بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد

استاد راهنما:

دکتر عباس سعادتمندی

به‌وسیله:

محدثه محبتی

شهریورماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:
پیوست:

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجو : خانم محدثه محبتی   شماره دانشجویی : ۸۹۱۱۵۸۰۲۰۱

رشته : **ریاضی کاربردی گرایش آنالیزعددی**   دانشکده : علوم ریاضی

عنوان پایان‌نامه :

" حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد"

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارائه می‌گردد.دفاع از پایان نامه در تاریخ ۹۱/۰۶/۲۰ مورد تأیید و ارزیابی هیأت داوران قرار گرفت و با نمره به عدد: ۱۸،۹۰ به حروف: هیجده و نود صدم و درجه عالی به تصویب رسید.

اعضاء هیأت داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱.استاد راهنما :	دکتر عباس سعادتمندی	دانشیار	سعادتمندی
۱.استاد مشاور :	دکتر حمیدرضا تبریزی دوز	استادیار	
۲. متخصص و صاحب نظر داخل دانشگاه :	دکتر اکبر محبی	استادیار	محبی
۳. متخصص و صاحب نظر خارج دانشگاه :	دکتر محمدرضا احمدی	استادیار	
۴.نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه :	دکتر احمد اکبری	دانشیار	

محمدرضا منصورنیا
مدیر تحصیلات تکمیلی

آدرس: کاشان-بلوار قطب راوندی
کدپستی ۵۱۱۶۷ - ۸۷۳۱۷
تلفن ۵۵۵۲۹۳۵-دورنگار ۵۵۵۲۹۳۵
http: www.kashanu.ac.ir

تقدیم به مهربان فرشتگانی که

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن،
جسارت خواستن، عظمت رسیدن
و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آن‌هاست

تقدیم به پدر و مادر مهربانم.

سپاس

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت و

با سپاس از سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما رو سفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر عباس سعادتمندی که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم‌پرور نمود و همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان‌نامه بوده است.

تشکر از استاد مشاور بزرگوارم آقای دکتر حمیدرضا تبریزی‌دوز و داور داخل، آقای دکتر اکبر محبی و داور خارج، آقای دکتر محمدرضا احمدی و نماینده تحصیلات تکمیلی، آقای دکتر احمد اکبری که زحمت داوری این پایان‌نامه را به انجام رسانیدند.

چکیده

توسیع مفهوم مشتق $D^\alpha f(x)$ برای مقادیر غیرصحیح α، که آن را محاسبات کسری می‌نامیم، از همان زمان ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد توجه محققین بوده است. اما تا دهه‌های اخیر از نظر کاربرد چندان مورد توجه قرار نگرفته است. در سال‌های اخیر دامنه‌ی کاربرد محاسبات کسری بسیار وسیع شده است. معمولاً استفاده از محاسبات کسری برای مدل‌های فیزیکی و پروسه‌های مهندسی باعث بیان بهتر آن‌ها می‌شود. معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری در اکثر این مدل‌ها ظاهر می‌گردد که متأسفانه اغلب دارای جواب تحلیلی نیستند. به همین دلیل ما احتیاج به یک روش عددی قابل اعتماد و مؤثر برای حل اینگونه معادلات داریم. در این پایان‌نامه به ارائه‌ی یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتق مرتبه کسری که در علم فیزیک و مهندسی دارای کاربردهای فراوانی هستند پرداخته می شود و جواب‌های تقریبی آن‌ها با دقت مناسب بدست می‌آید. در این تحقیق ضمن معرفی چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف، با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های متعامد و نیز با در نظر گرفتن خواص مشتقات کسری از نوع کاپوتو، خصوصاً خاصیت خطی بودن این نوع مشتقات، به محاسبه‌ی ماتریس‌های عملیاتی لژاندر و چبیشف برای مشتقات کسری می‌پردازیم و سپس با استفاده از روش‌های طیفی تاو و هم‌مکانی به حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری و معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری پرداخته می‌شود. همچنین ایده‌های ارایه شده در این پایان‌نامه را برای حل معادله تلگراف از مرتبه کسری به کار برده‌ایم و جواب‌های قابل قبولی بدست آمده است.

