دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

عنوان:

تحلیل الگوهای خطی چند متغیره بر اساس نرم افزار SAS

استاد راهنما:

دکتر یدالله واقعی

استاد مشاور:

دکتر مجید رضایی

نگارش:

مهدیه حبیبی

تابستان ۱۳۹۰

فصل اول

مروری بر جبر خطی

1-1 مقدمه

پرداختن به مباحث مدل‌های خطی بدون استفاده از نظریه ماتریس‌ها بسیار مشکل و در حالت کلی غیر ممکن است. لذا قبل از پرداختن به موضوع اصلی این پایان نامه مختصری از تعاریف پایه‌ای و مطالب مربوط به جبر ماتریس‌ها را که در فصل‌های بعد لازم می‌شود، مرور می‌کنیم. به کمک مطالب این فصل می‌توان بسیاری از نتایج آماری را که نیاز به محاسبات پیچیده و طولانی دارند به آسانی انجام داد. برای جزئیات بیشتر و اثبات برخی از نتایج ارائه شده می‌توانید سیرل[1] (1982)، هارویل[2] (1997)، شات[3] (1997)، مارکوس وماین[4] (1967)، گریبیل[5] (1969) و یا هر کتاب مربوط به جبر ماتریس‌ها را ببینید.

---

[۱] Searle
[۲] Harville
[۳] Schott
[۴] Markus and Mine
[۵] Graybill

2-1 نمادگذاری و تعاریف

تعریف1-1. فرض کنید $\{a_{11},...,a_{pq}\}$ مجموعه ای از pq عدد حقیقی باشد. آرایه مستطیل شکل

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

از این اعداد را که شامل p سطر و q ستون است یک ماتریس با ابعاد $p \times q$ نامیم و به اختصار می‌نویسیم $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. به ازای $q = 1$ ماتریس $\boldsymbol{A}$ بردار p بعدی نامیده می‌شود.

در این تحقیق از حروف بزرگ برای نمایش ماتریس‌ها و از حروف کوچک و پررنگ برای نشان دادن بردارها استفاده می کنیم.

آشنایی با برخی از ماتریس‌های خاص مانند ماتریس مستطیلی، ماتریس مربعی، ماتریس قطری، ماتریس واحد، ماتریس متقارن، ماتریس نامتقارن، ماتریس صفر، ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی و ماتریس خودتوان دانسته فرض می‌شود. همچنین به دلیل اختصار برخی از اعمال ماتریسی مانند جمع، تفریق، ضرب، ترانهاده و اثر ماتریس‌ها را تعریف نمی‌کنیم. در عوض برخی از ماتریس‌ها و عملگرهای مهم‌تر جبر خطی که در متون کلاسیک کمتر به آن‌ها پرداخته می‌شود و در عین حال در بحث مدل‌های خطی کاربرد بیشتری دارند تعریف و بررسی می‌شوند.

- **ماتریس افراز شده**

تعریف 1-3. ماتریس افراز شده[1] ماتریسی است که بر حسب زیر ماتریس‌هایش نوشته شود.

مثلا ماتریس $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ با ابعاد $p \times q$ به صورت $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$ به زیر ماتریس‌های $\boldsymbol{A}_{ij}$ برای $i, j = 1,2$ افراز شده است به طوری که زیر ماتریس‌های $\boldsymbol{A}_{11}$ و $\boldsymbol{A}_{12}$ دارای تعداد سطرهای مساوی و $\boldsymbol{A}_{11}$و$\boldsymbol{A}_{21}$ دارای تعداد ستون‌های مساوی هستند.

اگر دو ماتریس $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ سازگار (ضرب پذیر) باشند و به قسمی افراز شده باشند که زیر ماتریس‌ها نیز سازگار باشند، آن‌گاه حاصل ضرب $\boldsymbol{AB}$ را می‌توان با روش معمول ضرب سطر در ستون با زیر ماتریس‌ها به عنوان اعضا انجام داد.

[1] Partitioned Matrix

استفاده از ماتریس‌های افراز شده باعث سهولت در نوشتن ماتریس‌های بزرگ و انجام محاسبات ماتریسی می شود. در فصل‌های بعد زیر ماتریس‌های ماتریس افراز شده را با علامت| جدا می‌کنیم.

- **دترمینان**

تعریف1-4. دترمینان ماتریس مربعی $\boldsymbol{A}$ با ابعاد $p\times p$ که با $|\boldsymbol{A}|$ نشان داده می‌شود به صورت

$$\begin{cases} a_{11} & p=1 \\ \sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}a_{ij}\,|\boldsymbol{A_{ij}}| & p>1 \end{cases}$$

تعریف می‌شود، که در آن $\boldsymbol{A_{ij}}$ ماتریس $(p-1)\times(p-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون j ام ماتریس $\boldsymbol{A}$ بدست می‌آید.

در زیر به برخی از خواص دترمینان اشاره می‌کنیم.

1- اگر $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ مثلثی یا قطری باشد آن‌گاه $|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{p}a_{ii}$.

2- اگر c یک اسکالر باشد آن‌گاه $|c\boldsymbol{A}|=c^{p}|\boldsymbol{A}|$.

3- $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

در حالت کلی برای بدست آوردن دترمینان ماتریس $\boldsymbol{A}$، می‌توان آن را به ماتریس‌های بالا مثلثی ($\boldsymbol{U}$) و پایین مثلثی ($\boldsymbol{L}$) تجزیه کرد یعنی $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$. اگر $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$ (معین مثبت) باشد آن‌گاه از تجزیه چولسکی[1] استفاده می‌کنیم (یعنی $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{L}'$، بنابراین $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}'$) و دترمینان آن را با استفاده از خاصیت اول و سوم محاسبه می‌کنیم، در غیر این صورت تجزیه کروت[2] را به کار می‌بریم که در آن عناصر قطری $\boldsymbol{U}$ همگی یک هستند (ماردیا[3] وهمکاران، 1979).

