در p–گروهها، رابطه

$p(G) = q(G)$ برقرار باشد. در این راستا در فصل ۵ نشان خواهیم داد که اگر G یک p—گروه باشد، آنگاه در حالت ۲ $= p$، رابطه $q(G) = p(G)$ برقرار است و اگر p یک عدد اول فرد باشد یا تمام اندیس‌های شور سرشتهای تحویلناپذیر ۲—گروه G برابر ۱ باشند، آنگاه $c(G) = q(G) = p(G)$.

فصل آخر این پایان‌نامه به بررسی ارتباط درجات ذکر شده برای گروههای غیربدیهی H و K با $H \times K$ اختصاص دارد. اگرچه روابط

$$p(H \times K) = p(H) + p(K),$$

$$q(H \times K) = q(H) + q(K),$$

$$c(H \times K) = c(H) + c(K),$$

همانطور که در مثالهای اول فصل ٦ دیده می‌شود، در حالت کلی برقرار نیستند، ولی نشان داده می‌شود که همیشه رابطه اول برای گروههای پوچتوان و روابط دوم و سوم برای p—گروهها برقرار هستند. لازم به ذکر است که رابطه اول در حالتی که H و K، گروههای پوچتوان باشند، قبلا توسط رایت در [[۱۹]، قضیه ۲] به صورت جداگانه اثبات شده است. همچنین همانند مثال ۲.٦، می‌توان نشان داد که روابط دوم و سوم برای همه گروههای پوچتوان برقرار نیستند، ولی در فصل ٦ نشان خواهیم داد که اگر H و K، p—گروههای غیربدیهی، به ازای یک p یکسان باشند، آنگاه روابط دوم و سوم نیز همواره برقرار خواهند بود.

۲ تعاریف و لم‌های مقدماتی

در قسمت اول این فصل، برخی از مفاهیم مورد نیاز از عمل گروه روی مجموعه‌ها را بیان می‌کنیم که در بررسی نمایشهای جایگشتی یک گروه متناهی استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲ فرض کنید $H \leq G$ و تعریف کنید $H_G = \bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg$. در این صورت به وضوح $H_G \trianglelefteq G$ و اگر $K \leq H \leq G$ که در آن $K \trianglelefteq G$، آنگاه $K \leq H_G$. بنابراین H_G بزرگترین زیرگروه نرمال منحصربفرد G است که مشمول در H می‌باشد. زیرگروه H_G را هسته[۹] H در G می‌نامند.

تعریف ۲.۲ می‌گوئیم گروه G روی مجموعه ناتهی X عمل[۱۰] می‌کند (یا G مجموعه X را جایگشت می‌دهد)، هرگاه به ازای هر $g \in G$ و $x \in X$، عضو منحصربفرد $xg \in X$ متناظر شود به طوری که به ازای هر $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G$ داشته باشیم:

$$(xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$$

$$x1 = x.$$

حال ارتباط بین عمل گروه روی یک مجموعه و گروه متقارن S_X روی X را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۲ الف) فرض کنید گروه G روی مجموعه X عمل کند. در این صورت به ازای هر $g \in G$، یک نگاشت $\rho_g : X \to X$ با ضابطه $\rho_g : x \mapsto xg$ متناظر است که یک جایگشت از مجموعه X می‌باشد. بعلاوه نگاشت $\rho : G \to S_X$ با ضابطه $\rho : g \mapsto \rho_g$ یک همریختی است؛ آن را نمایش جایگشتی[۱۱] G متناظر با عمل گروه داده شده می‌نامند.

[۹] core

[۱۰] action

[۱۱] permutation representation

ب) فرض کنید ρ یک همریختی از G به توی S_X باشد که در آن $X \neq \emptyset$. در این صورت به ازای هر $g \in G$ و $x \in X$ تعریف کنید: $xg = x(g\rho)$. این یک عمل گروه G روی مجموعه X را تعریف می‌کند و نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل، ρ می‌باشد.

اثبات: به [[۱۷]، قضیه ۳.۴] مراجعه کنید. ∎

تعریف ۴.۲ فرض کنید گروه G روی مجموعه X عمل کند. در این صورت می‌گوئیم عمل باوفا[۱۲] است، هرگاه نمایش جایگشتی متناظر G یک به یک باشد.

لم ۵.۲ فرض کنید گروه G روی مجموعه X عمل کند. در این صورت رابطه $\sim$ روی X را به ازای هر $x, y \in G$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x \sim y$ اگر و تنها اگر عضو $g \in G$ موجود باشد بطوریکه $xg = y$.

رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی X است.

