بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری ریاضی محض

بررسی خواص بهترین تقریب در فضاهای نرم دار و فضای متریک احتمال

اساتید راهنما:

دکتر سید منصور واعظ پور

و

دکتر حمید مظاهری تهرانی

استاد مشاور:

دکتر سید محمد مشتاقیون

پژوهش و نگارش:

مریم شمس

تیرماه ۱۳۸۷

تقدیم به

آن که پیام‌آور طراوت باران است در خشک‌آباد دلتنگی‌ام
و تبسم سبز بهار است در طلوع هستی‌ام

مهربانی که نامش بر بلندای عشق می‌درخشد،

همسرم.

تقدیر و تشکر

بار الها! آغاز همه از توست و همه جنبش‌ها و توانمندیها برای توست به آن اهداف بلندی که به من شناسانده‌ای شتاب می‌گیرم. در آن راهی که مرا روشن ساخته‌ای ره می‌پویم. مرا از نگهداری خود، به خویش مسپار و از حوزه عنایت خود بیرون میفکن و از حول خود پس مینداز.

خدایا! از اینکه دل مولا علی بن موسی‌الرضا(ع) را اقامتگاه مشیت خود و کمینگاه اراده خویش بر من ساخته‌ای، تو را سپاس.

به درستی که گذر از هر مسیر زندگی بدون حامی و راهنما، بس دشوار و طاقت فرساست. خداوند منان را شاکرم که در مسیر حرکتم مرا از این دو اصل بی بهره نکرد. به حقیقت راهنمایی اساتید گرامیم جناب آقای دکتر سید منصور واعظ پور، جناب آقای دکتر حمید مظاهری تهرانی و جناب آقای دکتر سید محمد مشتاقیون که همچو چراغی نورانی تاریکی های این راه پر پیچ و خم را روشن می‌نمود، گام‌های مرا در راه کسب علم و معرفت استوارتر می‌کرد همچنین از آقایان دکتر عبدالحمید ریاضی، دکتر شهرام رضاپور، دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق و دکتر قاسم برید لقمانی که قبول زحمت نموده و داوری این رساله را بر عهده گرفتند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همچنین حمایت پدر و مادر مهربانم همیشه برایم قوت قلبی بود و به من ذوق حرکت می‌داد. از همسرم سپاسگزارم که با صبر و گذشت خود پیمودن این راه را برایم هموار نمود.

در خاتمه از کلیه دوستان و عزیزانی که به گونه‌ای حامی، مشوق و راهنمای من بوده‌اند خصوصا خانواده‌ام، صمیمانه تشکر می‌نمایم.

بسمه تعالی

دانشگاه یزد

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دوره دکتری

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی خانم مریم شمس

دانشجوی دکترای دانشکده ریاضی دانشگاه یزد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

تحت عنوان : بررسی خواص بهترین تقریب در فضاهای نرمدار و فضای متریک احتمال

و تعداد واحد ۲۰ در تاریخ ۸۷/۴/۱۶

باحضور اعضای هیات داوران متشکل: از نام و نام خانوادگی امضا

۱- استادان راهنما : الف) دکتر سید منصور واعظ پور

ب) دکتر حمید مظاهری تهرانی

۲- استاد مشاور دکتر سید محمد مشتاقیون

۳- داوران خارج از گروه : الف) دکتر عبدالحمید ریاضی

ب) دکتر شهرام رضاپور

۴- داوران داخل گروه : الف) دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق

ب) دکتر قاسم برید لقمانی

تشکیل گردید و پس از ارزیابی پایان نامه توسط هیات داوران با درجه عالی و نمره : به عدد ۱۹/۲۵ به حروف نوزده بیست و پنج صدم مورد تصویب قرار گرفت.

