دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

مجموعه‌های تلاقی‌کننده کمینه در طرح‌های بلوکی

نگارش:

نجمه آقابیگی

استاد راهنما:

دکتر مسعود آرین‌نژاد

شهریور ۱۳۸۹

إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

قدردانی و تشکر

سپاس آفریدگاری را که ما را به نور معرفت و علم بینا ساخت تا پرتوی از انوار خورشید دانش بیکرانش به دل راه یابد.

بر خود لازم می‌دانم تا پس از شکر خداوند، از کلیه کسانی که در انجام این پایان‌نامه به نحوی مرا یاری نمودند سپاسگزاری کنم:

از پدر بزرگوارم، مادر دلسوزم، همسر فداکارم، برادر عزیزم و خواهران مهربانم که در تمامی دوران زندگی‌ام مشوق و پشتیبان من بودند صمیمانه سپاسگزارم و از اینکه به پشتوانه لطف بیکران و دعای خیرشان موفق در به اتمام رساندن پایان‌نامه شدم بر خود می‌بالم.

از زحمات بی‌شائبه استاد ارجمندم جناب آقای دکتر آرین‌نژاد که در تمامی مراحل انجام این پایان‌نامه عالمانه و مشفقانه یاری‌ام نمودند، خالصانه تشکر و قدردانی می‌کنم و همواره وام‌دار محبت‌ها و رهنمودهای ایشان که باعث ایجاد انگیزه و خودباوری در وجودم شد می‌باشم و هرگز درس بزرگ اندیشیدن را، که از ایشان آموختم فراموش نمی‌کنم.

همچنین از آقایان دکتر و دکتر که داوری این پایان‌نامه را قبول فرمودند و از تمامی دوستان خوبم که در طول این دوران در تمام سختی‌ها و شادی‌ها شریک و همراه من بودند، متشکرم.

فهرست مندرجات

مقدمه

این رساله به بررسی موضوع مجموعه‌های تلاقی‌کننده ($Hitting\ Set$) در $t-$ طرح‌های بلوکی می‌پردازد.

اگر $D=(V,\beta)$ یک $t-(v,k,\lambda)$ طرح باشد یک زیرمجموعه H از مجموعه عناصر V را یک مجموعه تلاقی‌کننده برای طرح D می‌نامیم، هرگاه H با هر بلوک از β تلاقی ناتهی داشته باشد.

مجموعه تلاقی‌کننده H را یک مجموعه قالبی ($Blocking\ Set$) برای طرح D می‌نامیم، هرگاه H شامل هیچ بلوکی نباشد در این حالت معمولاً از نماد S برای نشان دادن چنین نوعی از مجموعه‌های تلاقی‌کننده استفاده می‌کنیم.

یک موضوع مهم در بررسی ساختار طرح‌های بلوکی مطالعه این دسته از مجموعه‌ها و پیدا کردن آن‌ها و احیاناً پیدا کردن کران‌هایی برای اندازه‌ی آن‌هاست. این بحث سابقه علمی متراکمی را در موضوع نظریه طرح‌های بلوکی دربرمی‌گیرد [۱, ۵, ۲۵, ۲۸].

به طور مثال در مرجع [۲۴] ثابت شده است، اگر D یک $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$ طرح و H یک مجموعه تلاقی‌کننده برای D باشد؛ دراین صورت، $|H| \geq n+1$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر H یک بلوک از D باشد و نیز در $2-(n^2, n, 1)$ طرح‌ها $|H| \geq 2n-1$ است.

در مرجع [۲۵] نشان داده شده است که در یک $2-(v,k,\lambda)$ طرح داریم: $|H| \geq \lceil \frac{(v+k-1)}{k} \rceil$.