اثبات: به [[۱۷]، لم ۶.۴] مراجعه کنید. ∎

تعریف ۶.۲ فرض کنید گروه G روی مجموعه X عمل کند. در این صورت X نسبت به رابطه هم‌ارزی $\sim$، به کلاسهای هم ارزی متمایز افراز می‌شود. کلاسهای هم‌ارزی رابطه $\sim$ را مدارهای[۱۳] عمل می‌نامند. به ازای هر $x \in X$، مدار شامل x را مدار x می‌نامند و به وضوح

$$\text{مدار } x = \{xg : g \in G\}.$$

---

[۱۲] faithful

[۱۳] orbit

تعریف ۷.۲ می‌گوئیم عمل G روی مجموعه X متعدی[۱۴] است هرگاه، عمل فوق فقط یک مدار داشته باشد.

قضیه ۸.۲ اگر H زیرگروهی از اندیس متناهی در G باشد، آنگاه G/H_G را می‌توان در $S_{|G:H|}$ نشاند؛ به‌عبارت دیگر به ازای هر زیرگروه H از اندیس متناهی در G، یک نمایش جایگشتی از گروه G به‌توی $S_{|G:H|}$ با هسته H_G وجود دارد.

اثبات: به [[۱۷]، قضیه ۱۴.۴] مراجعه کنید. ■

در این قسمت برخی از خواص اساسی p–گروهها و گروههای پوچتوان را ذکر می‌کنیم که در بررسی نمایشهای شبه جایگشتی آنها از مطالب ارائه شده استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۹.۲ گروه آبلی A را یک گروه آبلی مقدماتی می‌نامند، هرگاه عدد اول p موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $a^p = ۱$.

قضیه ۱۰.۲ فرض کنید A یک گروه آبلی مقدماتی باشد. در این صورت عدد اول p وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $a^p = ۱$. دو عمل جمع برداری و حاصلضرب اسکالر از میدان $\mathbb{Z}_p$، روی اعضای A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: جمع برداری اعضای A را به صورت ضرب اعضای گروه تعریف می‌کنیم و به ازای هر $\bar{n} \in \mathbb{Z}_p$ و $a \in A$ قرار می‌دهیم $\bar{n}a = a^n$. در این صورت A با اعمال فوق یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{Z}_p$ خواهد بود.

---
[۱۴] transitive

اثبات: به [[۱۷]، قضیه ۴۰.۷] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۱.۲ الف) سری $N_r \geq \ldots \geq N_۲ \geq N_۱$ از زیرگروههای G یک سری مرکزی[۱۵] از G نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $i = ۱, \ldots, r - ۱$، $[N_i, G] \leq N_{i+۱}$ و $N_r \trianglelefteq G$.

از شرط $[N_i, G] \leq N_{i+۱} \leq N_i$ نتیجه می‌شود که به ازای هر $i < r$، $N_i \trianglelefteq G$. بنابراین جملات یک سری مرکزی از G، زیرگروههای نرمال G می‌باشند. همچنین به وضوح شرط $[N_i, G] \leq N_{i+۱}$ با شرط $N_i/N_{i+۱} \leq Z(G/N_{i+۱})$ معادل است.

ب) فرض کنید گروه G دارای یک سری مرکزی با $N_۱ = G$ و $N_r = ۱$ باشد. در این صورت G را یک گروه پوچتوان[۱۶] می‌نامند.

قضیه ۱۲.۲ الف) فرض کنید G یک p-گروه متناهی باشد. در این صورت G پوچتوان است.

ب) فرض کنید G یک گروه پوچتوان باشد. اگر $۱ < K \trianglelefteq G$، آنگاه $[K, G] < K$ و $K \cap Z(G) \neq ۱$.

اثبات: به [[۱۲]، قضیه ۶.۲.۳] مراجعه کنید. ■

قضیه ۱۳.۲ فرض کنید G گروه متناهی باشد. در این صورت G پوچتوان است اگر و تنها اگر G به صورت حاصلضرب مستقیم زیرگروههای سیلوی خود باشد.

اثبات: به [[۱۷]، قضیه ۳.۱۱] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۴.۲ الف) فرض کنید X یک مجموعه مولد گروه G باشد. در این صورت می‌گوییم X یک مجموعه مولد مینیمال گروه G است، هرگاه به ازای هر زیرمجموعه سره Y از X، $\langle Y \rangle$ زیرگروهی سره از G

[۱۵] central series

[۱۶] nilpotent group

باشد.

ب) فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. در این صورت منظور از $d(G)$ عبارت خواهد بود از کوچکترین تعداد از اعضای G که بتوان گروه فوق را توسط آنها تولید کرد.

قضیه ۱۵.۲ فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی مولد باشد که توسط n عضو تولید می‌شود. در این صورت هر زیرگروه H از G می‌تواند توسط m عضو با $m \leq n$ تولید شود.

اثبات: به [[۱۱]، نتیجه ۷.۱.۲] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۶.۲ فرض کنید G گروهی متناهی باشد. در این صورت اشتراک تمام زیرگروههای ماکسیمال گروه G را زیرگروه فراتینی می‌نامند و با علامت $\Phi(G)$ نشان می‌دهند. در حالتی که $G = ۱$، قرار می‌دهیم $\Phi(G) = ۱$.