کلمات کلیدی

محاسبات کسری، معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌های چبیشف، کاپوتو، روش طیفی تاو، روش طیفی هم‌مکانی، ماتریس عملیاتی مشتق

فهرست مطالب

پیشگفتار

محاسبات کسری[۱] نامی برای تئوری انتگرال‌ها و مشتق‌ها از مرتبه‌ی دلخواه است و دارای قدمتی بیش از ۳۰۰ سال است[۲۵]. تاریخچه‌ی محاسبات کسری به شروع مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بر می‌گردد.

شکل ۱: (راست)لیبنیز (۱۷۱۶ – ۱۶۴۶)، (چپ)هوپیتال(۱۷۰۴ – ۱۶۶۱).

در سال ۱۶۹۵ شخصی به نام هوپیتال[۲] درطی نامه‌ای از لیبنیز[۳] در مورد مفهوم $\frac{d^ny}{dx^n}$ وقتی $n=\frac{1}{2}$ باشد سؤال کرد. لیبنیز در تاریخ۳۰سپتامبر ۱۶۹۵ برای هوپیتال چنین نوشت: این یک پارادوکس آشکار است و یک روز پیامد سودمند آن آشکار خواهد شد[۱۵].

همان‌طور که می‌دانیم مفهوم مشتق و انتگرال از مرتبه‌ی صحیح، توضیح روشن فیزیکی و هندسی دارد

[۱] Fractional Calculus
[۲] Hopital
[۳] Leibniz

ولی در حالتی که مرتبه‌ی مشتق و انتگرال، کسری (غیر صحیح) است، به‌طورکلی توضیح قابل قبولی وجود ندارد. علیرغم قدمت طولانی محاسبات کسری متأسفانه تا سال‌های اخیر توجه چندانی به آن‌ها نشده است. هم‌اکنون مسائل بسیار بزرگ علمی و مهندسی در ارتباط با محاسبات کسری وجود دارند که هنوز پوشیده هستند و شاید پاسخ آن‌ها در قرن جاری ارائه شود. برای مثال، محاسبات کسری برای حل مسائل مهمی در مکانیک‌های آماری و پیوستار، علم اقتصاد، رباتیک، تئوری کنترل بهینه، پردازش سیگنال و غیره اعمال شده است. اغلب، مشتق و انتگرال کسری مدل‌های دقیق‌تری از دستگاه‌های تحت بررسی تهیه می‌کنند. یکی از مهمترین مرجع روی موضوع محاسبات کسری مرجع [۲۵] است که بیشتر از همه به معادلات دیفرانسیل کسری (یعنی معادلات دیفرانسیلی که مشتقات موجود در آن‌ها از مرتبه‌ی غیرصحیح می‌باشد و در این پایان‌نامه این نوع معادلات دیفرانسیل را معادلات دیفرانسیل کسری می‌نامیم) می‌پردازد. همچنین کاربردهای زیادی در این مورد را می‌توان در مرجع [۱۵] یافت. بیشتر معادلات دیفرانسیل کسری جواب تحلیلی ندارند بنابراین باید از تکنیک‌های عددی برای یافتن جواب‌های آن‌ها استفاده شود. وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل کسری توسط محققان زیادی بررسی شده است [۲۵، ۱۵]. اخیراً چندین روش عددی و نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال کسری بیان شده است مثل روش تکراری تغییراتی[۴] [۲۲، ۱۳] ، روش آشفتگی هموتوپی[۵] [۲۱]، روش تجزیه ی ادومیان[۶][۳۳]، روش آنالیز هموتوپی[۷] [۹]، و روش هم‌مکانی[۸] [۲۹، ۲۶].

همان‌طورکه اشاره شد، موضوع محاسبات کسری در طول سه دهه‌ی گذشته یا بیشتر، محبوبیت فراوانی پیدا کرده است که عمدتاً به علت کاربردهایی گسترده در زمینه‌های علمی و مهندسی می‌باشد. تعاریف

[۴]Variational iteration method
[۵]Homotopy perturbation method
[۶]Adomian's decomposition method
[۷]Homotopy analysis method
[۸]Collocation method

متفاوتی ازمشتق‌ها و انتگرال‌های کسری وجود دارند مانند[۱۵]:

گرانوالد[۹]، ریمان-لیوویل[۱۰]، اویلر[۱۱]، کاپوتو[۱۲]، آبل[۱۳]، فوریه[۱۴]، ...