این رساله به بررسی بیشتر چنین کران‌هایی می‌پردازد و مثال‌هایی نیز از وقوع این نوع کران‌ها با توجه به مرجع [۲۵] به دست می‌دهد. به طور مثال نشان می‌دهیم:

اگر H یک مجموعه تلاقی‌کننده برای یک $t-(v, t+1, \lambda)$ طرح باشد و $v \geq 2t$، آنگاه $|H| \geq \lfloor \frac{v}{2} \rfloor$ وقتی که t زوج است و $|H| \geq \lceil \frac{v}{2} \rceil$ وقتی که t فرد است.

نیز برای هر $t-(v,t+۱,\lambda)$ طرح که v فرد و $v>۲t$ باشد، شامل هیچ مجموعه قالبی نیست.
به همین ترتیب در مرجع [۱۸] ثابت شده است که در یک $۲-(v,k,\lambda)$ طرح D هرگاه $k\neq ۳$ آنگاه یک کران برای مجموعه قالبی S برابر است با: $|S|\geq \frac{v}{۲}-\frac{۱}{۲k}\sqrt{k^۲v^۲-۴kv^۲+۴kv}$.
در مراجع [۱۸, ۱۷] نیز ثابت شده است در یک $۲-(v,k,\lambda)$ طرح متقارن یک کران پایین برای مجموعه قالبی S برابر است با: $s\geq \frac{k+\sqrt{k-\lambda}}{\lambda}$.
در این رساله به بررسی بیشتر چنین کران‌هایی به ویژه با توجه به مرجع [۵] می‌پردازیم. نتایج مهمی که در این رساله مورد توجه قرار گرفته‌اند عبارتند از:
یک $۲-(v,k,\lambda)$ طرح با $v>(k-۱)^۲$ نمی‌تواند شامل یک مجموعه قالبی با شاخص ۱ باشد و در یک $۲-((k-۱)^۲,k,\lambda)$ طرح D، با $\lambda\leq k$، هیچ مجموعه قالبی با اندازه s از نوع $(۱,s)$ وجود ندارد. این گونه مفاهیم در متن رساله به دقت معرفی و مورد بحث واقع می‌شوند.

نجمه آقابیگی

شهریورماه ۱۳۸۹

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

در این فصل ابتدا تعاریف و قضایایی در مورد طرح‌های بلوکی و به ویژه در مورد طرح‌های متقارن که در فصل‌های بعدی از آن‌ها بهره می‌گیریم را از مراجع [۱, ۵, ۲۵] می‌آوریم.

تعریف ۱.۰.۱ فرض کنید v و k و λ و t اعداد صحیح مثبتی باشند، به طوری که $t \leq k \leq v$ و $\lambda > 0$. دوتایی $D = (V, \beta)$ را یک $t - (v, k, \lambda)$ طرح یا به طور خلاصه یک $t-$ طرح می‌نامیم، هرگاه V یک مجموعه v عضوی (با نام نقاط طرح)، β خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k عضوی V (با نام بلوک) باشند و هر t- تایی از مجموعه V دقیقاً در λ بلوک ظاهر شود.

- به ازای $t = 2$ هر ۲- طرح را یک طرح بلوکی ناکامل متعادل می‌نامیم.
- ممکن است یک بلوک چند بار در خانواده β بیاید. در این صورت می‌گوییم که طرح، بلوک‌های تکراری دارد. در صورتی که طرح بلوک‌های تکراری نداشته باشد آن را یک طرح ساده گوییم.
- یک $t - (v, k, \lambda)$ طرح با $\lambda = 1$ را یک ساختمان اشتاینری می‌نامیم و با نماد $S(t, k, v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۰.۱ یک $t-(v,k,\lambda)$ طرح با ۳ $= k$ را یک ساختمان سه‌تایی می‌نامیم.

تعریف ۳.۰.۱ یک $t-(v,k,\lambda)$ طرح با ۱ $= \lambda$ و ۳ $= k$ را یک ساختمان سه‌تایی اشتاینری می‌نامیم.

تعریف ۴.۰.۱ یک $t-(v,k,\lambda)$ طرح را طرح کامل می‌نامیم، هرگاه تمام $k-$ تایی‌های ممکن جزء بلوک‌های طرح باشند که در این صورت تعداد بلوک‌ها برابر $\binom{v}{k}$ است.