- **ماتریس متعامد**

تعریف 1-2. ماتریس مربع $\boldsymbol{A}$ را متعامد گویند اگر $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ ماتریس واحد است). برای ماتریس متعامد[4] $\boldsymbol{A}$ خواص زیر برقراراست:

1- $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}'$

2- $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{I}$

---
[1] Cholesky decomposition
[2] Crout
[3] Mardia
[4] Orthogonal Matrix

3- $|A| = \pm 1$

4- اگر ماتریس‌های A و B متعامد و سازگار باشند در این صورت AB متعامد است.

- **وارون ماتریس**

تعریف1-5. وارون ماتریس A[1] ماتریس یکتای A^{-1} است که در شرط $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ صدق می‌کند. اگر ماتریس A ناویژه باشد یعنی دترمینان آن مخالف صفر باشد وارون آن وجود دارد.

در زیر دو خاصیت وارون را بیان می‌کنیم:

1- اگر ماتریس‌های A و B ناویژه با ابعاد مساوی باشند آن‌گاه $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2- اگر یک ماتریس مربع به صورت $B + cc'$ ناویژه باشد که در آن $\mathbf{c}$ یک بردار و B یک ماتریس ناویژه است آن‌گاه $(B + cc')^{-1} = B^{-1} - \dfrac{B^{-1}cc'B^{-1}}{1 + c'B^{-1}c}$.

در حالت کلی اگر ماتریس A متقارن باشد برای محاسبه A^{-1} می‌توان روش تجزیه چولسکی را به کار برد، یعنی A را به صورت LL' که در آن L ماتریس پایین مثلثی است تجزیه کرد و آن‌گاه از خاصیت اول وارون $A^{-1} = (L^{-1})'L^{-1}$ را بدست آورد. باید توجه داشت که پیدا کردن وارون و دترمینان ماتریس‌های مثلثی بسیار ساده‌تر از ماتریس‌های کلی است.

- **مقادیر ویژه و بردارهای ویژه**

تعریف1-6. اگر A یک ماتریس مربعی با ابعاد $p \times p$ باشد آن‌گاه $q(l) = |A - lI|$ یک چند جمله‌ای درجه p بر حسب l است. p ریشه $q(l)$، یعنی $l_p, \dots, l_1$ را که شامل اعداد حقیقی و مختلط است مقادیر ویژه[2] ماتریس A گویند. اگر $q(l)$ دارای ریشه مکرر باشد آن‌گاه بعضی از l_i ها مساوی خواهند بود.

به ازای هر $i = 1, \dots, p$ داریم $|A - l_iI| = \mathbf{0}$، بنابراین ماتریس $A - l_iI$ ویژه است. لذا یک بردار مخالف صفر مانند g وجود دارد که در رابطه $Ag = l_ig$ صدق می‌کند، بردار g را که در این رابطه صدق می‌کند بردار ویژه[3] متناظر با مقدار ویژه l_i می‌نامیم. اگر $g'g = 1$ آن‌گاه بردار ویژه g با درایه‌های حقیقی را استاندارد شده (یکه شده) می‌نامند.

در محاسبه مقادیر ویژه با نرم‌افزار باید توجه داشت که نرم‌افزارها مقادیر ویژه را به روش‌های عددی حساب می‌کنند. بنابراین ممکن است همه مقادیر ویژه به صورت اعداد مختلط چاپ شوند.

---

۱ Matrix Inverse
۲ Eignvalues
۳ Eignvector

ما باید قسمت موهومی این اعداد را نگاه کنیم و چنانچه قسمت موهومی خیلی کوچک مثلا عددی چون $-5{,}36\times10^{12}$ باشد با نادیده گرفتن قسمت موهومی آن را به عنوان عدد حقیقی در نظر بگیریم. علاوه براین با توجه به اینکه بردارهای ویژه منحصربفرد نیستند، معمولا نرم‌افزارها بردارهای ویژه را پس از یکه کردن چاپ می‌کنند.

در زیر به چند خاصیت مقادیر ویژه حاصل ضرب ماتریس‌ها اشاره می‌کنیم خاصیت چهارم در حالت کلی بیان می‌شود.

1- اگر $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ ماتریس‌هایی با ابعاد $n\times p$ و $p\times n$ باشند، آن‌گاه مقادیر ویژه مخالف صفر $\boldsymbol{AB}$ و $\boldsymbol{BA}$ برابر و مرتبه تکرار آن‌ها یکسان است.

2- اگر $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{P}$ ماتریس‌های مربع $n\times n$ باشند و $\boldsymbol{P}$ ناویژه باشد، آن‌گاه $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ دارای مقادیر ویژه یکسانند.

3- اگر $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{C}$ ماتریس‌های مربع $n\times n$ باشند و $\boldsymbol{C}$ متعامد باشد، آن‌گاه $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}$ دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

4- اگر $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس حقیقی و متقارن باشد، آن‌گاه تمام مقادیر ویژه آن اعداد حقیقی‌اند.

قضیه1-1. (قضیه تجزیه طیفی یا تجزیه جردن[1]) فرض کنید $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس متقارن با ابعاد $p\times p$ و g_i بردار ویژه یکه شده نظیر l_i باشند. همچنین فرض کنید $L=diag(l_1,...,l_p)$ (ماتریس قطری) و $G=(g_1|...|g_p)$، در این صورت ماتریس $\boldsymbol{A}$ را می‌توان به صورت

$$\boldsymbol{A}=GLG'=\sum l_i g_i g_i'$$

نوشت.