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام و نام خانوادگی : شایسته دادفرنیا

امضا

چکیده

در این پایان‌نامه بهترین تقریب در فضاهای نرم‌دار و فضاهای متریک احتمال معرفی گردیده و خواص آن‌ها بررسی می‌شود، همچنین بعضی از قضایای نقطه ثابت در فضاهای نرم‌دار احتمال ارائه می‌شود. در فصل اول، مقدماتی شامل تعاریف و قضیه‌های مورد نیاز این مجموعه آورده شده است. در فصل دوم زیرفضاهای w—چبیشف، بهترین تقریب و بهترین هم‌تقریب در فضاهای ۲—نرم تعریف گردیده، به بررسی ویژگی های آن‌ها می‌پردازیم. در فصل سوم خواص توپولوژیکی فضاهای متریک احتمال، بهترین تقریب روی فضاهای نرم‌دار احتمال و بهترین تقریب بین دو مجموعه مورد تحقیق قرار می‌گیرد. در فصل چهارم نگاشت‌های انقباض و قضایای نقطه‌ثابت در فضاهای نرم‌دار احتمال را مورد بحث قرار می‌دهیم.

فهرست

مقدمه

پایان‌نامه موجود از چهار فصل تشکیل شده که هر یک مشتمل بر چندین بخش بوده و کلیات زیر در مورد فصل‌ها و بخش‌های این مجموعه می‌باشد. فصل اول شامل چهار بخش است که در هر کدام تعاریف و قضایای مرتبط با فصل‌های بعدی آمده است. فصل دوم در دو بخش بهترین تقریب در فضاهای نرم‌دار را مورد بررسی قرار می‌دهد. در بخش ۲—۱، با ذکر تعریف زیرفضاهای ω—چبیشف، به بررسی خواص این زیرفضاها و ارتباط بین این دو زیرفضا پرداخته و در بخش ۲—۲ بهترین تقریب و بهترین هم تقریب در فضاهای ۲—نرم به عنوان تعاریف اصلی ارائه و در ادامه تعاریف دیگری مانند «۲—به طور کراندار فشردگی»، «۲—به طور تقریب فشردگی»، «۲—نیم‌پیوسته بالایی» و ... آمده و ارتباط بین این تعاریف به عنوان قضایایی ارائه گردیده است.

در فصل سوم فضاهای متریک احتمال در سه بخش مورد توجه قرار گرفته است که در بخش ۳—۱ خواص توپولوژیکی فضاهای متریک احتمال بررسی می‌شود و برای هر مجموعه با خاصیت بولتزانو—وایراشتراس، یک پوشش متناهی می‌سازد. در بخش ۳—۲، p—بهترین تقریب روی فضاهای نرم‌دار احتمال تعریف و قضایا و مثال‌هایی در این زمینه آمده، در ادامه این بخش پس از تعریف p—تقریباً فشردگی و p—شبه چبیشفی، اثبات می‌کند که هر مجموعه p—تقریباً فشرده، یک مجموعه p—شبه چبیشف است. در انتها به طور اکید محدبی را تعریف و ثابت می‌کند هر زیر مجموعه محدب ناتهی در یک فضای منجر احتمال، یک مجموعه p—چبیشف است. در بخش ۳—۳، بهترین تقریب بین دو مجموعه در فضاهای نرم‌دار احتمال مورد بررسی قرار گرفته است که

طی آن، همگرایی در فاصله و p—تقریباً فشردگی نسبت به مجموعه تعریف شده و قضایایی در این زمینه به اثبات می‌رسد و در پایان به بررسی خواص حاصل‌ضربی دو فضای نرم‌دار احتمال پرداخته است.

در فصل آخر قضایای نقطه ثابت روی فضاهای نرم‌دار احتمال مورد تحقیق قرار می‌گیرد که اساس این فصل، تعریف ساختار (S)—محدبی است و در ادامه با ذکر تعاریف «نگاشت‌های غیرانبساطی»، «به طور مجانبی غیر انبساطی»، «به طور زیر ضعیف جابه‌جایی» و ...، بررسی می‌شود که تحت چه شرایطی اشتراک نقاط ثابت دو نگاشت، منحصر به فرد است.

