**دانشکده ریاضی**

گروه ریاضیات کاربردی

**پایان نامه**

**برای دریافت درجه دکتری**

**ریاضی کاربردی**

# حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی به‌وسیله‌ی روش‌های نیمه تحلیلی با استفاده ازعملگرهای جدید

**استادراهنما: دکتر سید محمد مهدی حسینی**

**اساتیدمشاور: دکتر قاسم بریدلقمانی**

**دکتر محمدرضا هوشمند اصل**

**پژوهش و نگارش: مصطفی جعفری**

**دی ماه ۱۳۸۹**

# چکیده

در این رساله با استفاده از روش‌های نیمه تحلیلی جدید به حل حالت‌های متنوعی از معادلات دیفرانسیل پرداخته‌ایم. معادلاتی از قبیل  معادلات دیفرانسیل منفرد مقدار اولیه یا مقدار مرزی، معادلات دیفرنسیل – جبری و معادلات دیفرانسیل جزیی – جبری را با روش‌های نیمه تحلیلی از قبیل روش آدومیان، روش تکرار وردشی و روش اختلال هموتوپی مورد بررسی قرار داده‌ایم. همچنین با تعریف یک عملگر جدید یا براساس روش تکراری پیشنهادشده توسط گژی و جعفری، تعمیم‌های جدیدی از این روش‌های نیمه تحلیلی را ارایه کرده‌ایم.

روش‌های اصلاح شده پیشنهادی در این رساله با روش‌های استاندارد آن و سایر روش‌های نیمه تحلیلی مقایسه شده‌اند و نتایج حاصل نشان دهنده برتری روش‌های پیشنهادی است.

# فهرست مندرجات

# فهرست جدول‌ها

# فهرست شکل‌ها

# پیش‌گفتار

در این رساله سعی کرده‌ایم تا با استفاده از روش‌های نیمه تحلیلی جدید به حل حالت‌های متنوعی از معادلات دیفرانسیل بپردازیم. معادلاتی از قبیل معادلات دیفرانسیل منفرد مقدار اولیه یا مقدار مرزی، معادلات دیفرانسیل – جبری و معادلات دیفرانسیل جزیی – جبری را با روش‌های نیمه تحلیلی از قبیل روش آدومیان، روش تکرار وردشی و روش اختلال هموتوپی مورد بررسی قرار داده‌ایم و با ایجاد تغییراتی در این روش‌ها مثل تعریف یک عملگر جدید یا استفاده از روش تکراری پیشنهادشده توسط گژی و جعفری اصلاحات جدیدی روی این روش‌ها ارایه کرده‌ایم.

به این منظور در این مبحث سعی شده به سیر تحول این روش‌ها از ابتدای پیدایش تاکنون پرداخته و تاریخچه مختصری از آن‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

**روش تجزیه آدومیان**

روش تجزیه آدومیان که گاهی برای اختصار روش تجزیه نیز نامیده می‌شود در سال ۱۹۸۱ توسط جورج آدومیان ارایه شد و به‌عنوان یک روش نیمه تحلیلی که در آن هیچ احتیاجی به گسسته سازی نیست با استقبال وسیعی در بحث معادلات دیفرانسیل روبه‌رو شد.

این روش، جواب را به‌صورت یک سری که جملاتش به سادگی محاسبه می‌شود و همگرایی سریعی دارد ارایه می‌دهد و می‌توان آن‌را بدون استفاده از مفروضات محدود کننده به‌کار برد.

این روش در اوایل پیدایش توسط جورج آدومیان برای حل معادلات عملگری تصادفی مورد استفاده قرار گرفت و در قالب دو کتاب و چند رساله شرح داده شد[۱۶، ۱۵]. از اولین مقالاتی که بعد از پیدایش روش آدومیان به چاپ رسید می‌توان به مقاله‌ای که توسط موناکو و بلومو در سال ۱۹۸۵ منتشر شد اشاره نمود. که در آن روش تجزیه آدومیان با روش اختلال برای حل معادلات تصادفی از مراتب بالاتر مورد مقایسه قرار گرفت و نتایج آن نشان دهنده برتری روش تجزیه بر روش خسته کننده اختلال بود[۳۳].

اولین بار در سال ۱۹۸۹ چرولت موفق شد همگرایی روش آدومیان را مورد بررسی قرار دهد[۴۹] ولی بحث‌های کامل‌تر در مورد همگرایی در سال‌های بعد توسط محققین مختلفی[۱۰۸،۱۰۲] از جمله خود چرولت [۵۰] ارایه شد.