تعریف ۵.۰.۱ یک $t-(v,k,\lambda)$ طرح را طرح متقارن می‌نامیم، هرگاه تعداد نقاط طرح با تعداد بلوک‌های طرح برابر باشد. بنابراین، هرگاه تعداد بلوک‌های یک $t-$ طرح را با نماد b نشان دهیم یک $t-$ طرح متقارن است، هرگاه $b = v$.

مثال ۱.۰.۱ آرایه‌های سطری زیر بلوک‌های یک (۱ ,۳ ,۷) − ۲ طرح می‌باشد، که تعداد بلوک‌های آن برابر ۷ $= b$ است.

۱۲۳   ۱۴۵   ۱۶۷   ۲۴۶   ۲۵۷   ۳۴۷   ۳۵۶

در ضمن این طرح یک طرح بلوکی متقارن نیز می‌باشد.

نکته. در قضیه زیر ثابت می‌شود، هر یک از v نقطه طرح به تعداد برابری در طرح تکرار می‌شوند، این تکرار یکسان را با نماد r نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۰.۱ هر $t-(v,k,\lambda)$ طرح یک $s-(v,k,\lambda_s)$ طرح است به ازای $0 \leq s \leq t$ که در آن

$$\lambda_s = \lambda \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}. \qquad (۱.۱)$$

در حالی که $\lambda_0 = b$ ، $\lambda_1 = r$ و $\lambda_t = \lambda$ می‌باشد.

برهان : برای آن که هر t- طرح یک s- طرح باشد باید همه‌ی s- تایی‌ها دقیقاً λ_s بار ظاهر شوند. در ابتدا یک s- تایی دلخواه انتخاب کرده، تعداد تکرار آن را محاسبه می‌کنیم. تعداد کل t- تایی‌های شامل این s- تایی را به دو روش می‌خواهیم بشماریم:

روش اول $t-s$ عضو را از $v-s$ عضو باقیمانده انتخاب می‌کنیم وچون هر t- تایی λ بار ظاهر می‌شود لذا تعداد کل t- تایی‌ها، $\lambda\binom{v-s}{t-s}$ می‌باشد.

روش دوم $t-s$ عضو را از $k-s$ عضو باقیمانده انتخاب می‌کنیم و چون هر s- تایی در λ_s بلوک ظاهر شده، پس تعداد کل t- تایی‌ها، $\lambda_s\binom{k-s}{t-s}$ خواهد بود.

در نتیجه تساوی زیر را داریم:

$$\lambda_s\binom{k-s}{t-s} = \lambda\binom{v-s}{t-s}.$$

چون این s- تایی را دلخواه در نظر گرفته‌ایم در نتیجه بقیه‌ی s- تایی‌ها هم تعداد تکرارشان با آن یکی می‌شود. ■

نتیجه ۲.۰.۱ در یک $t-$ طرح رابطه زیر نیز برقرار است:

$$b\binom{k}{t} = \lambda\binom{v}{t}. \tag{۱.۲}$$

برهان : برای اثبات، تعداد t- تایی‌هایی که در طرح ظاهر شده‌اند را شمارش می‌کنیم. تعداد t- زیرمجموعه‌های یک مجموعه v- عضوی، $\binom{v}{t}$ می‌باشد و هر t- تایی در λ بلوک ظاهر می‌شود. از طرفی هر بلوک شامل $\binom{k}{t}$ زیرمجموعه t- عضوی است و تعداد بلوک‌ها نیز b تاست، بنابراین تعداد کل t- تایی‌ها برابر است با:

$$b\binom{k}{t} = \lambda\binom{v}{t}.$$

به این ترتیب حکم برقرار است. ■

نتیجه ۳.۰.۱ دو معادله زیر حالت‌های خاص، رابطه‌های (۱.۱) و (۱.۲) به ازای $t = ۲$ است:

$$bk = rv, \tag{۱.۳}$$

$$\lambda(v - ۱) = r(k - ۱). \tag{۱.۴}$$

که در عین حال شرایط لازم برای وجود یک ۲- طرح می‌باشند.