نتیجه کار این پایان نامه ٦ مقاله می‌باشد که در مراجع [۵۳]، [۵۴] [۵۵]، [٥٦]، [۵۷] و [۵۸] آورده شده که در بین آن‌ها مقالات [۵۳]، [٥٦]، [۵۷] و [۵۸] به چاپ رسیده و بقیه در دست بررسی می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به ذکر برخی از قضایا و تعاریفی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت، می‌پردازیم.

۱.۱ بهترین تقریب در فضاهای نرمدار

تعریف ۱.۱.۱. [۶۰] فرض کنیم W یک زیرفضای خطی از فضای نرم‌دار X باشد.
الف) نقطه $w_\circ \in W$ یک بهترین تقریب برای $x \in X$ نامیده می‌شود هرگاه

$$\|x - w_\circ\| = inf\{\|x - w\| : w \in W\} = d(x, W).$$

ب) هرگاه هر $x \in X$ حداقل یک بهترین تقریب در W داشته باشد، W یک زیرفضای وجودی نامیده می‌شود.
ج) هرگاه هر $x \in X$ یک بهترین تقریب منحصر به فرد در W داشته باشد، W یک زیرفضای چبیشف نامیده می‌شود.
د) هرگاه هر $x \in X$ حداکثر یک بهترین تقریب در W داشته باشد، W یک زیرفضای نیم‌چبیشف

نامیده می‌شود.

می‌توان به آسانی نشان داد که اگر W یک زیرفضای وجودی X باشد، آنگاه W یک زیر فضای بسته X است. در سراسر این پایان نامه نماد گزاری‌های زیر را داریم

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = ۱\},$$

برای $W \subset X$،

$$W^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = ۰, \ \ \forall x \in W\},$$

برای $W \subset X^*$،

$$W_{\perp} = \{x \in X : f(x) = ۰, \ \ \forall f \in W\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. [۶۰] فرض کنیم W یک زیرفضای خطی از فضای نرم‌دار X باشد. برای $x \in X$ قرار می‌دهیم

$$P_W(x) = \{w \in W : \|x - w\| = d(x, W)\},$$

$$\hat{W} = P_W^{-۱}(۰) = \{x \in X : \|x\| = d(x, W)\},$$

$$R_W(x) = \{w_۰ \in W : \|w - w_۰\| \leq \|w - x\|\},$$

و

$$\breve{W} = \{x \in X : \|y\| \leq \|x - y\|, \ \ \forall y \in W\}.$$

واضح است که $P_W(x)$ یک زیرمجموعه محدب، کراندار و بسته از X و $\hat{W}$ یک زیرمجموعه بسته در X است به طوری که هرگاه $d(x, W) = ۱$ خواهیم داشت، $P_W(x) = (x + (\hat{W} \cap S_X)) \cap W$. توجه کنید که $\hat{W}$ در حالت کلی محدب نیست.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنیم $X = R^{2}$ با نرم $\|(x,y)\| = |x| + |y|$ باشد همچنین

$$W = \{(x,y) \in R^{2} : x = y\}$$

در نتیجه X یک فضای باناخ است و W یک زیرفضای وجودی از X است. به راحتی دیده می‌شود که $a = (-1/2, 1/2)$ و $b = (2, -1/4)$ عضوهایی از $\hat{W}$ هستند ولی $(3/4, 1/8) = 1/2a + 1/2b$ عضو $\hat{W}$ نیست. در نتیجه $\hat{W}$ محدب نیست.

مثال ۴.۱.۱. فرض کنیم $(W_1, \|.\|_1)$ و $(W_2, \|.\|_2)$ فضاهای باناخ دلخواه و $X = W_1 \oplus W_2$ باشد. به آسانی دیده می‌شود که X با نرم $\|x + y\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ یک فضای باناخ است، $W = W_1$ یک زیرفضای وجودی X است و $\hat{W} = W_2$. از این رو $\hat{W}$ محدب است.