برهان. برای اثبات جری[2] (1977) را ببینید.

- **استقلال خطی و رتبه**

تعریف 1-7. مجموعه بردارهای p بعدی $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k$ مستقل خطی هستند اگر هیچ یک از این بردارها را نتوان به صورت ترکیب خطی از سایر بردارها بیان کرد. یعنی ثابت‌های عددی $c_1,...,c_k$ (که همه صفر نیستند) وجود ندارند به قسمی که $c_1\mathbf{a}_1+...+c_k\mathbf{a}_k=\boldsymbol{o}$ ($\boldsymbol{o}$ بردار p بعدی شامل عناصر صفر است).

---
[1] Spectral Decomposition or Jordan Decomposition
[2] Giri

تعریف1-8. رتبه[1] هر ماتریس مربع یا مستطیل برابر تعداد سطر(ستون)های مستقل خطی آن ماتریس می‌باشد. رتبه ماتریس $\boldsymbol{A}$ را با $r(\boldsymbol{A})$ نشان می‌دهیم. اگر رتبه ماتریس برابر مینیمم تعداد سطرها و ستون‌های آن باشد، در این صورت ماتریس را رتبه کامل گوییم.

برای تشخیص رتبه ماتریس $\boldsymbol{A}$ با ابعاد $p\times q$ $(p>q)$ با استفاده از نرم افزار می‌توان به دو روش زیر عمل کرد:

1- یک ستون دلخواه را به عنوان متغیر وابسته و ستون‌های دیگر را به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفت و به کمک نرم افزار یک مدل رگرسیون بدون عرض از مبدا برازش داد. اگر $R^2<1$ (ضریب تعیین) باشد آن‌گاه بردارها مستقل خطی هستند و $r(\boldsymbol{A})=q$ می‌باشد. اگر $R^2=1$ باشد در این صورت یک رابطه خطی بین برداری که به عنوان متغیر وابسته در نظر گرفته شده است با سایر بردارها وجود دارد یعنی $r(\boldsymbol{A})=q-1$ و اگر نرم افزار دچار خطای ماتریس ویژه[2] شود در این صورت روابط خطی بین بردارهایی که به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته شده‌اند وجود دارد که ابتدا باید آن‌ها را یافت. برای یافتن آن‌ها می‌توان مجدد از رگرسیون کمک گرفت.

2- با فرمان *qr* در نرم افزار *Splus* یا *R* می‌توان رتبه ماتریس را سریع‌تر و ساده‌تر حساب کرد.

در زیر چند ویژگی رتبه را در حالت کلی بیان می‌کنیم.

1- اگر ماتریس‌های $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ سازگار باشند، آن‌گاه $r(\boldsymbol{AB})\le r(\boldsymbol{A})$ و $r(\boldsymbol{AB})\le r(\boldsymbol{B})$.

2- برای هر ماتریس $\boldsymbol{A}$ داریم:

$$r(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')=r(\boldsymbol{A}')=r(\boldsymbol{A}).$$

3- اگر ماتریس‌های $\boldsymbol{B}$ و C با ابعاد $n\times n$ و $p\times p$ ناویژه باشند، آن‌گاه $r(\boldsymbol{BAC})=r(\boldsymbol{A})$.

4- اگر ماتریس $\boldsymbol{A}$ متقارن باشد، آن‌گاه رتبه‌اش برابر تعداد مقادیر ویژه مخالف صفر آن است.

- **حاصل‌ضرب کرونکر**

تعریف1-9. فرض کنید $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ یک ماتریس $p\times q$ و $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ یک ماتریس $m\times n$ باشند. در این صورت حاصل‌ضرب کرونکر[3] $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ به صورت

$$\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1q}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2q}\boldsymbol{B} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1}\boldsymbol{B} & a_{p2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{pq}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

تعریف می‌شود، که یک ماتریس $pm\times qn$ است. این ماتریس را با نماد $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ نشان می‌دهیم.

---
[1] Rank
[2] Singular Matrix Error
[3] Kronecker Product

تعریف1-10. فرض کنید X یک ماتریس با ابعاد $n\times p$ و X^V نشان دهنده برداری با np مولفه باشد که از ادغام ستون‌های ماتریس X بدست آمده است. به بردار $X^V=(\mathbf{x}'_1|\mathbf{x}'_2|...|\mathbf{x}'_p)'$ که از ادغام ستون‌های ماتریس X بدست می‌آید، فرم برداری شده[1] X می‌گویند.

با توجه به تعریف 1-9 و 1-10 خواص زیر به آسانی بدست می‌آیند (ماردیا و همکاران، 1979):

1- $(A\otimes B)'=A'\otimes B'$

2- $(A\otimes B)(F\otimes G)=(AF)\otimes(BG)$.

3- برای ماتریس‌های ناویژه A و B، $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$.

4- $(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$.

5- $A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$.

6- $(AXB)^V=(B'\otimes A)X^V$.

1-3 دستگاه معادلات

دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x}=\mathbf{c}$ را که در آن A ماتریس $n\times p$، $\mathbf{x}$ بردار $p\times 1$ و $\mathbf{c}$ بردار $n\times 1$ است در نظر بگیرید. اگر $n=p$ و A ناویژه باشد، آن‌گاه جواب $\mathbf{x}$ به صورت بردار منحصربفرد $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{c}$ بدست می‌آید. اگر $n>p$ باشد یعنی تعداد سطرهای A بیشتر از تعداد ستون‌های آن باشد، آن‌گاه $A\mathbf{x}=\mathbf{c}$ دارای جواب نیست. اگر تعداد سطرهای A کمتر از تعداد ستون‌های آن باشد یعنی $n<p$، آن‌گاه $A\mathbf{x}=\mathbf{c}$ دارای بی‌نهایت جواب است (رنچر و اسچالج[2]، 2007). اگر دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{c}$ دارای یک جواب یا بیشتر باشد گفته می‌شود سازگار است و اگر دستگاه دارای جواب نباشد آن را ناسازگار گویند.