در فاصله سال‌های ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۷ کارهای زیادی روی روش آدومیان صورت نگرفت (البته این مقایسه با سال‌های بعدتر از آن انجام شده است) ولی یکی از تحولات اساسی روی روش تجزیه در همین سال‌ها اتفاق افتاد و این اتفاق چیزی نبود جز راه یافتن روش آدومیان به حیطه مسایل غیرخطی که در سال ۱۹۹۲ صورت گرفت. با ورود این روش به حیطه مسایل غیرخطی کم‌کم سخن از چندجمله‌ای‌های آدومیان برای نمایش جملات غیرخطی موجود در مساله به میان آمد. این چندجمله‌ای‌ها بر اساس بسط تیلور توابع استوار بودند و علاوه بر روشی که آدومیان ارایه کرده بود، بعدها کارهای زیادی برای محاسبه آن‌ها انجام شد [۱۸۲، ۱۷۳، ۳۹]. بحث مفصل‌تر در مورد نحوه نمایش، روش به‌دست آوردن این چندجمله‌ای‌ها و استفاده از آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل در فصل اول بیان شده است.

از جمله کارهای صورت گرفته در این فاصله زمانی می‌توان به مقاله‌های جورج آدومیان و همکارانش در حل مسایل فیزیکی[۱۷]، حل مسایل خطی و غیرخطی مرزی[۱۹]، اصلاحیه‌هایی از روش تجزیه برای حل مسایل منفرد مرتبه دو [۲۰] و نوشتن کتابی در باب حل مسایل خاصی از فیزیک به روش تجزیه و معرفی چندجمله‌ای‌های آدومیان[۱۸] اشاره نمود. حل دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی [۱۵۰] و اصلاح روش آدومیان برای حل معادلات شامل رادیکال[۱۶۹] نیز ازجمله مقالاتی بودند که در این سال‌ها توسط افرادی غیر از آدومیان به چاپ رسیدند.

در سال ۱۹۹۸ مقایسه‌ای بین روش آدومیان و روش سری تیلور توسط وزواز انجام گرفت. این بررسی‌ها نشان می‌داد که روش تجزیه به آسانی به‌کار می‌رود و نتایج قابل قبولی را با تکرارهای کم تولید می‌کند، در حالی که روش سری تیلور مشکلات محاسباتی فراوانی را به مساله تحمیل می‌کند[۱۷۱]. این ازجمله اولین مقاله‌های وزواز در روش آدومیان بود و این کار باعث

محبوبیت بیشتر روش آدومیان شد، چون در آن زمان روش تیلور روش مقبولی برای حل معادلات دیفرانسیل بود.

بعد از این وزواز کارهای زیادی در زمینه روش آدومیان و اصلاحات آن انجام داد که از جمله این کارها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

ساختن یک الگوریتم جدید و ساده برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای‌های آدومیان در سال ۲۰۰۰[۱۷۳]، حل مسایل مقدار مرزی از مراتب بالا در سال ۲۰۰۰[۱۷۹]، تعریف یک عملگر جدید برای حل مسایل لین- امدن در سال ۲۰۰۱[۱۷۴]، تعریف یک الگوریتم جدید برای به‌دست آوردن جواب‌های مسایل مقدار مرزی غیرخطی در سال ۲۰۰۱[۱۷۶]، تعریف یک عملگر جدید برای حل معادلات بیشتری از مسایل مقدار اولیه منفرد در سال ۲۰۰۲[۱۷۵] و معادلات امدن- فاولر وابسته زمانی در سال ۲۰۰۵[۱۷۸] و ... .

یکی از اصلی‌ترین کارهای وزواز در روش تجزیه تعریف یک عملگر جدید، در سال ۲۰۰۱ برای حل حالت خاصی از معادلات منفرد مرتبه ۲ بود. با تعریف این عملگر روش آدومیان وارد مرحله جدیدی شد که در آن سرعت همگرایی به سمت جواب واقعی مساله مورد توجه قرار گرفت. این کار وزواز پیش زمینه‌ای شد برای تعریف عملگرهای جدید در حل مسایل مقدار اولیه یا مسایل مقدار مرزی تا با کمک آن بتوان سرعت همگرایی روش‌های اصلاح شده به سمت جواب واقعی را افزایش داد.

اما شاید بتوان سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۵ را نقطه عطف دیگری در روش آدومیان نامید. در این دو سال بیش از ۱۰۰ مقاله در باب روش مذکور در مجلات معتبر به چاپ رسید.