تعریف ۵.۱.۱. [۴۴] هرگاه برای هر $x \in X$، $P_W(x)$ یک مجموعه فشرده و ناتهی باشد در این صورت W یک زیرفضای شبه‌چبیشف از X نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. [۶۰] زیرمجموعه W از یک فضای باناخ X، تقریباً فشرده نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ و هر دنباله $\{y_n\}_{n\geq 1}$ در W با $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d(x, W)$، زیردنباله $\{y_{n_k}\}$ از $\{y_n\}$ و $y_0 \in W$ موجود باشند به گونه‌ای که $y_{n_k} \to y_0 \in W$.

تعریف ۷.۱.۱. [۶۰] فرض کنیم X و Y فضاهای خطی نرم‌دار و $P_C(Y)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی Y باشد. نگاشت $U : X \to P_C(Y)$ نیم‌پیوسته بالایی نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه باز $V \subset Y$، مجموعه $\{x \in X : U(x) \subset V\}$ باز باشد یا به طور معادل هرگاه برای هر مجموعه بسته $N \subset Y$، مجموعه $\{x \in X : U(x) \cap N \neq \emptyset\}$ بسته باشد.

لم ۸.۱.۱. [۶۰] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار، $x \in X$ و برای یک $0 \neq f \in X^*$، $H = ker(f)$ یک ابرصفحه باشد. در این صورت، فاصله x تا ابرصفحه H برابر است با

$$d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

تعریف ۹.۱.۱. [۴۶] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دارحقیقی و W یک زیرفضای بسته X باشد. برای هر $x \in X$ با شرط $d(x, W) = 1$ تعریف می‌کنیم، $Q_W(x) = x - P_W(x)$.
به آسانی دیده می‌شود که

$$Q_W(x) = \{z \in S_X : f(z) = f(x), \quad \forall f \in W^{\perp}\}.$$

همچنین برای هر $f \in X^*$، نگاشت پیش دوگان X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J_X(f) = \{z \in S_X : f(z) = \|f\|\}.$$

فرض کنیم $W \subset X$ یک ابرصفحه وجودی باشد. در این صورت، $f \in W^{\perp}$ وجود دارد به طوری که $\|f\| = 1$ و $W = kerf$. فرض کنیم برای یک $x \in S_X$، $d(x, W) = 1$. در این صورت خواهیم داشت، $|f(x)| = 1$. از این رو،

$$Q_W(x) = \begin{cases} J_X(f) & f(x) = 1 \\ J_X(-f) & f(x) = -1 \end{cases}.$$

تعریف زیر توسط بیرخف ارائه گردیده که تعمیمی از مفهوم تعامد در فضاهای ضرب داخلی است.

تعریف ۱۰.۱.۱. [۶۰] فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. برای $x, y \in X$ گوییم x به y عمود است و به صورت $x \perp y$ نشان داده می‌شود اگر و فقط اگر برای هر اسکالر α، $\|x + \alpha y\| \leq \|x\|$. هرگاه W_1 و W_2 زیرمجموعه‌هایی از X باشند، گوییم $W_1 \perp W_2$ اگر و تنها اگر برای هر $y_1 \in W_1, y_2 \in W_2$، $y_1 \perp y_2$.

لم ۱۱.۱.۱. [۶۰] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار، W یک زیرفضای خطی X، $x \in X \backslash \overline{W}$ و $y_0 \in W$ باشد. در این صورت $y_0 \in P_W(x)$ اگر و فقط اگر $f \in X^*$ موجود باشد به طوری که، $\|f\| = 1$، برای هر $y \in W$، $f(y) = 0$ و $f(x - y_0) = \|x - y_0\|$.