قضیه1-2. دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{c}$ حداقل دارای یک بردار جواب است اگر و فقط اگر $r(A)=r(A|\mathbf{c})$، یعنی افزودن بردار $\mathbf{c}$ رتبه ماتریس A را تغییر ندهد.

برهان. برای اثبات آذرنوش و بزرگ نیا (1384) را ببینید.

1-4 صورت‌های درجه دوم و ماتریس معین مثبت

یک صورت درجه دوم[3] از متغیرهای حقیقی $x_1,...,x_p$ عبارتی است به صورت

$$Q=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}x_ix_j\,, \qquad (1\text{-}1)$$

---

۱ Vectorization Form
۲ Rencher and Schaalge
۳ Quadratic Form
٤ Generalized inverse

که در آن a_{ij} ثابت‌های حقیقی‌اند. با فرض $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_p)'$ و $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ می‌توان نوشت:

$$Q=\mathbf{x}'\boldsymbol{A}\mathbf{x}\,. \tag{2-1}$$

از آن‌جا که در مبحث مدل‌های خطی معمولا با ماتریس‌های متقارن سروکار داریم می‌توان ماتریس $\boldsymbol{A}$ را در فرم درجه دوم Q متقارن اختیار کرد.

تعریف 1-11. ماتریس مربع $\boldsymbol{A}$ یا فرم درجه دوم $\mathbf{x}'\boldsymbol{A}\mathbf{x}$ وابسته به آن را معین مثبت[1] گوییم اگر به ازای هر $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ داشته باشیم $\mathbf{x}'\boldsymbol{A}\mathbf{x}>\mathbf{0}$ و آن را نیمه معین مثبت[2] گوییم اگر به ازای هر $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ داشته باشیم $\mathbf{x}'\boldsymbol{A}\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$.

دو ویژگی و دو قضیه را در ارتباط با ماتریس‌های معین مثبت در زیر بیان می‌کنیم.

1- اگر $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس معین مثبت باشد آن‌گاه $\boldsymbol{A}^{-1}$ نیز معین مثبت است.

2- اگر $\boldsymbol{P}$ یک ماتریس ناویژه و $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس معین مثبت باشد آن‌گاه $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ نیز معین مثبت است.

قضیه 1-3. فرض کنید $\boldsymbol{A}$ ماتریسی متقارن و حداقل نیمه معین مثبت با بعد $p\times p$ و رتبه $r\leq p$ باشد، در این صورت $\boldsymbol{A}$ دقیقا دارای r مقدار ویژه مثبت است و $p-r$ مقدار ویژه دیگر برابر صفراند.

برهان. برای اثبات جری (1977) را ببینید.

قضیه 1-4. فرض کنید $\boldsymbol{A}$ ماتریسی با بعد $p\times q$ $(p<q)$ باشد، در این صورت اگر رتبه $\boldsymbol{A}$ کمتر از p باشد، آن‌گاه $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$ متقارن و نیمه معین مثبت است و اگر ماتریس $\boldsymbol{A}$ پر رتبه سطری باشد آن-گاه $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$ معین مثبت است.

برهان. برای اثبات جری (1977) را ببینید.

1-5 وارون تعمیم یافته

از آن‌جا که در مبحث مدل‌های خطی رتبه ناقص به استفاده از وارون تعمیم یافته[4] نیاز خواهیم داشت لذا در این بخش به اختصار برخی تعاریف و خواص مرتبط با وارون تعمیم یافته را بیان می‌کنیم.

تعریف 1-12. وارون تعمیم یافته ماتریس $\boldsymbol{A}$ با ابعاد $n\times p$ ماتریسی است مانند $\boldsymbol{A}^{-}$ با ابعاد $p\times n$ که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}. \tag{3-1}$$

وارون تعمیم یافته همواره وجود دارد اگر چه به طور کلی یکتا نیست.

---

۲ Positive definite
۳ Positive semidefinite

در زیر دو قضیه را بیان می‌کنیم. در قضیه اول برخی از خواص وارون تعمیم یافته و در قضیه دوم وارون تعمیم یافته ماتریس در حالت افراز شده داده می‌شوند.

قضیه1-5. فرض کنید $\boldsymbol{A}$ با ابعاد $n\times p$ با رتبه r، و $\boldsymbol{A}^-$ یک وارون تعمیم یافته $\boldsymbol{A}$ باشد. اگر $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-$ یک وارون تعمیم یافته $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ باشد، آن‌گاه:

1- $r(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)=r(\boldsymbol{A})=r$

2- $(\boldsymbol{A}^-)'$ یک وارون تعمیم یافته $\boldsymbol{A}'$ است، یعنی $(\boldsymbol{A}')^-=(\boldsymbol{A}^-)'$

3- $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-\boldsymbol{A}'$

4- $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-\boldsymbol{A}'$ یک وارون تعمیم یافته $\boldsymbol{A}$ است، یعنی $\boldsymbol{A}^-=(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-\boldsymbol{A}'$

5- ماتریس $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-\boldsymbol{A}'$ متقارن با رتبه r است و نسبت به انتخاب $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-$ پایدار می‌باشد، یعنی مقدار $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-\boldsymbol{A}'$ با تغییر $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^-$ ثابت می‌ماند.