که در فصل‌های بعدی برخی از آن‌ها را معرفی می‌کنیم. اما مزیت اصلی روش کاپوتو این است که در مدل‌سازی پدیده‌های جهان حقیقی با معادله دیفرانسیل کسری، شرایط اولیه برای معادلات دیفرانسیل کسری با مشتق کاپوتو شکلی شبیه به شرایط اولیه برای معادلات با مرتبه‌ی صحیح دارد و این خاصیت تعریف مشتق کسری از نوع کاپوتو را به تعریف ریمان-لیوویل برتری داده است[۲۵]. برای نمایش مشتقات کسری از مرتبه‌ی $(\alpha > 0)$ از نمادی مثل ${}_aD_t^{\alpha} f(t)$ استفاده می‌شود که a و t محدودیت‌های روایت شده برای عملگر دیفرانسیل کسری است. وجود این نمادها در مشتق کسری ضروری است زیرا از ابهام در کاربرد مشتق کسری برای مسایل حقیقی جلوگیری می‌کند. ما از نماد دیگری برای انتگرال‌های کسری استفاده نخواهیم کرد. انتگرال کسری مرتبه‌ی $\beta > 0$ را به وسیله‌ی ${}_aD_t^{-\beta} f(t)$ نشان خواهیم داد.

[۹] Grünwald
[۱۰] Riemann-Liouville
[۱۱] Oiler
[۱۲] Caputo
[۱۳] Abel
[۱۴] Fourier

فصل ۱

آشنایی با مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم و توابع مقدماتی را که در سراسر این تحقیق به کار رفته‌اند، به اختصار بیان می‌کنیم. همچنین قضایایی که گاهی به آن‌ها استناد می‌شود، بیان شده‌اند که برخی از آن‌ها را اثبات کرده‌ایم و برای بقیه، مرجعی مناسب معرفی شده است که خواننده در صورت نیاز می‌تواند با مراجعه به آن، اثبات قضیه را مشاهده کند.

۱.۱ تابع گاما

تابع گاما[۱] به صورت انتگرالی زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt, \quad z > 0, \tag{۱.۱.۱}$$

به راحتی با استفاده از تعریف انتگرال بالا می‌توان دید که $\Gamma(1) = 1$، همچنین داریم:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{۲.۱.۱}$$

زیرا با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء از رابطه (۱.۱.۱) داریم:

$$\Gamma(z) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{z}t^{z}e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=a} + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{z}e^{-t}t^{z}dt = \frac{1}{z}\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{z}dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

[۱] Gamma function

همچنین با استفاده از تعریف انتگرالی تابع گاما و استفاده از روش انتگرالی جزء به جزء می‌توان دید که $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. حال با توجه به رابطه (۲.۱.۱)، تابع گاما برای اعداد منفی غیر صحیح نیز تعمیم داده می‌شود[۲۵، ۱۵]. به‌طور مثال:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}.$$

این تابع در مقادیر مختلط ($\mathbb{C}$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1+iy}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}e^{iy\log(t)}dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\left[\cos\left(y\log(t)\right) + i\sin\left(y\log(t)\right)\right]dt. \qquad (۳.۱.۱)$$

برای مشاهده‌ی خوش‌تعریفی و همگرایی رابطه‌ی فوق به [۲۵] مراجعه شود.

همچنین تابع گاما را با فرض $\mathfrak{Re}(z) > 0$ می‌توان بوسیله‌ی حد زیر نشان داد[۲۵]:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$

و نیز می‌توان مشاهده نمود که[۱۵]:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad (\mathfrak{R}(z) > -n;\ \ n\in\mathbb{N};\ \ z\notin\mathbb{Z}_0^- := \{0,-1,-2,\cdots\}).$$

در اینجا $(z)_n$[۲]، برای مقادیر مختلط $z\in\mathbb{C}$ و مقدار صحیح غیر منفی $n\in\mathbb{N}_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1), \ \ (n\in\mathbb{N}). \qquad (۴.۱.۱)$$