لم ۱.۱.۱۲. [۶۰] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار، W یک زیرفضای خطی X، $x \in X \backslash \overline{W}$ و $y_\circ \in W$ باشد. در این صورت $y_\circ \in P_W(x)$ اگر و فقط اگر $x - y_\circ \perp W$.

لم ۱.۱.۱۳. [۴۹] فرض کنیم W زیرفضایی از یک فضای خطی نرمدار X باشد و $x \in X \backslash W$. در این صورت روابط زیر با هم معادل هستند

۱) برای هر $y \in W$، $\|y - y_\circ\| \leq \|x - y\|$،

۲) برای هر $y \in W$ تابعک $f^y \in X^*$ وجود دارد به طوری که، $f^y(x) = f^y(y_\circ)$، $\|f^y\| = ۱$ و $f^y(y) = \|y\|$.

۱.۲ فضاهای ۲—نرم

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی از بعد بزرگتر از ۱ باشد. فرض کنیم $\|.,.\|$ یک تابع با مقدار حقیقی روی $X \times X$ باشد به طوری که

۱) $\|x, y\| = ۰$ اگر و تنها اگر x, y بردارهای وابسته خطی باشند،

۲) برای هر $x, y \in X$، $\|x, y\| = \|y, x\|$،

۳) برای هر $\lambda \in R$ و $x, y \in X$، $\|\lambda x, y\| = |\lambda| \|x, y\|$،

۴) برای هر $x, y, z \in X$، $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$.

در این صورت $\|.,.\|$ یک ۲—نرم روی X است و $(X, \|.,.\|)$ یک فضای ۲—نرم نامیده می‌شود. ۲—نرم‌ها، نامنفی هستند و برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in R$ خواهیم داشت، $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$. در حقیقت برای یک عضو ثابت $b \in X$ و $x \in X$، $p_b(x) = \|x, b\|$ یک نیم نرم است و خانواده $P = \{p_b : b \in X\}$ از نیم نرم‌های جدایی پذیر، توپولوژی موضعاً محدب روی X تعریف می‌کند. با این توپولوژی هر فضای ۲—نرم یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب است.

برای درک بهتر فضاهای ۲—نرم، مثال‌های زیر را می‌آوریم.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم $X = R^{3}$، ۲–نرم زیر را روی X در نظر می‌گیریم

$$\|x,y\| = |x \times y| = \left| det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \right|,$$

که در آن $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$. در این صورت، $(X, \|.,.\|)$ یک فضای ۲–نرم است.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنیم P_n مجموعه همه چند جمله‌ای‌های حقیقی از درجه کوچکتر یا مساوی n روی بازه بسته $[0, 1]$ باشد. با در نظر گرفتن جمع معمولی و ضرب اسکالر، P_n یک فضای برداری خطی روی میدان اعداد حقیقی می‌باشد. فرض کنیم $\{x_0, x_1, ..., x_{2n}\}$ نقاط ثابت مجزا در بازه بسته $[0, 1]$ باشند. حال ۲–نرم روی P_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f, g\| = \Sigma_{k=0}^{2n} |f(x_k)g(x_k)|,$$

که در آن f و g مستقل خطی هستند. در این صورت، $(P_n, \|.,.\|)$ یک فضای ۲–نرم است.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم $(X, \|.,.\|)$ یک فضای ۲–نرم و W_1, W_2 دو زیرفضای X باشند. نگاشت $f : W_1 \times W_2 \to R$ یک ۲–نگاشت دو خطی روی $W_1 \times W_2$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in W_1$ و $y_1, y_2 \in W_2$ و هر $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ داشته باشیم

۱) $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)$،

۲) $f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 y_1) = \lambda_1 \lambda_2 f(x_1, y_1)$.

۲–نگاشت دو خطی $f : W_1 \times W_2 \to R$ کراندار نامیده می‌شود هرگاه عدد حقیقی نامنفی M موجود باشد به طوری که برای هر $x \in W_1$ و $y \in W_2$، $|f(x, y)| \leq M\|x, y\|$.