برهان. برای اثبات رنچر و اسچالج (2007) را ببینید.

قضیه1-6. فرض کنید $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس $n\times p$ با رتبه r و به صورت زیر افراز شده باشد:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

که در آن $\boldsymbol{A}_{11}$ ماتریس $r\times r$ با رتبه r است. در این صورت یک وارون تعمیم یافته $\boldsymbol{A}$ به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{A}^-=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

که در آن ماتریس‌های $\boldsymbol{O}$ با ابعاد مناسب شامل اعداد صفر هستند.

برهان. برای اثبات رنچر و اسچالج (2007) را ببینید.

1-6 وارون تعمیم یافته و دستگاه معادلات

اگر دستگاه معادلات $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\mathbf{c}$ سازگار باشد و ماتریس $\boldsymbol{A}$ وارون پذیر نباشد، آن‌گاه $\mathbf{x}=\boldsymbol{A}^-\mathbf{c}$ یک جواب دستگاه است که در آن $\boldsymbol{A}^-$ یک وارون تعمیم یافته $\boldsymbol{A}$ است. برای یافتن تمام جواب‌های ممکن دستگاه معادلات $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\mathbf{c}$ در صورتی که سازگار باشد می‌توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد (سیرل، 1982 صفحه 238):

1- با استفاده از یک وارون خاص $\boldsymbol{A}^-$ در $\mathbf{x}=\boldsymbol{A}^-\mathbf{c}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{h}$ و استفاده از مقادیر ممکن بردار $\boldsymbol{h}$.

2- استفاده از تمام مقادیر ممکن A^{-} در $\mathbf{x} = A^{-}\mathbf{c}$.

یک شرط لازم و کافی برای آن‌که دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ سازگار باشد می‌تواند بر حسب وارون تعمیم یافته A به صورت زیر بیان شود.

قضیه1-7. دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ سازگار است اگر و فقط اگر برای هر وارون تعمیم یافته A^{-} از A رابطه $AA^{-}\mathbf{c} = \mathbf{c}$ برقرار باشد.

برهان. برای اثبات سیرل (1982) را ببینید.

در واقع این قضیه صورت دیگر قضیه 1-2 است.

در مدل‌های خطی رتبه ناقص برای برآورد پارامترها و برخی آماره‌های دیگر (مثل مجموع مربعات مربوط به پارامترهای خطا) باید از وارون تعمیم یافته استفاده کنیم. هر چند در روش‌های دستی یا کامپیوتری صرفا یک وارون تعمیم یافته پیدا می‌کنیم، ولی باید توجه نمود که وارون تعمیم یافته به طور کلی منحصر بفرد نیست. لذا برخی از پارامترها و شاخص‌هایی که با استفاده از وارون تعمیم یافته به دست می‌آیند قابل استفاده نخواهند بود.

فصل دوم

مدل‌های خطی تک متغیره

1-2 مقدمه

مدل‌های خطی به عنوان یکی از شاخه‌های مهم در علم آمار روابط میان متغیرها را نشان می‌دهند. این مدل‌ها در بسیاری از زمینه‌ها و روش‌های علمی مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثلا در علوم بیولوژی، فیزیک و علوم اجتماعی، همین طور اقتصاد و مهندسی، هم در طرح مراحل تحقیق و هم در تحلیل نتایج به دست آمده مفیدند. علاوه براین، مدل‌های خطی پایه و اساس بسیاری از مدل-های آماری مانند مدل‌های رگرسیونی خطی چندگانه، آنالیز واریانس و آنالیز کوواریانس (اعم از یک متغیره و چند متغیره) هستند که مدل‌های رگرسیونی عمدتا از نوع مدل‌های رتبه کامل و مدل-های آنالیز واریانس و آنالیز کوواریانس از نوع مدل‌های رتبه ناقص می‌باشند. به این دلیل که برخی از نتایج مدل‌های تک متغیره را می‌توان در فصل‌های بعد به مدل‌های چند متغیره تعمیم داد، در این

فصل مطالبی را به طور مختصر از مدل‌های رگرسیون و مدل‌های آنالیز واریانس ارائه می‌دهیم.

مدل‌های رگرسیونی رابطه بین متغیرها را بررسی می‌کنند. مدل رگرسیون خطی که شامل یک متغیر مستقل باشد، مدل رگرسیونی خطی ساده و در صورتی که شامل بیش از یک متغیر مستقل باشد، مدل رگرسیونی خطی چندگانه نامیده می‌شود. مدل رگرسیونی چندگانه را معمولاً به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$y = b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_kx_k + e, \qquad (1\text{-}2)$$

که در آن y متغیر وابسته، $x_1,\ldots,x_k$ k متغیر مستقل (رگرسیونی) و b_iها ثابت‌هایی هستند که ضرایب مدل رگرسیونی یا پارامتر نامیده می‌شوند. b_0 پارامتر عرض از مبدأ و e مؤلفه خطای تصادفی است. همچنین فرضیه می‌شود $E(\varepsilon)=0$، $Var(\varepsilon)=\sigma^2$ و eها ناهمبسته‌اند. اگر $k=1$ باشد، مدل رگرسیونی خطی ساده نتیجه می‌شود. از مدل‌های رگرسیون برای اهداف مختلفی از جمله مطالب زیر می‌توان استفاده کرد:

1- پیش بینی: با برآورد پارامترهای $b_0,\ldots,b_k$ می‌توان اثرات کلی xها بر yها را پیش بینی کرد.

2- توصیف یا تفسیر داده‌ها: محققان از مدل تعریف شده برای خلاصه کردن یا توصیف داده‌های مشاهده شده استفاده می‌کنند.