معادلات دیفرانسیل منفرد[۱۷۷، ۱۱۰]، دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل غیرخطی[۱۳۵، ۴۰]، معادلات فیشر[۱۸۳]، معادلات ریکاتی[۱۶۸]، معادلات انتگرال[۲۸]، مسایل مقدار مرزی[۳۷]، دستگاه‌های معادلات جبری[۱۲۵] و ... از جمله معادلاتی هستند که در این سال‌ها با استفاده از روش آدومیان مورد بررسی قرار گرفتند.

بعد از سال ۲۰۰۵ افراد بسیاری پا به عرصه روش آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل گذاشتند و با تعریف عملگرهای جدید نقش به‌سزایی در اصلاح روش آدومیان داشتند. از جمله این افراد در کشورمان می‌توان از اسماعیل بابلیان، مهدی دهقان، جعفر بی آزار، سعید عباسبندی،حسین جعفری و محمد مهدی حسینی نام برد.

حسینی برخی از معادلات دیفرانسیل را با استفاده از روش آدومیان حل کرد که از جمله این معادلات می‌توان به معادلات دیفرانسیل جبری خطی و غیرخطی اشاره کرد[۱۰۴، ۱۰۳]. از دیگر کارهای انجام شده روی روش آدومیان تعریف یک عملگر جدید برای حل مسایل مقدار اولیه مرتبه دوم بود. با تعریف این عملگر و اثبات همگرایی آن[۱۰۸، ۱۰۷] سرعت همگرایی این روش برای حل معادلات مرتبه ۲ افزایش یافت. در واقع این عملگر حالت کلی‌تری از عملگر وزواز بود. در ادامه عملگر جدید برای حل مسایل مقدرا اولیه منفرد در حالت کلی تعمیم داده‌شد[۱۰۶، ۱۰۵].

در سال‌های اخیر افرادی با تعریف عملگرهای جدید این روش را برای حل معادلات دیگری به‌کار برده‌اند که از جمله می‌توان تعریف یک عملگر جدید برای حل مسایل مقدار مرزی را بیان نمود[۱۲۳].

**روش تکرار وردشی**

روش تکرار وردشی که از آن به عنوان یک روش نیمه تحلیلی یاد می‌شود، برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط یک محقق چینی به نام خی معرفی شد [۸۴،۱۰۰، ۸۳]. این روش در واقع تعمیمی از روش ضربگر عمومی لاگرانژ است که در سال ۱۹۷۸ توسط اینکوتی ارایه شده است [۱۱۱].

این روش در اوایل پیدایش در فاصله بین سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۵ خیلی مورد استقبال قرار نگرفت. شاید یکی از دلایل اصلی این ناکامی عدم شناخت کافی از این ابزار قوی در حل معادلات دیفرانسیل و همچنین توجه بیش از حد محققین به روش آدومیان در این سال‌ها بود.

ازجمله کارهایی که می‌توان در حد فاصل این سال‌ها به آن اشاره کرد مقاله‌هایی است که در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی[۹۸] و معادلات لین- امدن[۹۷] توسط خی و حل معادلات برگر توسط ابدو و سلیمان [۱۱] منتشر شده است.

سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ سال‌های شکوفایی روش تکرار وردشی می‌باشد. در این سال‌ها مقالات بسیار زیادی در باب مقایسه روش تکرار وردشی با روش آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل به چاپ رسید[۱۷۲،۴۴]. این مقایسه‌ها باعث شد تا محققین از روش تکرار وردشی برای حل معادلات بیشتری استفاده کنند و کم‌کم استفاده از روش آدومیان کمرنگ شود.

حل معادلات گرما و موج[۳۰]، معادلات برگر- هکسلی[۱۳۶،۳۲،۳۱]، معادلات هلمهلز[۱۳۷]، معادلات ریکاتی[۳]، معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی[۱]، مسایل مقدار مرزی دونقطه‌ای[۱۲۴]، معادلات دیفرانسیل کسری[۱۴۳]، معادلات Kdv[۱۸۱] و ... از جمله معادلاتی بودند که در این سال‌ها با روش تکرار وردشی مورد بررسی قرار گرفتند.

در سال‌های اخیر نیز مقالات فراوانی در مورد این روش و همگرایی آن به چاپ رسیده است و افراد زیادی روی این موضوع کار کرده‌اند که از جمله این افراد می‌توان به مهدی دهقان و همکاران وی اشاره کرد. مهدی دهقان علاوه بر حل مسایل کشی[۵۷]، معادلات کلاین - گوردون[۱۵۵] و ... یک اثبات همگرایی برای روش تکرار وردشی[۱۶۷] ارایه داد.