تعریف ۵.۲.۱. نرم ۲–تابعک دوخطی $f : W_1 \times W_2 \to R$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\| = inf\{M \geq 0 : |f(x, y)| \leq M\|x, y\|\}.$$

همچنین داریم

$$\|f\| = sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in W_۱ \times W_۲, \|x,y\| \leq ۱\},$$
$$= sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in W_۱ \times W_۲, \|x,y\| = ۱\},$$
$$= sup\{|f(x,y)|/\|x,y\| : (x,y) \in W_۱ \times W_۲, \|x,y\| > ۰\}.$$

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنیم $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲—نرم باشد و $z \in X$ و $z \neq ۰$. در این صورت، X_z^* را فضای باناخ همه ۲—تابعک‌های دوخطی کراندار روی $X \times <z>$ تعریف می‌کنیم که $<z>$ زیرفضای تولید شده به وسیله z می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۷. فرض کنیم $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲—نرم، W زیرفضایی از X باشد و $x \in X$. در این صورت، $x\perp^۲ W$ اگر و فقط اگر برای هر $z \in X$ و $y \in W$، $\|x,z\| \leq \|x+\alpha y,z\|$. گفته می‌شود $x\perp^۲ y$ اگر و فقط اگر $x\perp^۲ <y>$ و $W\perp^۲ x$ اگر و فقط اگر برای هر $y \in W$، $<x> \perp^۲ y$.

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنیم $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲—نرم، W زیرفضایی از X و $x \in X$ باشد. در این صورت، $y_۰ \in W$ ۲—بهترین هم‌تقریب $x \in X\backslash\overline{W}$ در W نامیده می‌شود هرگاه برای هر $y \in W$ و $z \in X$ داشته باشیم

$$\|y-y_۰,z\| \leq \|y-x,z\|.$$

هرگاه برای هر $x \in X\backslash\bar{W}$ حداقل یک ۲—بهترین هم تقریب در W وجود داشته باشد، W زیرفضای ۲—هم‌وجودی X نامیده می‌شود.

هرگاه برای هر $x \in X\backslash\bar{W}$ یک ۲—بهترین هم تقریب منحصربه‌فرد در W وجود داشته باشد، W زیرفضای ۲—هم‌چبیشف از X نامیده می‌شود.

برای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم

$$R_W^۲(x) = \{y_۰ \in W : \|y-y_۰,z\| \leq \|y-x,z\|; \quad \forall y \in W, \forall z \in X\},$$

$$\check{W}_۲ = \{x \in W : \|y,z\| \leq \|x-y,,z\|; \quad \forall y \in W, \forall z \in X\}.$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $(X, \|.,.\|)$ یک فضای ۲–نرم و W زیرفضایی ناتهی از X باشد.

الف) دنباله $\{y_n\}$ ۲–همگرا در W نامیده می‌شود هرگاه برای هر $z \in X$، $\|y_n - y_\circ, z\| \to \circ$.

ب) مجموعه W ۲–بسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $z, y_\circ \in X$ و $\{y_n\} \subset W$ که $\|y_n - y_\circ, z\| \to \circ$، داشته باشیم $y_\circ \in W$.

ج) مجموعه W، ۲–کراندار نامیده می‌شود هرگاه برای هر $z \in X$ وجود داشته باشد $k_z > \circ$ به طوری که برای هر $y \in W$، $\|y, z\| \leq k_z$.

