بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش جبر

عنوان

درون – اساسی گروه‌های آبلی بی تاب از رتبه ۳

استاد راهنما

دکتر احد مهدیزاده

استاد مشاور

دکتر محمد شهریاری

پژوهشگر

سعید زارعی

بهمن ۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: زارعی	نام: سعید

عنوان: درون — اساسی گروه‌های آبلی بی تاب از رتبه ۳

استاد راهنما : دکتر احد مهدیزاده

استاد مشاور: دکتر محمد شهریاری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۶۲

کلید واژه‌ها: درون — اساسی، تابع‌جمله، درون تابع و رتبه.

چکیده

در این پایاننامه درون — اساسی گروه‌های آبلی بی‌تاب از رتبه‌ی ۳ را مورد بررسی قرار می‌دهیم برای این کار کافی است گروه‌های آبلی را به صورت مدول‌هایی روی هسته‌شان در نظر بگیریم و درون — اساسی این مدول‌ها را بررسی کنیم.

تقدیم به:

پدر بزرگوارم

مادر عزیزم

خواهران و برادرم

تا پایان عمر خود نخواهم توانست ذره‌ای از محبتهای شما را جبران کنم.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احد مهدیزاده اقدم، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم همچنین از جناب آقای دکتر محمد شهریاری که زحمت مشاوره این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

از خانواده عزیزم که همواره حامی و مشوق من بوده‌اند و همچنین از دوستان عزیزم که در طی این مدت به من کمک کردند نهایت تشکر و قدردانی را دارم و برای همه آن‌ها از درگاه ایزد منان موفقیت و شادکامی را خواهانم.

سعید زارعی

بهمن ۱۳۸۸

فهرست مطالب

مقدمه

این پایاننامه بر اساس مقالهی

On endoprimality of torsion-free abelian groups of rank 3

نوشتهی K. Kaarli , K. Metsalu میباشد که در مجلهی

Acta Math. Hungar 104 (4) (2004), 271-289

چاپ شده است.

در مرجع [3] درون — اساسی گروههای آبلی از رتبههای ۱ و ۲ مورد بررسی قرار گرفته شده است.دراین پایاننامه درون — اساسی گروههای آبلی بیتاب از رتبهی ۳ مورد بررسی قرار میگیرد.

این پایاننامه در ۴ فصل تنظیم شده است، فصل اول مربوط به تعاریف و قضایای مقدماتی میباشد.

در فصل دوم بعد از تعریف مهم مدولهای غنی و قضایای مربوط به آن به بررسی مدولهای ریش از بعد ۳ خواهیم پرداخت.

فصل سوم به کاربرد درون — اساسی در گروههای آبلی اختصاص دارد.

در فصل چهارم قابلیت تجزیه پذیری این گروهها را مورد بررسی قرار میدهیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه تعویض پذیر و یکدار باشد، $R-$ جبر A حلقه‌ای است که

۱) $(A,+)$ یک $R-$ مدول (چپ) یکانی است.

۲) به ازای هر $r \in R$ و $a, b \in A$، $r(ab) = (ra)b = a(rb)$.

$R-$ جبر A که به عنوان حلقه یک حلقه بخشی است یک جبر بخشی نام دارد.

نظریه‌ی کلاسیک جبرها به جبرهای روی میدان R می‌پردازد. یک چنین جبری فضایی برداری روی R است و در نتیجه نتایج مختلف جبر خطی قابل اعمال‌اند. یک جبر روی میدان R که به عنوان فضایی برداری روی R با بعد متناهی باشد یک جبر با بعد متناهی روی R نام دارد.

تعریف ۲.۱ گروه آبلی A را بخش پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر عدد طبیعی n و هر عضو

$a \in A$، عضوی مانند b در A وجود داشته باشد بطوریکه $a = nb$. بطور معادل گروه آبلی A بخش پذیر است هرگاه برای هر عدد طبیعی n، $A = nA$.

تعریف ۳.۱ گروه آبلی A به ازای عدد اولی مانند p، $p-$ بخش پذیر گوییم هر گاه برای هر عدد طبیعی مانند n و هر $a \in A$، عضوی مانند $b \in A$ وجود داشته باشد بطوریکه $a = p^n b$.

تعریف ۴.۱ گروه آبلی A را بی‌تاب می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ و هر عدد طبیعی n داشته باشیم $na \neq 0$.

تعریف ۵.۱ فرض می‌کنیم A یک گروه آبلی بی‌تاب باشد. زیر حلقه‌ای از $\mathbb{Q}$ مانند N را هسته‌ی A گوییم هرگاه

$$N = \{r \in \mathbb{Q} | \forall x \in A\ , rx \in A\}.$$

تعریف ۶.۱ فرض می‌کنیم K زیر مجموعه‌ای از $R-$ مدول چپ M باشد. در این صورت $Ann_R K = \{r \in R | rk = 0\ \forall k \in K\}$ را پوچ ساز K گوییم.

تعریف ۷.۱ $R-$ مدول چپ M را وفادار گوییم هرگاه پوچ ساز آن برابر صفر باشد.

تعریف ۸.۱ فرض می‌کنیم A یک گروه آبلی و $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ زیر مجموعه از A باشد در این صورت S را مستقل خطی یا مستقل گوییم اگر $n_1s_1 + n_2s_2 + \cdots + n_ks_k = 0$ آنگاه به ازای هر $1 \leq i \leq k$، $n_is_i = 0$ (n_i ها اعداد صحیح اند). اگر S مستقل نباشد آن را وابسته می نامیم.

تعریف ۹.۱ زیر مجموعه‌ی مستقل S از گروه A را ماکسیمال گوییم هرگاه S' زیر مجموعه‌ی مستقل A باشد بطوریکه $S \subseteq S'$، آنگاه $S = S'$.

تعریف ۱۰.۱ رتبه‌ی A که آن را با $r(A)$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض می کنیم S_p زیر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال A باشد بطوریکه مرتبه هر عضو آن توانی از عدد اول p است در این صورت $r_p(A)$ را کاردینال S_p در نظر می گیریم. همچنین فرض می کنیم که S_0 زیر مجموعه مستقل ماکسیمال A باشد بطوریکه هر عضو آن از مرتبه‌ی نامتناهی باشد کاردینال S_0 را با $r_0(A)$ نمایش می‌دهیم. حال با استفاده از مطالب فوق $r(A)$ را به صورت $r(A) = r_0(A) + \sum r_p(A)$ تعریف می کنیم.

تعریف ۱۱.۱ فرض می‌کنیم A یک گروه بی تاب و p نیز عدد اول دلخواهی باشد. $x \in A$ را در نظر می گیریم، گوییم ارتفاع x نسبت به p برابر n است و می نویسیم $h_p(x) = n$ هرگاه $x \in p^nA$ ولی $x \notin p^{n+1}A$.

تعریف ۱۲.۱ فرض می‌کنیم A گروهی بی‌تاب باشد و $x \in A$. a_x را به صورت $a_x = \{h_{p_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ تعریف می‌کنیم. حال مجموعه‌ی $M = \{a_x|\ x \in A\}$ را درنظر می گیریم در M یک نسبت به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$a_x \sim a_y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}|h_{p_i}(x) - h_{p_i}(y)| < \infty$$

این نسبت یک رابطه هم ارزی است. کلاس هم ارزی $\bar{a_x} = \{a_z|\ a_x \sim a_z\}$ را در نظر می گیریم مجموعه فوق را نوع x در A می‌نامیم و آن را با نماد $t(x)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱ فرض‌می کنیم N، $R-$ مدول و M توسیعی از آن باشد. گوییم M توسیع اساسی N است هرگاه به ازای هر زیر مدول غیر صفر مانند K از M $(K \neq N)$ داشته باشیم $N \bigcap K \neq 0$.

تعریف ۱۴.۱ فرض می کنیم M، $R-$ مدول باشد. $R-$ مدولی مانند E را توسیع اساسی ماکسیمال M می‌نامیم اگر E توسیع اساسی M باشد و اگر $M \leq E < K$، آنگاه K توسیع اساسی M نباشد. همچنین $R-$ مدول انژکتیوی مانند E را توسیع انژکتیو M می نامیم هرگاه E توسیع M باشد. $R-$ مدولی مثل E را توسیع انژکتیو مینیمال M می‌نامیم اگر E توسیع انژکتیو M باشد و اگر $M \leq K < E$، آنگاه K انژکتیو نباشد.

قضیه ۱۴.۱ فرض می‌کنیم M، $R-$ مدول و E توسیعی از M باشد. در این صورت شرایط زیر معادل اند.

۱) E توسیع اساسی و انژکتیو M است.

۲) E توسیع اساسی ماکسیمال M است.

۳) E توسیع انژکتیو مینیمال M است.

اثبات. به [6] مراجعه شود. □

تعریف ۱۵.۱ فرض می‌کنیم M، $R-$ مدول باشد. هر $R-$ مدول مثل E راکه در یکی از شرایط معادل قضیه بالا صدق کند، پوشش انژکتیو M می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱ فرض می‌کنیم M، $R-$ مدولی غیر صفر باشد. M را ساده می‌نامیم هرگاه 0 و M تنها زیر مدول های M باشند.

تعریف ۱۷.۱ فرض می کنیم M، $R-$ مدول باشد.

زنجیر $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ از زیر مدول های M را که از صفر شروع و به M ختم می‌شود زنجیر سره از زیر مدول‌های M می‌نامیم و n را طول زنجیر تعریف می کنیم. اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $R-$ مدول‌های خارج قسمتی $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ ساده باشند، زنجیر را سری ترکیبی برای M می‌نامیم.

لم ۲.۱ (شور) فرض می‌کنیم M، $R-$ مدولی ساده باشد. در این صورت $End_R(M)$ حلقه بخشی است.

اثبات. به [2] مراجعه شود. □

تعریف ۱۸.۱ فرض می‌کنیم M، $R-$ مدول باشد.M را نیم ساده می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیر مدول از M مانند K، زیر مدولی از M مانند P موجود باشد که $M = K \oplus P$.

قضیه ۳.۱ فرض می‌کنیم M، $R-$ مدولی نیم ساده وغیر صفر باشد. در این صورت M شامل زیر مدولی ساده است.

اثبات. به [6] مراجعه شود. □

قضیه ۴.۱ فرض می‌کنیم M، $R-$ مدولی غیر صفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادل اند.

۱) M مجموعی از زیر مدول‌های ساده‌ی خود است.

۲) M مجموع مستقیمی از زیر مدول‌های ساده‌ی خود است.

۳) M نیم ساده است.

اثبات. به [6] مراجعه شود. □

قضیه ۵.۱ فرض می‌کنیم W زیرفضایی از فضای برداری V روی حلقه بخشی D باشد.

۱) $dim_D W \leq dim_D V$؛

۲) هرگاه $dim_D V = dim_D W$ و $dim_D V$ متناهی باشد، آنگاه $V = W$؛

۳) $dim_D V = dim_D W + dim_D(\frac{V}{W})$.

اثبات. به [2] مراجعه شود. □

قضیه ۶.۱ فرض می‌کنیم R, S, T حلقه‌هایی بخشی باشند به طوری که $R \subset S \subset T$ دراین صورت

$$dim_R T = (dim_S T)(dim_R S)$$

به علاوه $dim_R T$ متناهی است اگر و تنها اگر $dim_S T$ و $dim_R S$ متناهی باشند.

اثبات. به [2] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۱ فرض می‌کنیم M یک فضای برداری n بعدی روی میدان F باشد، دراین صورت یک یکریختی حلقه‌ها مانند $Hom_F(M, M) \simeq Mat_n(F)$ وجود دارد.

اثبات. به [2] مراجعه شود. □

قضیه ۸.۱ هرگاه D یک حلقه بخشی باشد، آنگاه Mat_nD ساده است.

اثبات. به [2] مراجعه شود. □

قضیه ۹.۱ هرگاه I یک ایده‌آل چپ حلقه R باشد آنگاه I یک $R-$ مدول چپ است.

اثبات. به [2] مراجعه شود. □

تعریف ۱۹.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. رادیکال جیکوبسن حلقه R که آن را با $J(R)$ نشان می‌دهیم به صورت $J(R) = \bigcap AnnM$ (M، $R-$ مدول چپ ساده است) تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. دراین صورت شرایط زیر معادل‌اند.

۱) R حلقه نیم ساده است؛

۲) R حلقه آرتینی چپ است که $J(R) = 0$.

اثبات. به [6] مراجعه شود. □

تعریف ۲۰.۱ فرض می‌کنیم A یک گروه باشد. تابع $n-$ متغیره $f : A^n \to A$ روی گروه A را درون تابع A می‌نامیم هرگاه با هر درونریختی از A جا به جا شود. یعنی برای هر درونریختی $\phi \in End(A)$ و همه‌ی $a_1, \cdots, a_n \in A$ داشته باشیم

$$\phi(f(a_1, a_2, \cdots, a_n)) = f(\phi(a_1), \phi(a_2), \cdots, \phi(a_n))$$

تعریف ۲۱.۱ تابع $f : A^n \to A$ را برای گروه A تابع جمله می‌نامیم هرگاه

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n$$

که در آن $k_i \in \mathbb{Z}$.

تعریف ۲۲.۱ فرض می‌کنیم A یک گروه باشد. A را درون — اساسی می‌نامیم اگر و تنها اگر هر درون تابع آن، تابع جمله باشد.

لم ۱۱.۱ فرض می‌کنیم A یک گروه باشد، اگر $End(A)$ با زیرگروهی از $\mathbb{Q}$ یکریخت باشد آنگاه A بی تاب است.

اثبات. به [3] مراجعه شود. □

لم ۱۲.۱ اگر $EndA$ با زیر گروهی از $\mathbb{Q}$ یکریخت باشد آنگاه A درون — اساسی نیست.

اثبات. تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ x & y \neq 0 \end{cases} \tag{۱.۱}$$

را در نظر می‌گیریم نشان می‌دهیم f درون تابع است یعنی نشان می‌دهیم که به ازای هر $\phi \in EndA$ داریم $\phi(f(x,y)) = f(\phi(x),\phi(y))$ فرض می‌کنیم $\phi(x) = rx$ که در آن $r \in \mathbb{Q}$ است حال اگر $y = 0$ آنگاه داریم

$$f(\phi(x),\phi(y)) = f(rx,ry) = 0 = \phi(0) = \phi(f(x,y))$$

اینک حالت $y \neq 0$ را درنظر می‌گیریم با توجه به لم (۱۱.۱) داریم $ry \neq 0$ لذا

$$f(\phi(x),\phi(y)) = f(rx,ry) = rx = rf(x,y) = \phi(f(x,y))$$

پس در هر حالت f درون تابع است. از طرفی f تابع جمله نمی‌باشد لذا نتیجه می‌گیریم که A درون — اساسی نیست. □

لم ۱۳.۱ گروه بی‌تاب از رتبه ۱ درون — اساسی نیست.

اثبات. به [3] مراجعه شود. □

لم ۱۴.۱ هر درون تابع یک متغیره از گروه بی‌تاب دارای رتبه ۱ به صورت $f(x) = rx$ می‌باشد. که در آن r یک عدد گویای ثابت است.

اثبات. به [3] مراجعه شود. □

لم ۱۵.۱ فرض می‌کنیم C گروهی بی‌تاب از رتبه ۱ باشد. در این صورت هر درون تابع یک متغیره از C تابع جمله است اگر و تنها اگر C برای هر عدد اول p، $p-$ بخش پذیر نباشد.

اثبات. اگر C، $p-$ بخش پذیر باشد آنگاه تابع $f(x) = p^{-1}x$ درون تابع است ولی تابع جمله نیست. اگر f درون تابع یک متغیره باشد اما تابع جمله نباشد آنگاه بنا به لم ۱۴.۱، داریم $f(x) = rx$ که در آن $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ لذا C برای هر عامل اول p از مخرج r، $p-$ بخش پذیر است.

□

مثال ۱۶.۱ اگر $p^{-1} \in N$ (p عدد اول دلخواه و N نیز هسته A است.) آنگاه A به عنوان یک گروه آبلی، درون — اساسی نیست.

اثبات. چون $p^{-1} \in N$ لذا به ازای هر $x \in A$ داریم $p^{-1}x \in A$. تابع $f : A \to A$ را با ضابطه $f(x) = p^{-1}x$ در نظر می‌گیریم. چون $p^{-1} \notin \mathbb{Z}$ لذا f تابع جمله نیست. حال فرض می‌کنیم که $\phi \in End(A)$ داریم

$$\phi(f(x)) = \phi(p^{-1}x) = p^{-1}p \ \ \phi(p^{-1}x) = p^{-1}\phi(pp^{-1}x) = p^{-1}\phi(x) = f(\phi(x))$$

یعنی f تابع درون است. □

لم ۱۷.۱ فرض می‌کنیم $A = B \oplus C$ و نیز f درون تابع $n-$ متغیره در A باشد. همچنین فرض می‌کنیم که f_B تحدید تابع f به B و f_C نیز تحدید تابع f به C باشد. در این صورت f_B و f_C به ترتیب درون توابع B و C هستند و نیز $f = (f_B, f_C)$ به این معنی که به ازای هر $b_i \in B$ و $c_i \in C$ $(1 \leq i \leq n)$

$$f(b_1 + c_1, \cdots, b_n + c_n) = f_B(b_1, \cdots, b_n) + f_C(c_1, \cdots, c_n)$$

اثبات. به [3] مراجعه شود. □

تعریف ۲۳.۱ فرض می‌کنیم A یک گروه و $M = \{o(a)|a \in A\}$ باشد. اگر m ای وجود داشته باشد بطوریکه $o(a) \leq m$ آنگاه A را کراندار گوییم.

نتیجه ۱۸.۱ فرض می‌کنیم A جمع مستقیم گروه های ناصفر B و C با $Hom(B,C) = Hom(C,B) = 0$ باشد در این صورت

۱) مجموعه ی درون توابع A شامل تمام جفت های (f_B, f_C) است که در آن f_B و f_C بترتیب درون توابع B و C هستند.

۲) گروه A درون — اساسی است اگر و تنها اگر B و C کراندار و درون — اساسی باشند.

اثبات. به [3] مراجعه شود. □

قضیه ۱۹.۱ فرض می‌کنیم $\mathbb{Z}$ جمعوند مستقیم گروه A باشد یعنی $A = B \oplus \mathbb{Z}$ و همچنین فرض می‌کنیم B بی‌کران باشد در این صورت A درون — اساسی است.

اثبات. فرض می‌کنیم f درون تابع، $n-$ متغیره A باشد با استفاده ازلم(۱۷.۱)، داریم $f = (f_B, f_{\mathbb{Z}})$ که در آن f_B و $f_{\mathbb{Z}}$ بترتیب درون توابع $n-$ متغیره از B و $\mathbb{Z}$ هستند. حال باید نشان دهیم f تابع جمله است اثبات به استقرا روی n است. ابتدا فرض می کنیم $n = 1$ در این صورت با استفاده از لم(۱۴.۱)، $f_{\mathbb{Z}}$ تابع جمله است بدون آنکه خللی به کلیت برهان وارد شود فرض

می‌کنیم $f_{\mathbb{Z}} = 0$. برای هر $b \in B$ درونریختی $\phi \in EndA$ وجود دارد بطوریکه $\phi(1) = b$ لذا داریم

$$f_B(b) = f(b) = f(\phi(1)) = \phi(f(1)) = \phi(f_{\mathbb{Z}}(1)) = \phi(0) = 0$$

لذا $f_B = 0$ وبنابراین $f = 0$. حال فرض می‌کنیم حکم برای $n-1$ برقرار باشد و$n \geq 2$. عضو دلخواه $d \in B$ را در نظر می‌گیریم وفرض می کنیم ψ یک درونریختی A باشد بطوریکه $\psi(1) = d$ و $\psi_B = 1_B$ این درونریختی را توسط $\psi(b+k) = b + kd$ که در آن $b \in B$ و $k \in \mathbb{Z}$ است نشان می‌دهیم در این صورت برای هر$b_1, \cdots, b_n \in B$ و $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$ داریم

$$f((\psi(b_1+k_1), \cdots, \psi(b_n+k_n)) = f(b_1+k_1d, , \cdots, b_n+k_nd) = f_B(b_1+k_1d, \cdots, b_n+k_nd)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} \psi(f(b_1+k_1, \cdots, b_n+k_n)) &= \psi(f_B(b_1, \cdots, b_n) + f_{\mathbb{Z}}(k_1, \cdots . k_n)) \\ &= f_B(b_1, \cdots, b_n) + f_{\mathbb{Z}}(k_1, \cdots, k_n)d \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_B(b_1+k_1d, \cdots, b_n+k_nd) = f_B(b_1, \cdots, b_n) + f_{\mathbb{Z}}(k_1, \cdots, k_n)d \qquad (۲.۱)$$

حال در (۲.۱) قرار می دهیم $b_1 = 0$ و $k_1 = 1$ و $k_2 = \cdots = k_n = 0$ در این صورت داریم

$$f_B(d, b_2, \cdots, b_n) = f_B(0, b_2, \cdots, b_n) + f_{\mathbb{Z}}(1, 0, \cdots, 0)d \qquad (۳.۱)$$

تابع $f(0, x_2, \cdots, x_n)$ یک درون تابع A با $n-1$ متغیر است لذا بنا به فرض استقرا تابع جمله است همچنین $f_B(0, x_2, \cdots, x_n)$ تابع جمله است. حال (۳.۱) را در نظر می گیریم چون $d \in B$