3- کنترل خروجی: اگر رابطه بین y و xها را مدل سازی کنیم، مدل برآورد شده را می‌توان برای کنترل خروجی یک فرآیند در اثر تغییر دادن ورودی به کار برد.

بحث مفصل در مورد شناخت رگرسیون در مرجع‌هایی چون بلسلی[1] و همکاران (1980)، کوک و وایزبرگ[2] (1982) و سبر[3] (1977) ارائه گردیده است.

مدل‌های آنالیز واریانس حالت خاصی از مدل‌های خطی هستند که در آن مقادیر x معمولا صفر یا یک هستند. در این مدل‌ها به مقایسه چند جمعیت یا مقایسه چند شرط در مدل می‌پردازیم. مثلا فرض کنید محققی می‌خواهد میانگین فرآورده‌ها را برای چهار نوع کاتالیزور در یک فرآیند صنعتی

---

[1] Belsley
[2] Cook and Weisberg
[3] Seber

مقایسه کند. اگر n مشاهده از هر کاتالیزور به دست آورده باشد، یک الگو برای $4n$ مشاهده را می-توان به صورت زیر نوشت:

$$y_{ij} = m + a_i + e_{ij}, \qquad i = 1,2,3,4, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{2-2}$$

که در آن a_i اثر کاتالیزور iام است و فرض مورد نظر به صورت $H_0: a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ بیان می-شود. بررسی مفصل مدل‌های آنالیزواریانس را می‌توانید در مرجع‌هایی چون مایرز ومیلتون[1] (1991)، ریدر[2] (1973) و رنچر و اسچالج (2007) ببینید.

در بیشتر کتاب‌ها، مدل‌های خطی رتبه کامل و مدل‌های خطی رتبه ناقص به طور مجزا مطالعه می-شوند. ولی در این فصل به دلیل اختصار و کاهش حجم مطالب، آزمون‌ها و مطالب مربوط به هر دو نوع همزمان مورد بررسی قرار می‌گیرند. ذکر این نکته قابل توجه است که مدل‌های خطی رتبه کامل را می‌توان حالت خاصی از مدل‌های رتبه ناقص در نظر گرفت. مفهوم این مطلب این است که می‌توان همه مطالب و آزمون‌ها را مستقیما برای مدل‌های خطی رتبه ناقص بیان کرد و هر جا مدل رتبه کامل باشد، مثلا با قرار دادن $(\boldsymbol{XX})^{-1}$ به جای $(\boldsymbol{XX})^{-}$ آن را به عنوان حالت خاص در نظر گرفت.

2-2 رگرسیون خطی چندگانه

چنان که قبلاً نیز اشاره کردیم، مدل رگرسیونی که شامل بیش از یک متغیر رگرسیونی باشد، رگرسیون خطی چندگانه نامیده می‌شود. در واقع در رگرسیون چند گانه سعی می‌کنیم یک متغیر پاسخ یا وابسته را بر مبنای یک رابطه خطی فرضی با چند متغیر پیشگو یا مستقل $x_k,\ldots,x_2,x_1$ به دست آوریم. مدل رگرسیون خطی که در رابطه (2-1) بیان شد، برای نمونه‌ای به حجم n به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \ldots + b_k x_{ik} + e_i, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{3-2}$$

---

[1] Myers and Milton
[2] Reader

که در آن $b_k,...,b_1,b_0$ را ضرایب رگرسیونی می‌نامند. در این مدل، b_i نیز میـزان تغییـر در متغیـر پاسخ y به ازای یک واحد تغییر در متغیـر مـستقل x_i را نـشان مـی‌دهـد، بـه شـرط آنکـه سـایر متغیرهای مستقل ثابت نگه داشته شوند. فرضیات مربوط به e_iها یا y_iها عبارتند از اینکه بـه ازای هر i باید $E(e_i)=0$ و نیز $var(e_i)=s^2$ (معادل با ثابت بودن واریانس) و $i \neq j$ $\text{cov}(e_i,e_j)=0$ (معادل با اینکه y_iها نا همبسته اند)، که اگر فرض نرمال بودن را اضـافه کنـیم از ناهمبـسته بـودن e_iها نتیجه می گیریم که e_iها از یکدیگر مستقل‌اند (نیرومند،1387). مـدل رگرسـیونی (2-3)، n رابطه خطی بین مشاهدات را بیان می‌کند که می‌توان به صورت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \cdots x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \cdots x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \cdots x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \tag{4-2}$$

نوشت. این مدل را می‌توان به صورت خلاصه

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{5-2}$$

نمایش داد که در آن $\mathbf{y}$ بردار متغیرهای پاسخ، $\boldsymbol{X}$ ماتریسی به ابعاد $n\times(k+1)$ از متغیرهای مستقل و $\boldsymbol{\varepsilon}$ بردار خطای تصادفی است. فرض می شود $n>(k+1)$ و $r(\boldsymbol{X})=k+1$. حال اگر تعداد مشاهدات از تعداد پارامترها کمتر باشد ($n<k+1$) و یا اگر یک رابطه خطی میان xها وجود داشته باشد آنگاه برآورد پارامترها به روش معمول امکان پذیر نخواهد شد (نیرومند، 1387).

2-3 برآورد پارامترها

شیوه‌های مختلفی برای برآورد پارامترها وجود دارد که از آن جمله می‌توان به روش کمترین توان دوم خطاها و حداکثر درستنمایی اشاره کرد.