د) مجموعه W، ۲–فشرده نامیده می‌شود هرگاه هر دنباله $\{y_n\}$ در W یک زیردنباله ۲–همگرا داشته باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای ۲–نرم و $R^{\text{۲}}(Y)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های ۲–بسته و ناتهی Y باشد. نگاشت $U_{\text{۲}} : X \to R^{\text{۲}}(Y)$، ۲–نیم‌پیوسته بالایی نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه ۲–بسته $N \subset Y$، $\{x \in X : U_{\text{۲}}(x) \cap N \neq \emptyset\}$ در X ۲–بسته باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی از بعد بزرگتر از ۱ روی میدان K از اعداد حقیقی یا اعداد مختلط باشد. فرض کنیم $(.,.|.) : X \times X \times X \to K$ تابعی باشد که برای هر $x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق کند،

الف) $(x, x|z) \geq \circ$ و $(x, x|z) = \circ$ اگر و تنها اگر x, z وابسته خطی باشند،

ب) $(x, x|z) = (z, z|x)$،

ج) $(y, x|z) = \overline{(x, y|z)}$،

د) برای هر $\alpha \in K$، $(\alpha x, y|z) = \alpha(x, y|z)$،

ه) $(x + x', y|z) = (x, y|z) + (x', y|z)$.

$(.,.|.)$ یک ۲–ضرب داخلی روی X و $(X, (.,.|.))$ یک فضای ۲–ضرب داخلی نامیده می‌شود.
می توان روی $X \times X$ یک ۲–نرم را به صورت زیر تعریف کرد، $\|x, y\| = \sqrt{(x, x|y)}$

لم ۱.۲.۱۲. [۳۶] فرض کنیم $(X, \|.,.\|)$ یک فضای ۲—نرم، W زیرفضای X و $z \in X$ باشد. اگر $x_\circ \in X$ چنان باشد که

$$\delta_z = inf\{\|x_\circ - w, z\| : w \in W\} > \circ,$$

آنگاه تابعک دوخطی کراندار $F : X\times <z> \to R$ طوری وجود دارد که $F|_{W\times<z>} = \circ$، $F(x_\circ, z) = ۱$ و $\|F\| = ۱/\delta_z$.

۳.۱ فضاهای متریک احتمال

تعریف ۱.۳.۱. تابع توزیع فاصله، یک تابع نانزولی و پیوسته چپ روی R^+ است به طوری که $F(\circ) = \circ$ و $F(\infty) = ۱$.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه همه توابع توزیع فاصله با Δ^+ و مجموعه همه توابع توزیع فاصله در Δ^+ را با شرط $l^{-۱}F(\infty) = F(\infty) = ۱$ با D^+ نشان می‌دهیم.

روی عضوهای Δ^+ یک رابطه ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F \leq G \Leftrightarrow F(x) \leq G(x); \quad \forall x \in R^+.$$

تعریف ۳.۳.۱. به ازای $a \in R$ تابع توزیع فاصله ϵ_a به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\epsilon_a(x) = \begin{cases} \circ & -\infty \leq x \leq a \\ ۱ & a < x \leq \infty \end{cases},$$

همچنین،

$$\epsilon_\infty(x) = \begin{cases} \circ & -\infty \leq x < \infty \\ ۱ & x = \infty \end{cases}.$$

برای هر $a, b \in [-\infty, \infty]$ ترتیب زیر را داریم

$$b \leq a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \epsilon_a \leq \epsilon_b$$

بنابراین $\epsilon_{\circ}$ عضو ماکزیمال در Δ^+ و ϵ_∞ عضو مینیمال Δ^+ می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنیم $h \in (\circ, ۱]$ و G, F توابع توزیع فاصله باشند. برقرار بودن $[F, G; h]$ معرف گزاره زیر می‌باشد

$$G(x) \leq F(x+h) + h; \qquad \forall x \in (\circ, ۱/h).$$

با این نمادگزاری، تابع d_L را روی $\Delta^+ \times \Delta^+$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$d_L(F, G) = inf\{h :$ برقرار باشند $[G, F; h]$ و $[F, G; h]\}$.