برهان : برای اثبات رابطه (۱.۳) در معادله (۱.۱)، $s = ۱$ را قرار می‌دهیم، داریم:

$$\lambda_۱ = r = \lambda\frac{\binom{v-۱}{t-۱}}{\binom{k-۱}{t-۱}} = \lambda\frac{\frac{(v-۱)!}{(t-۱)!(v-t)!}}{\frac{(k-۱)!}{(t-۱)!(k-t)!}}$$

و

$$\frac{rv}{k} = \lambda\frac{\frac{v(v-۱)!}{t(t-۱)!(v-t)!}}{\frac{k(k-۱)!}{t(t-۱)!(k-t)!}} = \lambda\frac{\frac{v!}{t!(v-t)!}}{\frac{k!}{t!(k-t)!}} = \lambda\frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} = b$$

در نتیجه رابطه $bk = rv$ به دست می آید.

معادله (۱.۱) را به ازای $t = ۲$ و $s = ۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda_۱ = r = \lambda\frac{\binom{v-۱}{۲-۱}}{\binom{k-۱}{۲-۱}} = \lambda\frac{(v-۱)}{(k-۱)}$$

در نتیجه رابطه $r(k-۱) = \lambda(v-۱)$ حاصل می‌شود. ■

تذکر. هر نقطه از یک طرح متقارن در دقیقاً k بلوک ظاهر می‌شود؛ علاوه‌براین،

$$b = v = \frac{k(k-۱)}{\lambda} + ۱.$$

که با استفاده از رابطه‌های (۱.۳) و (۱.۴) به دست آمده است.

تعریف ۶.۰.۱ عدد صحیح $n = r - \lambda$ را مرتبه یک $(v, k, \lambda) - ۲$ طرح بلوکی متقارن می‌نامیم.

تعریف ۷.۰.۱ فرض کنید $D = (V, \beta)$ یک (v, k, λ) – ۲ طرح است و نیز فرض کنید $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b\}$ یک ترتیب دلخواه برای بلوک‌های این طرح باشد، ماتریس وقوع این طرح با نماد $A = (a_{ij})$ ماتریسی از اندازه $b \times v$ است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

- اگر i ام بلوک شامل j ام عنصر باشد، آن را برابر ۱ قرار می‌دهیم،
- در غیر این صورت آن را برابر ۰ قرار می‌دهیم.

شماره‌گذاری متفاوت روی بلوک‌های طرح، ماتریس‌های وقوع متشابهی را به دست می دهند (متشابه از نظر جبر خطی).

قضیه ۴.۰.۱ اگر A ماتریس وقوع یک ۲– طرح بلوکی باشد. آنگاه

$$A'A = (r - \lambda)I + \lambda J, \qquad (۱.۵)$$

به طوری که A' ترانهاده ماتریس A، I ماتریس همانی از مرتبه $v \times v$ و J ماتریس تماماً ۱ مربعی از مرتبه v است.

برهان : چون A' ماتریسی از مرتبه $v \times b$ می‌باشد، لذا ماتریس $A'A$ از مرتبه $v \times v$ است.
بنابراین، داریم:

$$A'A = (c_{ij}) = \begin{cases} r & if\ i = j \\ \lambda & if\ i \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \ldots & \lambda \\ \vdots & & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r-\lambda & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & r-\lambda & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & r-\lambda & \dots & \circ \\ \vdots & & & & \\ \circ & \circ & \circ & \dots & r-\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \end{pmatrix} = (r-\lambda)I + \lambda J.$$

■

قضیه ۵.۰.۱ (نامساوی فیشر): در هر ۲− طرح بلوکی با شرط $v > k \leq$ ۲ داریم:

$b \geq v$ (یا به طور معادل $r \geq k$).