**روش اختلال هموتوپی**

روش اختلال هموتوپی نیز به عنوان یک روش نیمه تحلیلی برای اولین بار در سال ۱۹۹۷ توسط یک ریاضیدان چینی به نام خی با ترکیب روش‌های اختلال و مفهوم هموتوپی در توپولوژی ارایه گردید[۸۰،۷۹]. این روش بدون اتکا به وجود پارامتر اختلال با تبدیل مساله‌ی غیرخطی به یک فرم ساده‌ی خطی، جواب این گونه مسایل را در قالب یک سری همگرا محاسبه می‌کند.

روش اختلال هموتوپی نیز مانند روش تکرار وردشی در بین سال‌های ۱۹۹۷ تا ۲۰۰۵ رشد قابل توجهی نداشت و مورد توجه قرار نگرفت. شاید غیر از دلایلی که برای روش تکرار وردشی اشاره شد بتوان به ایجاد روش تکرار وردشی در سال ۱۹۹۸ توسط خی نیز اشاره کرد.

از جمله مقالاتی که در فاصله این سال‌ها به چاپ رسیدند می‌توان به مقالاتی که در باب نحوه انجام روش توسط خی چاپ شدند اشاره کرد[۹۶،۹۴-۸۶،۸۹،۹۲-۸۲]. همچنین در این

سال‌ها روشی جدید به اسم روش آنالیز هموتوپی توسط لیائو[۱۳۱،۱۲۹] ارایه شد و مبتکرین این طرح‌ها در مقالات مجزایی به توصیف روش خود و مقایسه با روش دیگری پرداختند[۱۳۰،۸۷].

همچون روش تکرار وردشی سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ سال‌های شکوفایی روش اختلال هموتوپی می‌باشد. در این سال‌ها مقالات بسیار زیادی در باب مقایسه روش اختلال هموتوپی با روش تکرار وردشی و روش آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل به چاپ رسید[۸-۶،۲].

معادلات انتگرال[۷۰،۶۰]، معادلات ریکاتی[۱۴۴]، مسایل حساب تغییرات[۱۲]، معادلات دیفرانسیل دافینگ[۳۴]، معادلات دیفرانسیل کسری[۱۷۰،۱۳]، معادلات دیفرانسیل غیرخطی[۱۴۲]، معادلات دیفرانسیل تاخیری[۱۵۷]، معادلات Z.K[۴۱]، معادلات Kdv[۱۶۵،۱۴۸]، معادلات دیفرانسیل جزیی[۵۹،۴۳،۴۲]، معادلات دیفرانسیل منفرد[۱۴۹،۵۲،۵۱]، مسایل مقدار مرزی[۹۱] و ... از جمله معادلاتی بودند که در این سال‌ها با روش اختلال هموتوپی مورد بررسی قرار گرفتند.

در دو سال اخیر روش اختلال هموتوپی برای حل انواع گوناگونی از معادلات دیفرانسیل استفاده شده است.

در انتهای این مبحث لازم می‌دانیم تا مختصری از آن‌چه که در فصل‌های این رساله بدان پرداخته‌ایم را بیان کنیم:

**فصل اول:** بعد از بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی، به بیان معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزیی و معادلات دیفرانسیل- جبری پرداخته‌ایم. بعد از آن روش‌های مورد استفاده در این رساله را مختصرا توضیح داده‌ایم.

**فصل دوم**: با تعریف یک عملگر جدید به حل معادلات دیفرانسیل منفرد مقدار اولیه و مقدار مرزی پرداخته‌ایم.

**فصل سوم**: یک روش عددی موثر، بر اساس روش تکراری پیشنهادشده توسط گژی و جعفری، به‌نام روش اصلاح شده تکراری را برای حل معادلات تابعی غیرخطی به کار برده‌ایم.

**فصل چهارم:** روش نیمه تحلیلی تکرار وردشی را برای حل معادلات دیفرانسیل منفرد امدن فاولر و معادلات دیفرانسیل جزیی- جبری به‌کار برده‌ایم.

**فصل پنجم:** یک نتیجه‌گیری کلی از رساله را ارایه داده‌ایم. نتایج حاصل از روش‌های اصلاح شده در این رساله با روش‌های استاندارد آن مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان دهنده کارایی روش‌های پیشنهادی است.