تعریف ۱.۳.۵. یک نرم مثلثی (به اختصار t—نرم)، یک عمل دوتایی شرکت پذیر روی $I = [\circ, ۱]$ مانند T می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱)برای هر $x_۱$، $x_۲$، $y_۱$ و $y_۲$ در I که $x_۱ \leq x_۲$ و $y_۱ \leq y_۲$ داشته باشیم $T(x_۱, y_۱) \leq T(x_۲, y_۲)$،

۲)به ازای هر x در I، $T(۱, e) = T(۱, x) = x$ که در آن ۱ عضو همانی می‌باشد،

۳)برای هر x و y در I، $T(x, y) = T(y, x)$.

تعریف ۱.۳.۶. فرض کنیم T یک عمل دوتایی روی $I = [\circ, ۱]$ باشد و برای هر x و y در I، $T^*(x, y) = ۱ - T(۱ - x, ۱ - y)$. اگر T یک t—نرم باشد، آنگاه T^* یک t—هم نرم T نامیده می‌شود. تابع Y یک t—هم نرم است هرگاه t—نرم T موجود باشد به طوری که $Y = T^*$.

به طور واضح T^* خود یک عملگر دوتایی روی I است و $T^{**} = T$. نمودار T و T^* نسبت به مکعب واحد، قرینه یکدیگرند.

تعریف ۱.۳.۷. یک تابع مثلثی، یک عمل دوتایی روی Δ^+ با عنصر همانی $\epsilon_{\circ}$ است که جابه‌جایی، شرکت پذیر و نانزولی می‌باشد. توابع مثلثی پیوسته نوعی به صورت زیر می‌باشند

$$\tau_T(F, G)(x) = \sup_{s+t=x} T(F(s), G(t)),$$

که در آن T یک t—نرم پیوسته است.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنیم τ_1 و τ_2 عمل‌های دوتایی روی Δ^+ باشند. در این صورت، گوییم $\tau_1 \leq \tau_2$ هرگاه برای هر F و G عضو Δ^+، $\tau_1(F,G) \leq \tau_2(F,G)$. این نامساوی به این مفهوم است که برای هر x در $R^{*+} = [0, +\infty]$ داشته باشیم

$$\tau_1(F,G)(x) \leq \tau_2(F,G)(x).$$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم T یک عمل دوتایی روی I باشد و برای هر F و G عضو Δ^+، T' یک تابع روی $\Delta^+ \times \Delta^+$ با مقدار $T'(F,G)$ می‌باشد که به ازای هر $x \in R^{*+}$،

$$T'(F,G)(x) = T(F(x), G(x)).$$

بدیهی است اگر T یک t—نرم پیوسته چپ باشد، آنگاه T' یک تابع مثلثی است.

تعریف ۱۰.۳.۱. یک فضای متریک احتمال، سه تایی (X,F,τ) می‌باشد که در آن X یک مجموعه ناتهی، F یک تابع از $X \times X$ به Δ^+ و τ یک تابع مثلثی است که به ازای هر p و q و r عضو X، شرایط زیر برقرار باشند

۱) $F(p,p) = \epsilon_0$،

۲) اگر $p \neq q$، آنگاه $F(p,q) \neq \epsilon_0$،

۳) $F(p,q) = F(q,p)$،

۴) $F(p,r) \geq \tau(F(p,q), F(q,r))$.

اگر (X,F,τ) یک فضای متریک احتمال باشد، آنگاه (X,F) یک فضای PM تحت τ نامیده می‌شود. در این رساله، تابع $F(p,q)$ به وسیله F_{pq} و مقدار آن در نقطه x با $F_{pq}(x)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۱.۳.۱. سه‌تایی (V,υ,τ) یک فضای نرمدار احتمال نامیده می‌شود هرگاه V یک فضای برداری روی میدان K، τ یک تابع مثلثی پیوسته و υ یک نگاشت از V به Δ^+ باشد به طوری که برای هر $p,q \in V$ و هر $\alpha > 0$ در K شرایط زیر برقرار باشند