برهان : فرض کنید A ماتریس وقوع باشد. در ابتدا نشان می‌دهیم که $A'A$ یک ماتریس معکوس‌پذیر است. بنابراین کافیست نشان دهیم، دترمینال این ماتریس مخالف صفر است.

$$|A'A| = \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{vmatrix}$$

برای این کار ابتدا سطر اول را از تمام سطرهای دیگر کم کرده، سپس همه ستون‌ها را به ستون اول اضافه می‌کنیم، داریم:

$$= \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda - r & r-\lambda & \circ & & \circ \\ \lambda - r & \circ & r-\lambda & & \circ \\ \vdots & & & & \\ \lambda - r & \circ & \circ & \dots & r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r+(v-1)\lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ 0 & r-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \{r+(v-1)\lambda\}(r-\lambda)^{v-1} = rk(r-\lambda)^{v-1}$$

با استفاده از رابطه (۱.۴) به دست می‌آید. چون r و v و λ اعداد صحیح و مثبت هستند، پس $r+(v-1)\lambda$ یک عدد صحیح است و اما $k<v$. پس با استفاده از رابطه (۱.۴) داریم: $r>\lambda$؛ لذا $|A'A| \neq 0$. در نتیجه،

$$rank(A'A) = v \leq min\{rank(A), rank(A')\}$$

از طرف دیگر: $rank(A'A) = v \leq rank(A) \leq min\{b, v\}$. در نتیجه $b \geq v$. ■

قضیه ۶.۰.۱ اگر A ماتریس وقوع یک طرح متقارن باشد، آنگاه $AA' = A'A$. بنابراین هر دو بلوک مجزا دقیقاً λ عنصر مشترک دارند.

برهان : در یک طرح بلوکی متقارن $b=v$ و در نتیجه $r=k$ است. در ابتدا $AJ = JA = kJ$، در نتیجه $A'J = (JA)' = (kJ)' = kJ$. به طور مشابه داریم: $JA' = kJ$. همچنین $J^2 = vJ$. با استفاده از رابطه (۱.۵) داریم:

$$(A' - \sqrt{(\frac{\lambda}{v})}J)(A + \sqrt{(\frac{\lambda}{v})}J) = A'A + \sqrt{(\frac{\lambda}{v})}(A'J - JA) - \frac{\lambda}{v}J^2$$

$$= A'A - \lambda J = (k-\lambda)I.$$

لذا $(A+\sqrt{(\frac{\lambda}{v})}J)\frac{1}{(k-\lambda)}$ وارون $(A'-\sqrt{(\frac{\lambda}{v})}J)$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}(k-\lambda)I &= (A+\sqrt{(\frac{\lambda}{v})}J)(A'-\sqrt{(\frac{\lambda}{v})}J)\\ &= AA'+\sqrt{(\frac{\lambda}{v})}(JA'-AJ)-\frac{\lambda}{v}J^2 = AA'-\lambda J,\end{aligned}$$

در نتیجه $AA'=(k-\lambda)I+\lambda J=A'A$.

پس هر دو سطر ماتریس A، دارای λ یک مشترک هستند. بنابراین، هر دو بلوک مجزا دقیقاً λ عنصر مشترک دارند. ■

تعریف ۸.۰.۱ در یک ۲− طرح متقارن هرگاه $k=v-1$ باشد، آن طرح را یک طرح بدیهی می‌نامیم.

لم ۷.۰.۱ برای هر $(v,k,\lambda)-2$ طرح بلوکی متقارن غیربدیهی داریم: $v-2k+\lambda>0$.

برهان : چون $\lambda(v-1)=k(k-1)$ و $k<v-1$ در نتیجه $\lambda<k-1$. از طرفی

$$\lambda(v-k)=\lambda(v-1)+\lambda(1-k)=k(k-1)-\lambda(k-1)=(k-1)(k-\lambda).$$

در این صورت، اگر $\lambda<k-1$ آنگاه $v-k>k-\lambda$ یعنی $v-2k+\lambda>0$. ■

تعریف ۹.۰.۱ فرض کنید D یک ۲− طرح روی مجموعه V با v عنصر باشد. طرح مکمل $\overline{D}$ طرحی است که بلوک‌های آن مکمل بلوک‌های β از D به صورت $V-\beta$ می‌باشد.