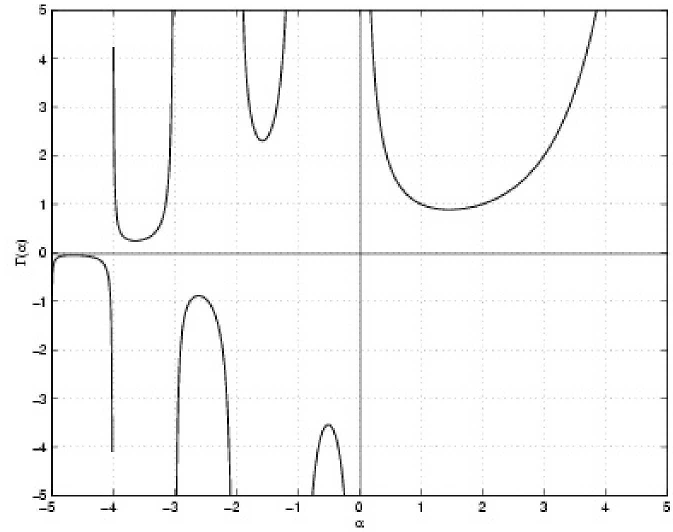
طبق رابطه‌ی (۴.۱.۱) و (۲.۱.۱) داریم[۱۵]:

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n!, \ \ (n\in\mathbb{N}_0)$$

[۲] Pochhammer symbol

$$\Gamma(z)\Gamma(۱-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (z\notin \mathbb{Z}_۰;\ \ ۰<\Re(z)<۱);$$

$$\Gamma(n+\frac{۱}{۲})=\frac{(۲n-۱)!!}{۲^n}\sqrt{\pi}, \quad (۲n-۱)!!:=۱.۳\cdots(۲n-۱), \ \ (n\in\mathbb{N})$$



شکل ۱.۱: نمودار تابع $\Gamma(\alpha)$.

۲.۱ تابع میتگ-لفلر

تابع یک پارامتری میتگ-لفلر[۳] به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+۱)}.$$

این تابع توسط میتگ-لفلر معرفی شد[۱۸] و توسط ویمن[۴]مورد مطالعه قرار گرفت[۳۴]. این تابع دارای کاربردهای زیادی در محاسبات کسری است. نقش این تابع در حل معادلات دیفرانسیل کسری مشابه نقش تابع نمایی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی است. توجه شود که تابع نمایی، معادل انتخاب $\alpha=۱$ در این تابع است. تابع دو پارامتری میتگ-لفلر که نقش خیلی مهمی در محاسبات

[۳]Mittag-Leffler
[۴]Wiman

کسری بازی می‌کند توسط آگاروال[5]معرفی شد[۱]. این تابع می‌توانست به نام این شخص نامیده شود اما به طور سخاوتمندانه‌ای علامتی شبیه به علامت یک پارامتری برای این تابع برگزید. به همین دلیل تابع دو پارامتری را نیز تابع میتگ-لفلر نامیدند. این تابع دو پارامتری به شکل زیر است[۲۵]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ (\alpha>0,\beta>0).$$

طبق تعریف بالا داریم:

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z,\\
E_{1,2}(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}\\
&=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^z-1}{z},\\
E_{1,3}(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}\\
&=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^z-1-z}{z^2},
\end{aligned}$$

و به‌طور کلی داریم:

$$E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right\},$$

توابع $\sinh(z)$ و $\cosh(z)$ نیز حالت خاصی از این تابع هستند:

$$E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sinh(z)}{z},$$

[5] Agarwal

به همین ترتیب سایر توابع هذلولوی[۶] را نیز می‌توان با این تابع بیان کرد[۲۵]. برای $\beta = 1$، تابع همان تابع یک پارامتری خواهد بود:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z).$$

هنگامی‌که $\alpha = n \in \mathbb{N}$، فرمول مشتق برای $E_n(\lambda z^n)$ به شکل زیر برقرار است[۱۵]:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(E_n(\lambda z^n)\right) = \lambda E_n(\lambda z^n), \quad (n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C}).$$

و

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{n-1} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right)\right) = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+1}} E_n(\frac{\lambda}{z^n}), \quad (z \neq 0; n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C}).$$

در دو لم زیر ارتباط بین تابع گاما و تابع میتگ-لفلر ارائه شده است.