برای برآورد بردار پارامتر $\boldsymbol{\beta}$ به روش کمترین مجموع توان دوم خطاها فرضیات مربوط به بردار $\boldsymbol{\varepsilon}$ که در بخش قبل اشاره شد، را در نظر می‌گیریم. تابع مجموع توان دوم خطاها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$SSE(\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-\sum_{j=1}^{k}b_jx_{ij})^2=(\mathbf{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\mathbf{y}-\boldsymbol{X\beta}). \qquad (6\text{-}2)$$

بردار برآوردگرهای کمترین مجموع توان دوم خطاهای $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ را طوری پیدا می‌کنیم که عبارت (6-2) مینیمم شود. بنابراین با مشتق گیری از این تابع نسبت به b_jها خواهیم داشت:

$$\left.\frac{\partial SSE(\boldsymbol{\beta})}{\partial b_j}\right|_{b_j=\hat{b}_j}=0 \qquad \Rightarrow$$
$$\left.\frac{\partial SSE(\boldsymbol{\beta})}{\partial b_j}\right|_{b_j=\hat{b}_j}=-2\sum_{i=1}^{n}x_{ij}(y_i-\sum_{j=1}^{k}b_jx_{ij})\Big|_{b_j=\hat{b}_j}=0, \quad j=0,\ldots,k\ , \qquad (7\text{-}2)$$

از آن‌جا که به دست آوردن$k+1$ مجهول $b_k,\ldots,b_0$ از$k+1$ معادله (7-2) در حالت کلی بسیار مشکل است، مشتق‌گیری را به صورت برداری انجام می‌دهیم:

$$-2\boldsymbol{X}'\mathbf{y}+2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}\big|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}}=\boldsymbol{o}. \qquad (8\text{-}2)$$

بنابراین داریم :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathbf{y}. \qquad (9\text{-}2)$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، در رگرسیون خطی می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری به روش کلاسیک پارامترهای مدل را برآورد کرد، ولی در مدل‌های رگرسیون غیرخطی این طور نیست.

در مدل‌های آنالیزواریانس که مانند مدل‌های رگرسیونی در حالت کلی به فرم ماتریسی $\mathbf{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$ نشان داده می‌شوند بردار پارامتر b با بعد$p\times1$ شامل عامل‌ها و اثرات متقابل است و ماتریس $\boldsymbol{X}$ با ابعاد $n\times p$ شامل صفرها و یک‌ها می‌باشد. چون همواره مدل‌های آنالیز واریانس با پارامترهای بیشتری از آن چه که می‌توان برآورد کرد مشخص می‌شوند، ماتریس‌های $\boldsymbol{X}$ و $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$ دارای رتبه کامل نیستند. بنابراین برای برآورد $\boldsymbol{\beta}$ به روش کمترین مربعات دستگاه معادلات $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\hat{b}=\boldsymbol{X}'\mathbf{y}$ دارای جواب یکتا نمی‌باشد. با استفاده از قضیه 1-7 می‌توان نشان داد که معادلات نرمال $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\hat{b}=\boldsymbol{X}'\mathbf{y}$ سازگاند و دارای بی نهایت جواب به صورت $\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}'\mathbf{y}$ می‌باشند (رنچر و اسچالج، 2007).

4-2 ویژگی‌های برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم

برآورد کمترین توان‌های دوم دارای ویژگی‌های جالبی است که در این جا به برخی از آن‌ها اشـاره می‌شود.

1- بردار $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برآوردی برای $\boldsymbol{\beta}$ است، که مجموع توان دوم خطاهـا را صـرف نظـر از هـر ویژگـی توزیع مینیمم می‌کند.

2- بردار $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برآوردی نااریب برای بردار $\boldsymbol{\beta}$ است.

3- اگر $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, s^2\boldsymbol{I})$، آنگاه $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برآوردگر حداکثر درستنمایی $\boldsymbol{\beta}$ است.

4- با توجه به قـضیه گـوس- مـارکف برآوردگـر کمتـرین تـوان دوم خطاهـای $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ در بـین تمـام برآوردهای نااریب خطی برای $\boldsymbol{\beta}$ دارای کمترین واریانس[1] می‌باشند.

5- اگر a یک بردار عددی ستونی باشد، آنگاه $a'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ بهترین برآوردگر خطی نااریـب بـرای ترکیـب خطی $T = a'\boldsymbol{\beta}$ است.

اثبات این ویژگی‌ها را در کتاب‌های مختلف رگرسیونی از جملـه بازرگـان لاری (1384) ، مونـت گومری و پک[2] (1992) و دریپر و اسمیت[3] (1987) می‌توان یافت.

باید توجه داشت در مدل‌های خطی رتبه ناقص (مانند آنالیز واریانس) چون میانگین $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برای وارون تعمیم یافته خاص $(\boldsymbol{X'X})^-$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} E(\hat{b}) &= (\boldsymbol{X'X})^- \boldsymbol{X'}E(\boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{X'X})^- \boldsymbol{X'X}b \end{aligned} \quad (10\text{-}2)$$

و $(\boldsymbol{X'X})^- \boldsymbol{X'X} \neq \boldsymbol{I}$، از این رو $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ یک برآوردگر نااریب $\boldsymbol{\beta}$ نمی‌باشد.

تعریف2-1. تابع خطی $\boldsymbol{t'}b$ از پارامترها را برآوردپذیر گوییم اگر یک ترکیب خطی از مشاهدات با میانگین برابر $\boldsymbol{t'}b$ وجود داشته باشد. به عبارت دیگر $\boldsymbol{t'}b$ برآوردپذیر است اگر برداری مانند $\mathbf{c}$ وجود داشته باشد به قسمی که $E(\mathbf{c'y}) = \boldsymbol{t'}b$.