قضیه ۸.۰.۱ فرض کنید D یک $(v,k,\lambda)-2$ طرح باشد. در این صورت $\overline{D}$ یک

$$2-(v,v-k,b-2r+\lambda)$$

طرح است و داریم: $b-2r+\lambda>0$.

برهان : مکمل طرح بلوکی D شامل v عنصر، b بلوک از اندازه $v-k$ می‌باشد. چون هر عضو در r بلوک از طرح بلوکی D ظاهر می‌شود، مکمل بلوک‌های طرح D بلوک‌های طرح $\overline{D}$ می‌باشند، به طوری که هر عضو در $b-r$ بلوک از طرح بلوکی $\overline{D}$ ظاهر می‌شود. تعداد بلوک‌هایی از طرح بلوکی $\overline{D}$ که شامل دو عضو x و y می‌باشند برابر است با تعداد بلوک‌هایی از طرح بلوکی D که شامل هیچ یک از دو عضو x و y نمی‌باشند لذا:

$b-($تعداد بلوک‌هایی از D که شامل x می‌باشند + تعداد بلوک‌هایی از D که شامل y می‌باشند
$-$ تعداد بلوک‌هایی از D که شامل هر دو عضو x و y می‌باشند$)$ $= b-(r+r-\lambda) = b-2r+\lambda$

و داریم: $b-2r+\lambda > 0$ ■

نکته. اگر D یک $(v,k,\lambda)-2$ طرح بلوکی متقارن باشد، آنگاه $\overline{D}$ یک $(v,v-k,b-2r+\lambda)-2$ طرح بلوکی متقارن است.

قضیه ۹.۰.۱ فرض کنید یک $(v,k,\lambda)-2$ طرح بلوکی متقارن غیربدیهی موجود باشد و $n=k-\lambda$. در این صورت

$$4n-1 \leq v \leq n^2+n+1.$$

برهان : فرض کنید $\lambda' = v-2k+\lambda$. با استفاده از لم (۹.۰.۱)، $\lambda' > 0$ و $\lambda+\lambda' = v-2n$. همچنین،

$$\lambda\lambda' = \lambda(v-2k+\lambda) = \lambda v - 2k\lambda + \lambda^2$$

$$= k(k-1)+\lambda-2k\lambda+\lambda^2 = (k-\lambda)^2-k+\lambda = n^2-n = n(n-1).$$

اما $(\lambda+\lambda')^2 \geq 4\lambda\lambda'$؛ در این صورت $(v-2n)^2 \geq 4n(n-1)$. واضح است که $4n(n-1)$ مربع کامل نیست؛ بنابراین $(v-2n)^2 > 4n(n-1)$ و در نتیجه $(v-2n)^2 \geq 4n^2-4n+1 = (2n-1)^2$.

داریم: $v - 2n = v - 2k + 2\lambda > 0$. بنابراین $v - 2n \geq 2n - 1$، در نتیجه $v \geq 4n - 1$.
برای اثبات نامساوی دوم، با $v - 2k + \lambda \geq 1$ شروع می‌کنیم؛ در این صورت $0 \leq v - 2n - \lambda - 1$.
طرفین نامساوی اخیر را در $\lambda - 1$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$0 \leq (\lambda - 1)(v - 2n - \lambda) - (\lambda - 1),$$

$$0 \leq \lambda(v - 2n - \lambda) - (v - 2n - 1) = \lambda(v - 2k + \lambda) - (v - 2n - 1)$$

$$= \lambda\lambda' - (v - 2n - 1),$$

یعنی،

$$0 \leq n^2 - n - (v - 2n - 1)$$

چون $\lambda\lambda' = n(n - 1)$، در نتیجه $v \leq n^2 + n + 1$. ■

قضیه ۱۰.۰.۱ هر طرح متقارن با $v = 4n - 1$، $n = k - \lambda$، یک $(4n - 1, 2n - 1, n - 1) - 2$ طرح یا مکمل آن است.