لم ۱.۱. برای $\alpha > 0$ و $\{z \in \mathbb{C}; |\arg(z)| < \pi\}$ رابطه‌ی زیر برقرار است[۱۵]:

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)} (-z)^{-s} ds,$$

به‌طوری‌که برای تمام قسمت‌های طرف منفی انتگرال‌گیری $s = -k, k \in \mathbb{N}_0$ و برای قسمت‌های مثبت $s = n + 1 (n \in \mathbb{N}_0)$، که در آن $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

به‌طور مشابه برای تابع دو پارامتری میتگ-لفلر، لم زیر را داریم:

لم ۲.۱. برای $\alpha > 0$ و $\{z \in \mathbb{C}; |\arg(-z)| < \pi\}$ رابطه‌ی زیر برقرار است[۱۵]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)} (-z)^{-s} ds,$$

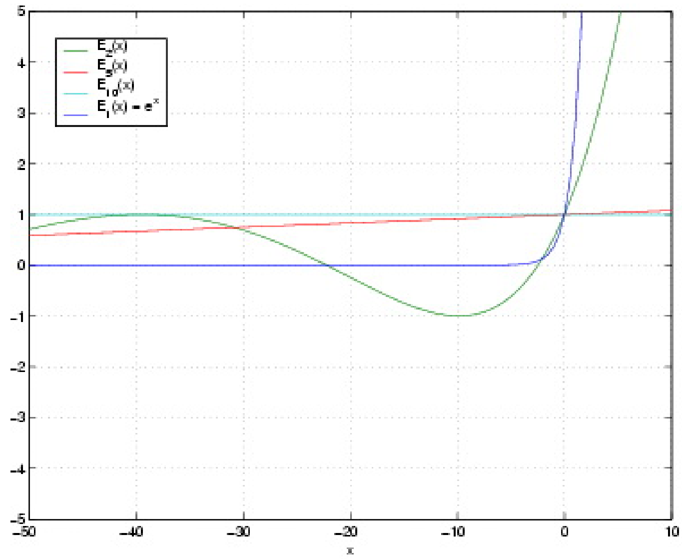
به‌طوری‌که برای تمام قسمت‌های طرف منفی انتگرال‌گیری $s = -k (k \in \mathbb{N}_0)$ و برای قسمت‌های مثبت $s = n + 1 (n \in \mathbb{N}_0)$.

[۶] Hyperbolic

همچنین می‌توان نشان داد[۱۵]:

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\beta-۱}E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\right)=t^{\beta-m-۱}E_{\alpha,\beta-m}(t^\alpha),\ \ m=۱,۲,۳,\cdots.$$

در شکل زیر نمودار تابع میتگ-لفلر ارائه شده است.



شکل ۲.۱: تابع میتگ-لفلر برای مقادیر مختلف α و $\beta=۱$.

۳.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد

فرض کنیم $\{\varphi_i(x); i=۱,۲,...\}$ چندجمله‌ای‌هایی از درجه ی i و متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ در فاصله‌ی $[a,b]$ باشد در این‌صورت داریم:

$$<\varphi_m(x),\varphi_n(x)>=\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)w(x)dx=۰,\qquad m\neq n \tag{۵.۳.۱}$$

تابع وزن $w(x)$ روی بازه‌ی $[a,b]$ همواره غیر منفی است و همچنین بازه‌ی $[a,b]$ ممکن است نامتناهی باشد. تابع وزن باید شرایط زیر را دارا باشد[۳۲]:

۱) $w(x)\geq ۰$ و قابل اندازه‌گیری روی بازه‌ی متناهی یا نامتناهی $[a,b]$ باشد.

۲)$\mu_k:=\int_a^b x^k w(x)dx$ برای $k=۰,۱,\cdots$، موجود و متناهی‌اند.

۳)برای چندجمله‌ای‌های $s(x)$ که روی بازه‌ی $[a,b]$ نامنفی‌اند، $\int_a^b w(x)s(x)dx = 0$ هنگامی‌که $s(x) \equiv 0$.