قضیه ۱۷.۲ فرض کنید G یک p–گروه غیربدیهی باشد. در این صورت

الف) $\Phi(G) = G^pG'$، که در آن $G^p = \langle g^p \ : \ g \in G \rangle$. به علاوه اگر $p = ۲$، آنگاه $\Phi(G) = G^p$.

ب) $\Phi(G)$ کوچکترین زیرگروه نرمال منحصربفرد G است به طوری که $G/\Phi(G)$ آبلی مقدماتی می‌باشد.

ج) فرض کنید $|G/\Phi(G)| = p^d$. در این صورت هر مجموعه مولد مینیمال گروه G دقیقاً دارای d عضو خواهد بود. بنابراین $d = d(G)$.

اثبات: به [[۱۲]، قضایای ۱۴.۳.۳، ۱۵.۳.۳] مراجعه کنید. ■

با توجه به اینکه در فصل ۵، درجه نمایشهای شبه جایگشتی باوفای مینیمال را برای حاصلضربهای مستقیم گروهها مطالعه خواهیم کرد، لذا در این قسمت برخی از خواص حاصلضربهای مستقیم گروهها را بیان می‌کنیم.

قضیه **۱۸.۲** فرض کنید H و K گروههای دلخواه باشند. در این صورت $\Phi(H\times K)=\Phi(H)\times\Phi(K)$.

اثبات: به [[۱۲]، ۹.۳.۳] مراجعه کنید. ■

نتیجه **۱۹.۲** فرض کنید H و K، p-گروههای دلخواه باشند. در این صورت $d(H\times K)=d(H)+d(K)$.

اثبات: با توجه به قضایای ۱۷.۲، قسمت (ج) و ۱۸.۲ می‌توان روابط زیر را نوشت.

$$\begin{aligned} p^{d(H\times K)} &= |(H\times K)/\Phi(H\times K)| = |(H\times K)/\Phi(H)\times\Phi(K)| \\ &= |H/\Phi(H)|\,|K/\Phi(K)| = p^{d(H)+d(K)}. \end{aligned}$$

بنابراین $d(H\times K)=d(H)+d(K)$. ■

تذکر **۲۰.۲** لازم به ذکر است که تساوی موجود در نتیجه ۱۹.۲، همواره برقرار نیست؛ زیرا اگر $1\neq m,n\in\mathbb{N}$ و $(m,n)=1$، آنگاه برای گروههای دوری از مرتبه‌های m و n خواهیم داشت:

$$d(C_m\times C_n)=d(C_{mn})=1<2=d(C_m)+d(C_n).$$

قضیه **۲۱.۲** فرض کنید G_1، ...، G_n زیرگروههایی از گروه G باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) به ازای هر $1\leq i\leq n$، $G_i\trianglelefteq G$.

ب) به ازای هر $2\leq i\leq n$، $(G_1\dots G_{i-1})\cap G_i=1$.

ج) $G=G_1\dots G_n$.

در این صورت $G=G_1\times\dots\times G_n$.

اثبات: به [[۱۲]، قضیه ۳.۹.۱] مراجعه کنید. ■

قضیه ۲۲.۲ گروههای G_i که در آن $i \in I$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$Z(\mathrm{Dr}\prod_{i\in I} G_i) = \mathrm{Dr}\prod_{i\in I} Z(G_i).$$

اثبات: به [[۱۲]، قضیه ۸.۹.۱] مراجعه کنید. ■

قضیه ۲۳.۲ فرض کنید $G = H \times K$. فرض کنید G متناهی است و $(|H|, |K|) = ۱$. در این صورت به ازای هر $L \leq G$، $L = (H \cap L) \times (K \cap L)$.

اثبات: به [[۱۷]، نتیجه ۲۰.۸] مراجعه کنید. ■

در این قسمت برخی از مطالب مورد نیاز از نظریه سرشت را بیان می‌کنیم که در معرفی نمایشهای شبه جایگشتی و بررسی ارتباط آنها با نمایشهای جایگشتی استفاده خواهیم کرد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، به مرجع [۱۳] مراجعه کنید.

تعریف ۲۴.۲ الف) فرض کنید F یک میدان باشد. فرض کنید A یک فضای برداری روی میدان F باشد که یک حلقه یکدار نیز است. فرض کنید به ازای هر $c \in F$ و $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$(cx)y = c(xy) = x(cy).$$

در این صورت A یک F—جبر نامیده می‌شود.

ب) فرض کنید A و B دو F—جبر باشند. فرض کنید نگاشت $\varphi : A \to B$ دارای شرایط زیر باشد:

(۱) به ازای هر $x, y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

(۲) $\varphi(۱) = ۱$.