برهان : اگر $v = 4n - 1$، آنگاه $k(k - 1) = \lambda(4n - 2) = 2\lambda(2n - 1) = 2(k - n)(2n - 1)$.
به طوری که،

$$0 = k^2 - k - k(4n - 2) + 2n(2n - 1)$$

$$= k^2 - k(4n - 1) + 2n(2n - 1) = (k - 2n)(k - 2n + 1);$$

پس $k = 2n$ یا $k = 2n - 1$. اگر $k = 2n$ از آنجا که $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$، آنگاه $\lambda = n$.
در نتیجه $(4n - 1, 2n, n) - 2$ طرح را داریم. اگر $k = 2n - 1$، آنگاه $\lambda = n - 1$. در نتیجه
$(4n - 1, 2n - 1, n - 1) - 2$ طرح را داریم. ■

تعریف ۱.۰.۱۰ یک $۲-(۴n-۱, ۲n-۱, n-۱)$ طرح را، طرح هادامارد از مرتبه n می‌نامیم.

تعریف ۱.۰.۱۱ صفحه‌ی تصویری متناهی از مرتبه n، یک $۲-(n^۲+n+۱, n+۱, ۱)$ طرح است.$(n \geq ۲)$

تعریف ۱.۰.۱۲ صفحه‌ی آفین از مرتبه n، یک $۲-(n^۲, n, ۱)$ طرح است.

تعریف ۱.۰.۱۳ دو طرح بلوکی $D=(V, \beta_۱)$ و $D'=(V, \beta_۲)$ را یکریخت می‌نامیم، هرگاه یک نگاشت دوسویی $\sigma : V \to V$ موجود باشد، به طوری که $\sigma(\beta_۱)=\beta_۲$.

مثال ۱.۰.۲ دو طرح بلوکی $D=(V, \beta_۱)$ و $D'=(V, \beta_۲)$ با پارامترهای $۲-(۷, ۳, ۱)$ را در نظر می گیریم. می‌توان بلوک‌های D را با جایگشت $\sigma : (۳, ۴)$ به D' تبدیل کرد. لذا این دو طرح یکریختند. $\beta_۱ = \{۱۲۳, ۱۴۵, ۱۶۷, ۲۴۶, ۲۵۷, ۳۴۷, ۳۵۶\}$ و
$\beta_۲ = \{۱۲۴, ۱۳۵, ۱۶۷, ۲۳۶, ۲۵۷, ۳۴۷, ۴۵۶\}$

قضیه ۱.۰.۱۱ اگر در یک طرح بلوکی متقارن v زوج باشد، آنگاه $k-\lambda$ مربع کامل است.

برهان : چون $b=v$ است، بنابراین A یک ماتریس مربعی می‌باشد. علاوه‌براین، در اثبات نامساوی فیشر داریم:

$$(detA)^۲ = (v\lambda - \lambda + r)(r-\lambda)^{v-۱}$$

از آنجا که طرح متقارن است، در نتیجه

$$(detA)^۲ = (v\lambda - \lambda + k)(k-\lambda)^{v-۱} \tag{۱.۶}$$

و چون $\lambda(v-۱)=k(k-۱)$، لذا $v\lambda - \lambda + k = k^۲$.

در این صورت با توجه به رابطه (۱.۶)، $(k-\lambda)^{v-۱}$ باید مربع کامل باشد و به دلیل اینکه v زوج است، $k-\lambda$ مربع کامل می‌باشد. ■

تعریف ۱۴.۰.۱ عنصر غیرصفر θ روی $GF(q)$ را عنصر اولیه[۱] (به پیمانه q) می‌نامیم، هرگاه $\theta, \theta^{2}, \theta^{3}, \ldots, \theta^{q-1} = 1$ دقیقاً همه عناصر غیرصفر $GF(q)$ باشند ($q = p^m$، $m \geq 1$ و p عدد اول). اگر $q = p$، آنگاه $GF(q)$ فقط Z_p است، در این صورت θ ریشه اولیه[۲] p نامیده می‌شود.

مثال ۳.۰.۱ ریشه اولیه روی Z_7، ۳ است، زیرا

$$3^1 = 3,\ 3^2 = 2,\ 3^3 = 6,\ 3^4 = 3.6 = 4,\ 3^5 = 3.4 = 5,\ 3^6 = 3.5 = 1.$$

در حالی که ۲ ریشه اولیه روی Z_7 نیست، زیرا $1 = 2^6 = 2^3$.

مثال ۴.۰.۱ فهرستی از ریشه‌های اولیه در جدول زیر آمده است.

p	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹	۳۱	۳۷	۴۱
ریشه اولیه	۲	۲	۳	۲	۲	۳	۲	۵	۲	۳	۲	۶

تعریف ۱۵.۰.۱ مجموعه $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ را یک $t-(v,k,\lambda)$ مجموعه تفاضلی[۳] (به پیمانه v) روی Z_v می‌نامیم، هرگاه $|D| = k$ و $d_i \in Z_v$ به ازای هر $1 \leq i \leq k$ با این خاصیت که هر عنصر غیرصفر Z_v را می‌توان λ بار به شکل تفاضل عناصر مجموعه D نوشت و در این صورت طرح $t-(v,k,\lambda)$ را یک طرح دوری گوییم.

[۱] Primitive Element

[۲] Primitive Root

[۳] Difference Set

- توجه کنید مجموعه

$$\{1^2, \theta^2, \theta^4, \ldots, \theta^{q-3}, \theta^{q-1} = 1, \theta^2, \theta^4, \ldots, \theta^{2q-4}\} = \{1^2, \theta^2, \theta^4, \ldots, \theta^{q-3}\}$$

یک مجموعه تفاضلی روی $GF(q)$ است.

مثال ۵.۰.۱ مجموعه $\{1,2,4\}$ یک $(7,3,1) - 2$ مجموعه تفاضلی (به پیمانه ۷) روی Z_7 است و طرح $(7,3,1) - 2$ یک طرح دوری است زیرا طول مجموعه روی Z_7 سه‌تایی است،

$$1 - 2 = 6,\quad 2 - 4 = 5,\quad 1 - 4 = 4,\quad 4 - 1 = 3,\quad 4 - 2 = 2\quad 2 - 1 = 1$$

و همه عناصر غیرصفر Z_7 به شکل تفاضل $\lambda = 1$ بار ظاهر شده‌اند.

لم ۱۲.۰.۱ هرگاه یک $t - (v,k,\lambda)$ مجموعه تفاضلی وجود داشته باشد، آنگاه

$$\lambda(v-1) = k(k-1).$$

برهان : از k عنصر در مجموعه تفاضلی، $2\binom{k}{2} = k(k-1)$ تفاضل وجود دارد. از طرفی Z_v، $(v-1)$ عنصر غیرصفر (به پیمانه v) دارد که هر کدام از عناصر λ بار ظاهر شده‌اند. در این صورت تساوی برقرار است. ∎

تعریف ۱۶.۰.۱ هرگاه مجموعه $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ یک $t - (v,k,\lambda)$ مجموعه تفاضلی (به پیمانه v) روی Z_v باشد، آنگاه مجموعه $D + a = \{d_1 + a, d_2 + a, \ldots, d_k + a\}$ را یک انتقال[1] D می‌نامیم.

لم ۱۳.۰.۱ هر انتقال یک $t - (v,k,\lambda)$ مجموعه تفاضلی همچنین یک $t - (v,k,\lambda)$ مجموعه تفاضلی است.

[1] Translate