تعریف ۳.۱. چندجمله‌ای‌های متعامد $\{\varphi_i(x); i = 1, 2, ...\}$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ را متعامد نرمال گوییم هرگاه:

$$< \varphi_m(x), \varphi_n(x) >= 1 \qquad m = n. \tag{۶.۳.۱}$$

یکی از بزرگترین خواص چندجمله‌ای‌های متعامد این است که اگر $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ باشد آن‌گاه با استفاده از رابطه‌ی (۵.۳.۱) داریم:

$$< f, \varphi_m >= \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \varphi_n(x), \varphi_m(x) >= a_m < \varphi_m, \varphi_m >$$

در نتیجه:

$$a_m = \frac{< f, \varphi_m(x) >}{< \varphi_m(x), \varphi_m(x) >} \tag{۷.۳.۱}$$

قضیه ۴.۱. اگر $\{x_i; i = 0, 1, \cdots, n\}$ ریشه‌های چندجمله‌ای متعامد $\varphi_n(x)$ باشند، آن‌گاه x_iها ساده و حقیقی هستند و در بازه‌ی $[a,b]$ قرار دارند[۳۲].

در این فصل ما دو نوع مهم از این چندجمله‌ای‌ها را معرفی کرده و برخی از خصوصیاتشان را ذکر خواهیم کرد.

۱.۳.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر

همان‌طور که می‌دانیم چندجمله‌ای‌های لژاندر[۷] روی فاصله‌ی $[-1, 1]$ تعریف می‌گردند و با کمک فرمول تکراری زیر می‌توان آن‌ها را بدست آورد:

$$L_{i+1}(z) = \frac{2i+1}{i+1} z L_i(z) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(z) \quad i = 1, 2, ..$$

[۷] Legendre polynomials

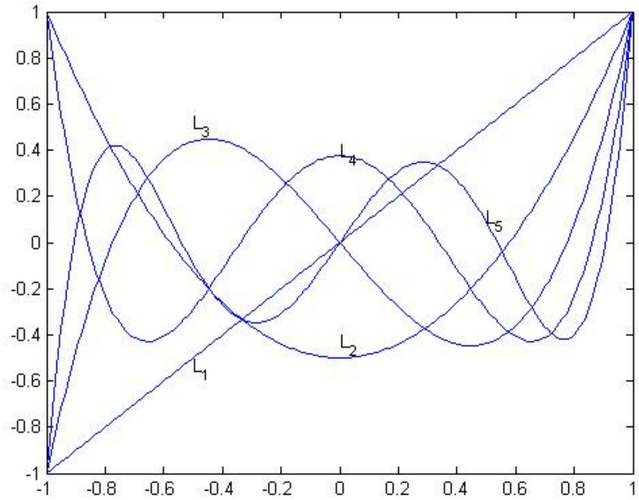
به‌طوری‌که $L_\circ(z) = ۱$ و $L_۱(z) = z$ است. در شکل (۳.۱) نمودار پنج جمله‌ی اول این چندجمله‌ای‌ها رسم شده است. این چندجمله‌ای‌ها جواب‌های مسأله‌ی اشتورم-لیویل[۸] زیر هستند[۱۱]:

$$\frac{d}{dx}(۱-x^۲)\frac{dL_n(x)}{dx}+n(n+۱)L_n(x)=\circ.$$

خاصیت تعامد این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است:

$$\int_{-۱}^{۱} L_i(x)L_j(x)dx = \begin{cases} \frac{۲}{۲i+۱} & i=j, \\ \circ & i\neq j. \end{cases} \tag{۸.۳.۱}$$

همچنین رابطه‌ی بازگشتی دیگری که بین این چندجمله‌ای‌ها وجود دارد به صورت زیر است:



شکل ۳.۱: پنج جمله‌ی اول چندجمله‌ای‌های لژاندر.

$$L_n(x)=\frac{۱}{۲n+۱}L'_{n+۱}(x)-\frac{۱}{۲n+۱}L'_{n-۱}(x),\quad L_\circ(x)=L'_۱(x).$$

برای آن‌که سیستم نرمال شود کافی است که چندجمله‌ای‌ها را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$p_n(x)=\frac{۲n+۱}{۲}L_n(x).$$

[۸]Sturm-Liouville