---

۱ Best linear Unbiased Estimator (BLUE)
۲ Montgomery and Peck
۳ Draper and Smith

در زیر سه روش را برای تعیین برآوردپذیری تابع خطی $\boldsymbol{t'b}$ بیان می‌کنیم(رنچر و اسچالج، 2007):

1- $\boldsymbol{t'}$ ترکیب خطی از سطرهای $\boldsymbol{X}$ باشد، یعنی برداری مانند $\mathbf{c}$ وجود داشته باشد به قسمی که $\mathbf{c'}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{t'}$.

2- $\boldsymbol{t'}$ ترکیب خطی از سطرها (ستون‌ها)ی $\boldsymbol{X'X}$ باشد.

3- $\boldsymbol{t}$ یا $\boldsymbol{t'}$ چنان باشد که $\boldsymbol{t'}(\boldsymbol{X'X})^{-}\boldsymbol{X'X} = \boldsymbol{t'}$ یا $(\boldsymbol{X'X})^{-}\boldsymbol{X'Xt} = \boldsymbol{t}$.

در رابطه (2-10) عبارت $(\boldsymbol{X'X})^{-}\boldsymbol{X'X}b$ نسبت به انتخاب $(\boldsymbol{X'X})^{-}$ ثابت نیست، یعنی $E(\hat{b})$ برای هر انتخاب $(\boldsymbol{X'X})^{-}$ متفاوت است، بنابراین $\boldsymbol{\beta}$ برآورد پذیر نمی‌باشد (رنچر و اسچالج، 2007).

2-5 برآورد s^2

علاوه بر برآورد بردار پارامترها، برآورد s^2 از ضروریاتی است که امکان آزمون فرضیه‌های مربوط به مدل رگرسیونی را فراهم می‌کند. ایده آل این است که این برآورد با مناسب بودن مدل برازش شده ارتباط نداشته باشد. این تنها وقتی امکان پذیر است که حداقل چند مشاهده $\mathbf{y}$ برای یک مقدار $\boldsymbol{X}$ وجود داشته باشد، یا اینکه اطلاعات پیشین مربوط به s^2 در دسترس باشد. زمانی که نتوان این رویه را به کار برد برآورد s^2 از مجموع توان دوم خطاها یا باقیمانده به دست می‌آید (مونت گومری و پک، 1992):

$$SSE(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = (\mathbf{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{y}'[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}]\mathbf{y}, \qquad (2\text{-}11)$$

که دارای $n-(k+1)$ درجه آزادی است، زیرا تعداد $k+1$ پارامتر در مدل رگرسیونی برآورد شده است. میانگین مربعات باقیمانده‌ها عبارت است از:

$$MSE = \frac{SSE}{n-k-1}, \qquad (2\text{-}12)$$

که یک برآوردگر نااریب s^2 است، یعنی:

$$s^2 = MSE, \qquad (2\text{-}13)$$

با استفاده از صورت‌های درجه دوم می توان نشان داد کـه $\frac{(n-k-1)s^2}{s^2}$ دارای توزیـع خـی دو بـا $(n-k-1)$ درجه آزادی است (مونت گومری و پک، 1992).

در مدل آنالیز واریانس $\mathbf{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$، برآوردگر نااریب s^2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s^2=\frac{SSE}{n-r}=\frac{\mathbf{y}'[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}']\mathbf{y}}{n-r}, \qquad (14-2)$$

که در آن n تعداد سطرهای ماتریس $\boldsymbol{X}$ و $r=r(\boldsymbol{X})$ است. برآوردگر فوق نااریب بوده و نسبت بـه انتخاب $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}$ پایا است.

6-2 آزمون فرضیه در رگرسیون خطی چندگانه

در مدل‌های خطی رتبه کامل و رتبه ناقص و مسائل مربوط به آن آزمون‌های واقعی فرضیه‌ها درباره پارامترهای مدل برای اندازه گیری مناسبت مدل مورد استفاده قرار می گیـرد. در ایـن بخـش چنـد شیوه مهم آزمون فرضیه را تشریح می کنیم. ضرورت فرض نرمال بودن خطاها را نیز ادامه خواهیم داد.

1-6-2 آزمون فرضیه خطی کلی

مدل خطی (5-2) را که در آن ماتریس $\boldsymbol{X}$ دارای رتبه کامل است در نظر بگیرید. فرض خطی کلـی به صورت $H_0:\boldsymbol{Cb}=\boldsymbol{t}$ در مقابل $H_1:\boldsymbol{Cb}\neq\boldsymbol{t}$ است که در آن $\boldsymbol{C}$ ماتریسی با ابعاد $q\times(k+1)$ می‌باشد. فرض می‌کنیم دستگاه معادلات $\boldsymbol{Cb}=\boldsymbol{t}$ سازگار باشد یعنی $r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{C}\,|\,\boldsymbol{t})$، اگر $\boldsymbol{C}$ با رتبـه سطری کامل باشد $\boldsymbol{Cb}=\boldsymbol{t}$ برای هر $\boldsymbol{t}$ سازگار است (آذرنوش و بزرگ نیـا، 1384). در قـضیه زیـر مجموع مربعات مورد استفاده برای آزمون $H_0:\boldsymbol{Cb}=\boldsymbol{t}$ در مقابـل $H_1:\boldsymbol{Cb}\neq\boldsymbol{t}$ را همـراه بـا چنـد خاصیت آن‌ها بیان می‌کنیم. مجموع مربعات مربوط به $\boldsymbol{Cb}-\boldsymbol{t}$ را با SSH نشان می‌دهیم.

قضیه1-2. اگر $\mathbf{y}$ دارای توزیع $N_n(\boldsymbol{Xb},s^2\boldsymbol{I})$ و $\boldsymbol{C}$ یک ماتریس $q\times(k+1)$ با رتبه q (که $q\le(k+1)$) باشند آن‌گاه: