بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

(گرایش جبر)

عنوان:

زیر مدولهای نیمه اول از مدولهای ضربی مدرج

از:

ایمان رستمی

استاد راهنما:

دکتر احمد عباسی

شهریور ماه ۹۲

تقدیم به :

دو موجود مقدس، آنان که توانشان رفت تا من به توانایی برسم و موهایشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه های جاودانه ی زندگی من است.

آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم.

پدر و مادرم

تقدیر و تشکر:

حمد و سپاس خداوند بزرگ و بلند مرتبه.

اکنون که پس از سالیان دراز و زحمات فراوان خود و اساتید گرانقدرم به افتخار دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد نائل شده ام، بر خود لازم می دا نم که از زحمات همراهانم قدردا نی و سپاس گزاری کنم.

از پدر و مادر عزیزم که با نهایت تلاش، زمینه رشد و تحصیل را برای من فراهم کردند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد بسیار بزرگوارم جناب آقای دکتر احمد عباسی که بنده افتخار شاگردی ایشان را دارم، بسیار سپاس گزارم که به عنوان استاد راهنما همواره از محضر ایشان مطالب بسیار آموخته ام و لذا بر خود لازم می دا نم که دراین مدتی که بنده در خدمت ایشان بودم، از این استاد بزرگوار کمال تشکر را داشته باشم. همچنین از داوران محترم ، جناب آقای دکتر حبیب الله انصاری و جناب آقای دکتر منصور هاشمی که زحمت داوری این پایان نامه را برعهده گرفته اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست مطالب

چکیده

زیرمدولهای نیمه اول از مدولهای ضربی مدرج

ایمان رستمی

فرض کنیم G یک گروه ضربی باشد. همچنین فرض کنیم R یک حلقه جا به جایی G- مدرج با عضو همانی و M یک مدول ضربی G- مدرج روی R باشد. یک زیر مدول مدرج سره Q از M نیمه اول نامیده می شود هرگاه برای $K \subseteq h(M)$ و $I \subseteq h(R)$ ، $I^n K \subseteq Q$ ایجاب کند $IK \subseteq Q$. که درآن n یک عددصحیح مثبت است.

کلید واژه : زیرمدول- نیمه اول- مدولهای ضربی- مدرج

Abstract

Semiprime submodules of graded multiplication modules

Iman rostami

Let G be a group . Let R be a G – graded commutative ring with identity and let M be a G-graded multiplication module over R . A proper graded submodule Q of M is semiprime if whenever $I^n K \subseteq Q$, where $I \subseteq h(R)$, n is a positive integer, and $K \subseteq h(M)$, then $IK \subseteq Q$.

Key words: submodule –semiprime -multiplication module- graded

مقدمه

در این پایان نامه حلقه ها همه جابه جایی با عضو همانی و مدولها یکانی هستند. در ابتدای کار به تعریف حلقه ها و مدولهای مدرج می پردازیم که اساس کار ما را تشکیل خواهند داد. سپس مدولهای ضربی را معرفی می کنیم به این صورت که فرض کنیم R یک حلقه جا به جایی با عضو همانی باشد و M یک R مدول باشد. M را R مدول ضربی می نامیم، هرگاه برای هر زیر مدول N از M یک ایده آل I ازR وجود داشته باشد به طوری که $N = IM$. بنابراین در این پایان نامه M ضربی است هرگاه برای هر زیر مدول از M شرط فوق برقرار باشد. بر این اساس می توانیم تعریف یک زیر مدول مدرج پوچ توان N از M را به میان بیاوریم. در واقع با این تعریف، توان k ام یک زیر مدول که تا قبل این تعریف بی معنی بود حالا معنی پیدا کرده است به این صورت که برای هر عدد صحیح مثبت k، N^k را به وسیله $\overbrace{N.N.N.\dots N}^{k \text{ مرتبه}}$ نشان می دهیم. در فصل دوم به تعریف زیر مدول اول و نتایج مربوط به آن خواهیم پرداخت و درادامه ارتباط بین زیرمدولهای اول مدرج و ضربی بودن آن و خاصیت هایی که بین این دو وجود دارد را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین یک شرح ویژه از لم ناکایاما برای مدولهای ضربی را مطرح خواهیم کرد. از طرفی فرض کنیم G یک گروه با عضو همانی e و R یک حلقه جابه جایی G مدرج باشد. داریم M_g یک R_e مدول مدرج است و نتایج مربوط به آن را مورد مطالعه قرار می دهیم. تا اینجای مطالب، آنچه بیان شد شرح مختصری بود از کارکردهای قبلی.

در فصل سوم که در واقع بخش اصلی این پایان نامه است به تعریف و نتایج زیر مدولهای نیمه اول مدرج و زیر مدولها ی تقریباً نیمه اول مدرج که در واقع تعمیمی از زیر مدولهای اول است می پردازیم. در ادامه بعضی از خواص آنرا را مورد بررسی قرار می دهیم. به عنوان نمونه ثابت می کنیم اگرM مدرج متناهی باشد، آنگاه هر زیر مدول مدرج سره ازM مشمول دریک زیر مدول نیمه اول مدرج از M است. همچنین نشان می دهیم که اگر M مدرج متناهی باشد، آنگاه هر ایده آل مدرج سره از M، مشمول

در یک ایده آل نیمه اول مدرج از M است. ثابت می کنیم که هر زیر مدول اول مدرج از M، نیمه اول است.در ادامه نشان می دهیم که اشتراک زیر مدولهای نیمه اول، نیمه اول است و همینطور نشان می دهیم که اگر هر عضو از Ω درM نیمه اول و Ω شامل یک مجموعه مرتب کلی باشد که $\cup_{Q\in\Omega} Q \neq M$، آنگاه $\cup_{Q\in\Omega} Q$ یک زیرمدول نیمه اول مدرج ازM است. تعریف زیر مدول تقریباً g- نیمه اول که $g\in G$ است را ارائه خواهیم کرد. نشان می دهیم که هر زیرمدول نیمه اول، تقریباً نیمه اول است و بعکس. ثابت می کنیم که تعریف تقریباً g- نیمه اول از تعریف تقریباً نیمه اول نتیجه می شود. در پایان مجموع دو زیرمدول تقریباً نیمه اول را بررسی می کنیم. یعنی این که آیا مجموع دو زیرمدول تقریباً نیمه اول، تقریباً نیمه اول است؟ این پایان نامه براساس [1],[2],[3],[4],[5],[6] تالیف گردیده است.

فصل اول : مفاهیم اولیه و حلقه های مدرج

۱-۱ : حلقه ها و مدولهای مدرج

۱-۲ : مدولهای ضربی

مقدمه :

در حالت کلی فرض ما بر این است که همه حلقه ها جابه جایی با عضو همانی و مدولها یکانی هستند. فرض کنیم G یک گروه باشد. R را یک حلقه مدرج یا G – مدرج و M را یک مدول G– مدرج روی R در نظر خواهیم گرفت.

۱-۱ : **حلقه ها ومدولهای مدرج**

تعریف(۱-۱-۱): فرض کنیم G یک گروه ضربی با عضو هما نی e و R یک حلقه جابه جایی با عضو همانی ۱ باشد. R را یک حلقه G - مدرج می نامیم اگر خانواده زیرگروههای جمعی R_g، $g \in G$ از R وجود داشته باشد به طوری که $R = \oplus_{g\in G} R_g$ و برای هر $g , h \in G$ داشته باشیم $R_gR_h \subseteq R_{gh}$. حلقه G- مدرج را با $G(R)$ نشان می دهیم و عضو های R_g را همگن از درجه g می نامیم و همچنین تمام اعضای همگن R را به وسیله ی $h(R)$ نشان می دهیم و داریم $h(R) = \cup_{g\in G} R_g$. از طرفی عضو $a \in R$ را به طور یکتا به صورت $a = \Sigma_{g\in G}\, a_g$ میتوان نوشت که در آن a_g یک g- موئلفه در R_g است.

تعریف(۱-۱-۲): فرض کنیم R یک حلقه G- مدرج و M یک R مدول باشد. M را یک R- مدول G- مدرج یا مدرج می نامیم اگر یک خانواده از زیر گروه های M_g از M به وسیله عضو های $g \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $M = \oplus_{g\in G} M_g$ و برای هر $g , h \in G$ ، $R_gM_h \subseteq M_{gh}$. از این رو، R_gM_h یک زیر گروه جمعی از M است که شامل تمام جمع های متناهی از اعضای r_gs_h است که در آن $r_g \in R_g$ و $s_h \in M_h$. همچنین داریم $h(M) = \cup_{g\in G} M_g$ و اعضای $h(M)$ را اعضای همگن M می نامیم.

تذکر(۱-۱-۱): در تعریف حلقه های مدرج اساساً، اندیس اعضایی چون a_g هستند که به گروه G تعلق دارند.

قضیه(۱-۱-۱): اگر $R = \oplus_{g\in G} R_g$ یک حلقه مدرج باشد، آنگاه R_e یک زیر حلقه از R بوده و $1\in R_e$.

اثبات: چون $R_e . R_e \subseteq R_e$ است، بنا براین R_e نسبت به ضرب بسته است. اگر داشته باشیم $1 = \Sigma_{g\in G} r_g$ که در آن $r_g \in R_g$ و تقریباً تمام r_g ها صفر هستند. در این صورت برای هر $i \in G$، $t_i = 1 . t_i = \Sigma_{g\in G} r_g t_i$. که در آن $r_g t_i \in R_{gi}$. با مقایسه کردن درجه ها برای هر $e \neq g$ داریم $r_g t_i = o$. در نتیجه برای هر $e \neq g$ و برای هر $t \in R$ داریم $r_g\, t = o$. از این رو، $1= r_e \in R_e$.

مثال(۱-۱-۱): فرض کنیم G یک گروه و A یک حلقه باشد. در اینصورت $R = A[G]$ یک حلقه مدرج است که در آن برای هر $g \in G$، $R_g = A_g$.

تعریف(۱-۱-۳): فرض کنیم R یک حلقه مدرج باشد. ایده آل I ازحلقه R را مدرج می نامیم اگر $I = \oplus_{g\in G} I_g$ که در آن برای $g\in G$، $I_g=I \cap R_g$.

لم(۱-۱-۱): فرض کنیم R یک حلقه مدرج باشد. I یک ایده آل مدرج(همگن) از R است اگر و تنها اگر هر عضو دلخواه $x \in u_g$ که $u_g \in I_g$ است را بتوان به صورت $x = \sum_{g\,\in\,G} u_g$ نشان داد که در آن $g \in G$ است. یا به عبارتی به وسیله عضوهای همگن u_g تولید شود.

اثبات: فرض کنیم R یک حلقه مدرج باشد و $R = \oplus_{g\in G} R_g$ که در آن R_g، یک خانواده از زیر گروه های جمعی R است و برای $g , h \in G$ داشته باشیم $R_g R_h \subseteq R_{gh}$. اگر I ایده آل مدرج باشد، آنگاه $I = \oplus_{g\in G} I_g$ که در آن برای $g\in G$، $I_g=I \cap R_g$. و I توسط $\cup_{g\in G}(I \cap R_g)$ تولید می شود. حال فرض کنیم I یک ایده آل باشد که توسط مجموعه H متشکل از عضوهای همگن در R تشکیل شده است و $H = \cup_{g\in G} H_g$ که در آن $g\in G$ و $H_g=H \cap R_g$. در این صورت می توان نوشت

$I = \{\sum_{h_i \in H} r_i h_i \mid r_i \in R\}$ و برای هر عضو متعلق به این مجموعه داریم $I = \sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ برای $r_i \in R$ و تعداد متناهی ناصفر

و $h_i \in H$. همچنین برای هر i می توانیم بنویسیم $r_i = \sum_{j=1}^{m_i} u_{ij}$ که در آن $u_{ij} \in R_g$. بنابراین داریم

$I = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} u_{ij}\ h_i$. اما چون هر I_{ij} و h_i مدرج هستند و R_i زیر گروه آبلی جمعی است داریم $I = \sum_{i=1}^{k} t_i$ که در آن t_i همگن (مدرج) است.□

لم(۱-۱-۲): فرض کنیم R یک حلقه مدرج باشد.

(الف) فرض کنیم I , J دو ایده آل مدرج از R باشند. در این صورت $I + J$ و $I \cap J$ و $I\,J$ ایده آل های مدرج از R هستند.

(ب) فرض کنیم a یک عضو از $h(R)$ باشد. در این صورت ایده آل دوری aR از R مدرج است.

اثبات: الف) فرض کنیم $x + y \in I + J$ یک عضو دلخواه باشد. چون I و J دو ایده آل مدرج از R هستند بنابراین داریم

$x = \sum_{g \in G} u_g$ و $y = \sum_{g \in G} v_g$ که درآن $u_g \in I_g$ و $v_g \in J_g$. درا ین صورت

$$x + y = \sum_{g \in G} u_g + \sum_{g \in G} v_g = \sum_{g \in G}(u_g + v_g) = \sum_{g \in G}(u+v)_g.$$

پس بنابر لم قبلی $I + J$ یک ایده آل مدرج است. حال فرض کنیم $x \in (I \cap J)$ یک عضو دلخواه باشد، دراین صورت $g \in G$ و $x = \sum_{g \in G} u_g$. بنا براین بنابر لم قبل $I \cap J$ یک ایده آل مدرج است. در نهایت فرض کنیم $xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ یک عضو دلخواه از ایده آل IJ باشد. چون $x_i = \sum_{g_i \in G} u_{g_i}$ و $y_i = \sum_{g_i \in G} v_{g_i}$. بنابراین

$$xy = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{g_i \in G} u_{g_i}\Big)\Big(\sum_{g_i \in G} v_{g_i}\Big) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(u_{g_i}\, v_{g_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}(uv)_{g_{ij}}.$$

پس بنابر لم قبل IJ یک ایده آل مدرج است.

ب) شبیه به(الف) ثابت می شود.□

تعریف(۱-۱-۴): یک زیرمدول N از M را مدرج می نامیم اگر $N = \oplus_{g\in G} N_g$ که در آن برای $g \in G$، $N_g = N \cap M_g$.

یا به طور هم ارز برای هر $x \in N$، موئلفه های همگن از x، در خود N باشد.

لم(۱-۱-۳): فرض کنیم $M = \oplus_{g\in G} M_g$ یک R مدول مدرج و N یک زیر مدول مدرج از M باشد. در این صورت M / N یک R مدول مدرج است به طوری که برای هر $g\in G$، $(\frac{M}{N})_g = (M_g+N) / N$.

اثبات: فرض کنیم $g \in G$ و $\{(\frac{M}{N})_g\}$ یک خانواده از زیرگروه های M / N باشد. داریم

$R_h . (\frac{M}{N})_g = (R_h . M_g + N) \subseteq (M_{hg} + N) / N = (\frac{M}{N})_{hg}$. حال اگر $u \in M$ و برای هر $g \in G$، $u_g \in M_g$ و $u = \sum_g u_g$، آنگاه $u + N = \sum_g (u_g + N)$. بنابراین $M / N = \sum_g (\frac{M}{N})_g$. سرانجام فرض کنیم $\sum_g (u_g + N) = o + N$. بنابراین $\sum_g u_g \in N$ و چون N زیر مدول مدرج است، برای هر $g \in G$ داریم $u_g \in N$. از این رو، برای هر $g \in G$، $u_g + N = o + N$ و این نشان می دهد که این جمع مستقیم است . □

نکته(۱-۱-۱): اگر K و N زیر مدول هایی از R- مدول M باشند مجموعه تمام عضوهای $r \in R$ که در رابطه ی $rK \subseteq N$ صدق کند یک ایده آل از R است. این ایده آل را معمولا با $(N :_R K)$ نشان می دهیم.

لم(۱-۱-۴): فرض کنیم R یک حلقه مدرج و M یک R- مدول مدرج باشد.

(الف) اگر N و K زیر مدول های مدرج از M باشند، آنگاه $N + K$ و $N \cap K$ زیر مدول های مدرج از M هستند.

(ب) اگر a یک عضو از $h(R)$ و t یک عضو از $h(M)$ باشد، آنگاه aM و Rt زیرمدول های مدرج از M هستند.

(ج) اگر N و K زیر مدول های مدرج از M باشند، آنگاه $(N :_R K)$ یک ایده آل مدرج از R است.

اثبات: (الف) و (ب) شبیه به لم۱-۱-۲ ثابت می شود.

(ج) نشان می دهیم که $(N :_R K)$ یک ایده آل مدرج از R است. فرض کنید $(N :_R K) = I$. ثابت می کنیم که

$I = \oplus_{g\in G} I_g$. داریم $I_g = I \cap R_g \subseteq I$. در این صورت واضح است که $\oplus_{g\in G} I_g \subseteq I$.

برعکس: فرض کنیم t یک عضو دلخواه از I باشد. چون R مدرج است عضوهای $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ وجود دارد به طوری که $t = \sum_{i=1}^{n} t_{g_i}$ (i اندیس g است)، برای آن که $I \subseteq \oplus_{g\in G} I_g$ کافی است نشان دهیم که $t_{g_i} \in I$. چون در این صورت $t_{g_i} \in R_{g_i} \cap I = I_{g_i}$. به طور دقیق تر نشان می دهیم که $t_{g_i} K \subseteq N$. چون K مدرج است، $t K \subseteq N$ و N هم مدرج است.

بنابراین داریم $t_{g_i} K = t_{g_i} (\oplus_{h\in G} K_h) = \oplus_{h\in G} t_{g_i} K_h \subseteq \oplus_{h\in G} (tK)_{g_i h} \subseteq \oplus_{h\in G} N_{g_i h} \subseteq N$. □

نتیجه(۱-۱-۱): فرض کنیم R یک حلقه ی مدرج باشد. اگر a و b ایده آل های مدرج از R باشند، آنگاه $(a :_R b)$ یک ایده آل مدرج از R است.

تعریف(۱-۱-۵): فرض کنیم R یک حلقه یکدار ناصفر باشد. اشتراک تمام ایده آل های ماکسیمال R را رادیکال ژاکوبسون R می نامیم و آن را با J(R) نشان می دهیم.

تعریف(۱-۱-۶): فرض کنیم M یک R مدول چپ و N زیر مدولی از M باشد و همچنین I یک ایده آل راست از R باشد. در این صورت پوچساز N در R عبارت است از $\mathrm{Ann}_R(N) = \{r \in R \mid r n = 0, \forall n \in N\}$. همچنین پوچساز I در M برابر است با $\mathrm{Ann}_M(I) = \{m \in M \mid xm = 0, \forall x \in I\}$.

تعریف(۱-۱-۷): M را یک مدول باوفا می نامیم اگر پوچساز آن فقط از صفر تشکیل شده باشد یا به عبارتی $\mathrm{Ann}(M) = \{0\}$.

لم(۱-۱-۵): (ناکایاما) فرض کنیم R یک حلقه یکدار ناصفرو I ایده آل چپی از R، مشمول در J(R) باشد. فرض کنیم M

یک R مدول با تولید متناهی باشد به طوری که $IM = M$. در این صورت $M = o$.

اثبات : فرض کنیم که $M \neq o$. در این صورت زیر مدول ماکسیمالی چون P دارد و $M / P \neq o$. روشن است که M/P یک R مدول ساده است. برای هر $a \in J(R)$ داریم $a\,(M/P) = o$.این نشان می دهد که $J(R)\,M/P = o$ یا $(J(R) + P)/P = o$.

بنابراین $J(R)M \leq P$.اما $I \subseteq J(R)$. پس، $M = IM \subseteq J(R)M \subseteq P \subseteq M$. از این رو، $M = P$. این تناقض اثبات را کامل می سازد.

لم(۱-۱-۶): (زرن) هر گاه A یک مجموعه مرتب جزیی ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر در A، کران بالایی در A داشته باشد، آنگاه A شامل عنصر ماکسیمال است.

تعریف(۱-۱-۸): زیر مجموعه ناتهی S از حلقه ی R را ضربی بسته می نامیم هرگاه، به ازای هر $b \in S$ و a داشته باشیم $ab \in S$. یا به طور معادل برای هر عدد صحیح مثبت n و هر $t \in S$، $S \cap (Rt)^n \neq \varnothing$.

تعریف(۱-۱-۹): یک R مدول چپ M ساده (تحویل ناپذیر) نامیده می شود اگر $M \neq o$ و M زیر مدولی غیر از o و M نداشته باشد.

تعریف(۱-۱-۱۰): فرض کنیم P یک ایده آل ماکسیمال از R باشد. R مدول M را P تابی می نامیم اگر برای هر $m \in M$ یک $\rho \in P$ وجود داشته باشد به طوری که $(1 - \rho)\, m = o$. همچنین M را P دوری می نامیم اگر دو عضو $x \in M$ و $q \in P$ وجود داشته باشند به طوری که $(1 - q)\, M \subseteq R\,x$.

تعریف(۱-۱-۱۱): فرض کنیم M یک R مدول باشد. M را یک R مدول تابی می نامیم اگر به ازای هر $m \in M$، عضو ناصفر $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $rm = o$. همچنین گروه آبلی G را تابی می نامیم هر گاه به عنوان یک Z مدول تابی باشد.

تعریف(۱-۱-۱۲): فرض کنیم M یک R مدول باشد. M را یک R مدول تاب آزاد می نامیم هرگاه به ازای $m \in M$، و به ازای هر $o \neq r \in R$ اگر $rm = o$ شود، آنگاه $m = o$. همچنین گروه آبلی G را تاب آزاد می نامیم هر گاه به عنوان یک Z مدول تاب آزاد باشد.

تعریف(۱-۱-۱۳): فرض کنیم R یک حلقه مدرج و I یک ایده آل مدرج از R باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \forall\, g \in G ,\, \exists\, n_g > o \;.\, {x_g}^{n_g} \in I \}$$

۱- ۲ : مدولهای ضربی

تعریف(۱-۲-۱): یک R- مدول مدرج M را یک مدول ضربی مدرج می نامیم هرگاه برای هر زیر مدول مدرج N از M یک ایده آل مدرج a از R وجود داشته باشد به طوری که $N = a M$. همچنین فرض کنیم M یک مدول ضربی مدرج باشد. اگر N و K زیرمدول های مدرج ازM باشند، آنگاه ایده آل های مدرج a و b از R وجود دارد به طوری که $N = a M$ و $K = b M$.

با نماد گذاری اخیرحاصل ضرب N و K به وسیله $(ab)\,M$ تعریف شده و آن را با $N.K$ نشان می دهیم. در حقیقت ab یک ایده آل مدرج ازR است و $N.K$ مستقل از انتخاب a,b است. یا به عبارتی خوش تعریف است. زیرا فرض کنیم $N = I_1M = I_2M$ و $K = J_1M = J_2M$ که در آن I_i و J_i ایده آل های ازR و $i = ۱،۲$.ملاحظه می کنیم که به ازای $r\in I_1$ و

$s \in J_1$ و $m \in M$ ، $rsm \in NK = I_1J_1M$. از $J_1M = J_2M$ داریم $sm = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$ که درآن $r_i \in J_2$ و $m_i \in M$. در این صورت $rsm = \sum_{i=1}^{n} r_i (rm_i)$. از $rm_i \in I_2M = I_1M$ می توانیم داشته باشیم که $rm_i = \sum_{j=1}^{k} t_{ij} m'_{ij}$ که در آن، $t_{ij} \in I_2$ و $m'_{ij} \in M$. از این رو، $rsm = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} r_i t_{ij} m'_{ij}$. بنابراین $rsm \in I_2J_2M$. لذا $I_1J_1M \subseteq I_2J_2M$ و به طور مشابه داریم $I_2J_2M \subseteq I_1J_1M$. همچنین برای هر عدد صحیح مثبت K، N^K را به وسیله $\overbrace{N.N.N.\ldots N}^{k\text{مرتبه}}$ نشان می دهیم.

تعریف(۱-۲-۲): فرض کنیم R یک حلقه مدرج، M یک مدول ضربی مدرج روی R و N یک زیر مدول مدرج از M باشد. مجموعه تمام عضو های $m \in M$ به طوری که به ازای عدد صحیح مثبت k، $(Rm)^k \subseteq N$ باشد را رادیکال مدرج N می نامیم و آن را به وسیله grad(N) نشان می دهیم.

تذکر(۱-۲-۱): بعضی نویسندگان حاصل ضرب t.z از دو عضو $t , z \in M$ را به صورت Rt.Rz تعریف کرده و به ازای عدد صحیح n از نماد $t^n \subseteq M$ استفاده کرده اند. به طور مثال در قضیه ۱-۱۳ ،[۱] و قضیه ۱۲ و نتیجه ۴ از[۵] فرض کنیم $n = 1$ باشد. در این صورت $t \subseteq M$. این مفهوم درست نیست زیرا $t \in M$. از این رو، این تعریف از حاصل ضرب دو عضو از M طبیعی نیست.

تعریف(۱-۲-۳): فرض کنیم R یک حلقه مدرج و M یک مدول ضربی مدرج روی R باشد. یک زیر مدول مدرج N از M را پوچ توان می نامیم اگر به ازای عدد صحیح t، $N^t = o$.

نکته(۱-۲-۱): اگر یک زیر مدول مدرج N از M پوچ توان باشد، آنگاه $grad(o) = grad(N)$.

قضیه(۱-۲-۱): فرض کنیم M یک مدول ضربی روی حلقه R و I یک ایده آل از R مشمول در رادیکال ژاکوبسون از R باشد.

در این صورت، اگر $M = IM$ باشد، آنگاه $M = o$.

اثبات: فرض کنیم $x \in M$. دراین صورت یک ایده ال J از R وجود دارد به طوری که $Rx = JM$. پس

$Rx = JM = JIM = IJM = Ix$. بنابراین به ازای $a \in I$، $x = ax$. اما $1- a$ در R یکه است. از این رو، $x = o$. □

لم(۱-۲-۱): فرض کنیم R یک حلقه باشد.

الف) فرض کنیم S یک زیر مجموعه ی ضربی بسته از R باشد. اگر R مدول M یک مدول ضربی باشد، آنگاه $S^{-1}R$ مدول

$S^{-1}M$، یک مدول ضربی است.

ب) R مدول متناهی مولد M یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر برای تمام ایده آل های اول یا ماکسیمال P از R ، R_p مدول

M_p ، ضربی باشد. یاد آوری می شود که $s^{-1}R = R_p$ و $S = R - P$

اثبات: ر ک . به لم۲ از[۴].

تعریف(۱-۲-۴): فرض کنیم M یک R مدول مدرج باشد. زیرمدول مدرج N از M را ماکسیمال می نامیم اگر $N \neq M$

و یک زیر مدول مدرج K از M وجود نداشته باشد به طوری که $N \not\subset K \not\subset M$.

تعریف(۱-۲-۵): R مدول M را ساده مدرج می نامیم اگر تنها زیر مدولهای مدرج آن، صفر و خود M باشد.

تعریف(۱-۲-۶): فرض کنیم R یک حلقه مدرج و M یک R مدول ضربی مدرج باشد. عضو $o \neq a \in h(M)$ را یک مقسوم

علیه صفر مدرج می گوییم اگر $o \neq b \in h(M)$ وجود داشته باشد به طوری که $ab = o$.

لم(۱-۲-۲): فرض کنیم M یک مدول ساده مدرج روی حلقه مدرج R باشد. در این صورت هر مقسوم علیه صفر مدرج روی M، یک عضو پوچساز ازM است.

اثبات: فرض کنیم r یک عضو دلخواه مقسوم علیه صفر مدرج روی M باشد. در این صورت عضو $o \neq a \in h(M)$ وجود دارد به طوری که $ra = o$. چون M مدول ساده مدرج است داریم $Ra = M$. از این رو، $rM = r(Ra) = (Rr)a = R(ra) = o$.

بنابراین r یک عضو پوچساز از M است. □